

Dérivabilité

Table des matières

1	Dérivabilité d'une fonction réelle	2
1.1	Définitions	2
1.2	Interprétation graphique	3
1.3	Dérivabilité sur un intervalle	4
1.4	Opérations sur les dérivées	6
1.5	Dérivées des fonctions usuelles	7
2	Applications de la notion de dérivabilité	8
2.1	Extrema	8
2.2	Théorème de Rolle	9
2.3	Théorème des accroissements finis	10
2.4	Dérivée et variations	12
2.5	Théorème de prolongement de la dérivée	13

1 Dérivabilité d'une fonction réelle

1.1 Définitions

Définition 1.1 : Dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable en x_0** lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on appelle cette limite le **nombre dérivé de f en x_0** et on la note $f'(x_0)$.

Remarque 1.2 : Taux d'accroissement

Le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le **taux d'accroissement** de f entre x et x_0 . Le nombre dérivé est donc la limite du taux d'accroissement quand x tend vers x_0 .

On utilise très souvent le changement de variable suivant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple 1. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables en 1 :

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

Solution.

Définition 1.3 : Dérivabilité à gauche en un point

Soit f une fonction définie sur un voisinage à gauche du point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable à gauche en x_0** lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on appelle cette limite le **nombre dérivé à gauche de f en x_0** et on la note $f'_g(x_0)$.

Définition 1.4 : Dérivabilité à droite en un point

Soit f une fonction définie sur un voisinage à droite du point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable à droite en x_0** lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on appelle cette limite le **nombre dérivé à droite de f en x_0** et on la note $f'_d(x_0)$.

Théorème 1.5 : Liens entre dérivabilité et dérivabilité à gauche/droite

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

Exemple 2. La fonction $f : x \mapsto |x|$ possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 = f'_g(0),$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 = f'_d(0).$$

Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, f n'est pas dérivable en 0.

Proposition 1.6 : Dérivabilité implique continuité

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

La réciproque est fausse, comme le montre la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Démonstration. Si f est dérivable en x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie. Comme $\lim_{x \rightarrow x_0} x - x_0 = 0$, on montre par l'absurde que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0,$$

c'est-à-dire que f est continue en x_0 . □

1.2 Interprétation graphique

Dans ce paragraphe, on note C_f la courbe représentative de f .

Définition 1.7 : Droite sécante

On appelle **droite sécante** à C_f entre deux points M_0 et M_1 la droite reliant les points $M_0 (x_0, f(x_0))$ et $M_1 (x_1, f(x_1))$. Son équation est

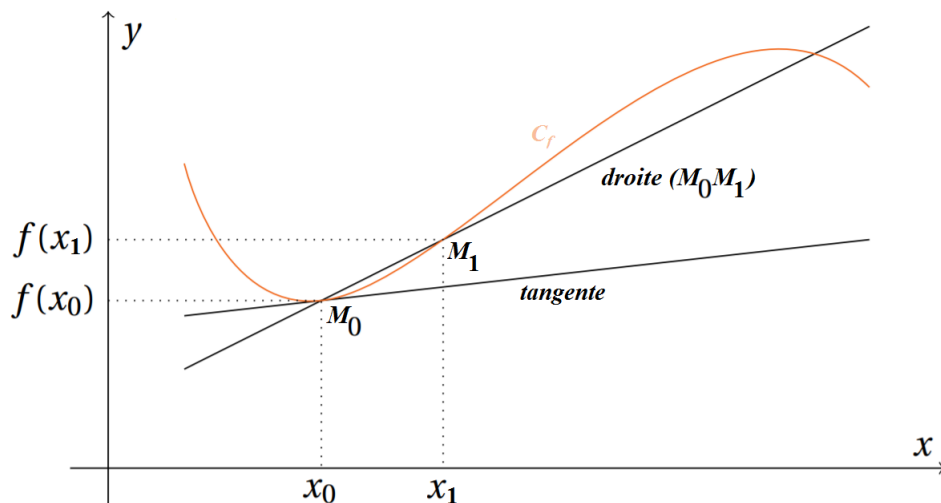
$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) + f(x_0).$$

Proposition 1.8 : Tangente en un point

Soit f une fonction dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. C_f admet une tangente au point $M_0 (x_0, f(x_0))$ d'équation

$$y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0).$$

$f'(x_0)$ représente donc la "pente limite" quand M_1 tend vers M_0 , c'est-à-dire le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point $M_0 (x_0, f(x_0))$.



Proposition 1.9 : Demi-tangente en un point

Si f est dérivable seulement à gauche (ou à droite) de x_0 , elle possède une demi-tangente à gauche (ou à droite) d'équation

$$y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{ou} \quad y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 de nombres dérivés différents, on dit que $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point anguleux.

Exemple 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = |\sin(x)|$. On calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} = -1 = f'_g(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f'_d(0)$$

Le point $(0, 0)$ est donc un point anguleux : la courbe représentative de f a une demi-tangente à gauche en 0 d'équation $y = -x$ et une demi-tangente à droite d'équation $y = x$.

Exemple 4. La courbe représentative de la fonction valeur absolue présente un point anguleux en 0. Elle a une demi-tangente à gauche en 0 d'équation $y = -x$ et une demi-tangente à droite d'équation $y = x$.

Proposition 1.10 : Tangente verticale en un point

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, C_f admet une tangente verticale en x_0 .

Exemple 5. La courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente verticale en 0.

1.3 Dérivabilité sur un intervalle**Définition 1.11 : Dérivabilité sur un intervalle**

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I .

Si I est de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b]$, alors f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de $]a, b[$ et dérivable à droite en a si I contient a , et à gauche en b si I contient b .

Exemple 6. Une fonction est dérivable sur $[0, 1]$ si elle est dérivable en tout point de $]0, 1[$, dérivable à droite en 0 et à gauche en 1.

Définition 1.12 : Ensemble de dérivabilité

L'ensemble des points où une fonction f est dérivable est appelé l'ensemble de dérivabilité de f .

Exemple 7. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (mais définie sur $[0, +\infty[$).

Définition 1.13 : Fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur une partie I de $\mathbb{R}$. On appelle **fonction dérivée** de f l'application

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Définition 1.14 : Fonction de classe C^1

On dit qu'une fonction f est **de classe C^1** sur une partie I de $\mathbb{R}$ si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I .

L'ensemble des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle I est noté $C^1(I)$.

Théorème 1.15 : Dérivabilité des fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, logarithme, exponentielle et fonctions trigonométriques sont dérivables (et même de classe C^1) sur leur ensemble de définition.

Les fonctions racine carrée et valeur absolue sont dérivables (et même de classe C^1) sur leur ensemble de définition sauf en 0.

Exemple 8. $x \mapsto x^5 + 3x^2 - 8$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{x^3 - 5x + 1}{x - 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ $x \mapsto \log(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Proposition 1.16 : Régularité des fonctions

Soit I un intervalle.

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \Rightarrow f \text{ est dérivable sur } I \Rightarrow f \text{ est continue sur } I.$$

Attention, ces implications ne sont pas réciproques.

Exemple 9. $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (non dérivable en 0).

Exemple 10. Soit f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (f' discontinue en 0).

Solution.

1.4 Opérations sur les dérivées

Propriété 1.17 : Opérations sur les dérivées

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

(i) Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad (\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

(ii) fg est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iii) Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

(iv) Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Démonstration. Les preuves de (i) et (iv) sont laissées en exercice.

(ii) Calculons la dérivée de fg en $x_0 \in I$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ &= (fg)'(x_0). \end{aligned}$$

Donc fg est dérivable et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(iii) Calculons la dérivée de $\frac{1}{g}$ en $x_0 \in I$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \text{car } g \text{ est continue en } x_0 \\ &= \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0). \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$. □

Propriété 1.18 : Composée de dérivées

Si f est dérivable sur I à valeurs dans J et si g est dérivable sur J , alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

Démonstration. Calculons la dérivée de $g \circ f$ en $x_0 \in I$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(f(x_0)) \times f'(x_0) \quad \text{car on reconnaît la dérivée de } g \text{ en } f(x_0) \\ &= (g \circ f)'(x_0). \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$. □

Remarque 1.19 : Dérivabilité d'une fonction donnée

Pour démontrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle (ou sur son ensemble de définition), il suffit donc généralement de dire qu'elle s'obtient à partir de fonctions usuelles et de différentes opérations.

Propriété 1.20 : Dérivabilité d'une bijection réciproque

Si f est une fonction dérivable et bijective de I sur J telle que f' ne s'annule pas sur I , alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur J . De plus,

$$\forall y_0 \in J, \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration. On retrouve cette formule en dérivant l'égalité $f(f^{-1}(y_0)) = y_0$ pour $y_0 \in J$.

$$1 = (f \circ f^{-1})'(y_0) = f'(f^{-1}(y_0)) \times (f^{-1})'(y_0).$$

□

On retrouve le fait que f et f^{-1} ont les mêmes variations (théorème 2.9 du chapitre Continuité).

Exemple 11. La fonction tangente réalise donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque, la fonction arctangente, va de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x),$$

alors d'après la propriété 1.20 pour $y \in \mathbb{R}$

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(y)))^2} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

1.5 Dérivées des fonctions usuelles

Toutes les fonctions suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition à l'exception des fonctions $x \mapsto x^a$ avec $0 < a < 1$ (donc en particulier de la fonction racine carrée) qui ne sont pas dérivables en 0 (mais qui sont définies et continues en 0). Il faut connaître les dérivées suivantes :

$f(x)$	$x^a \ (a \in \mathbb{R})$	$\ln(x)$	e^x	$a^x \ (a > 0)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\arctan(x)$
$f'(x)$	$a x^{a-1}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$a^x \ln(a)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$1 + \tan^2(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Grâce à la propriété 1.18, on en déduit les formules analogues pour dériver des fonctions composées. Si u est une fonction dérivable alors :

$f(x)$	$u(x)^a \ (a \in \mathbb{R})$	$\ln(u(x))$	$e^{u(x)}$	$\sin(u(x))$	$\cos(u(x))$	$\arctan(u(x))$
$f'(x)$	$a u'(x) (u(x))^{a-1}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$u'(x) e^{u(x)}$	$u'(x) \cos(u(x))$	$-u'(x) \sin(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

On peut également résumer les résultats de la propriété 1.17. Si u et v sont des fonctions dérivables alors :

$f(x)$	$u(x) + v(x)$	$\lambda u(x) \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$u(x) v(x)$	$\frac{1}{v(x)}$	$\frac{u(x)}{v(x)}$
$f'(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$\lambda u'(x)$	$u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$	$-\frac{v'(x)}{v(x)^2}$	$\frac{u'(x) v(x) - u(x) v'(x)}{v(x)^2}$

Exemple 12. Calculer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{\sin(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan(x^2)$$

Solution.

2 Applications de la notion de dérivabilité

2.1 Extrema

Définition 2.1 : Extremum : rappel

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in A$. On dit que f admet

- un **maximum global** sur A en x_0 lorsque

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq f(x_0),$$

on note alors $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$.

- un **maximum local** sur A en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in A \cap V, \quad f(x) \leq f(x_0),$$

- un **minimum global** sur A en x_0 lorsque

$$\forall x \in A, \quad f(x) \geq f(x_0),$$

on note alors $f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$.

- un **minimum local** sur A en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in A \cap V, \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Proposition 2.2 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

$$f \text{ admet un extremum local en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Démonstration. On suppose que f admet un maximum local en x_0 , le cas d'un minimum local étant entièrement symétrique. Cela signifie qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in I \cap V, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

On en déduit que $\forall x \in I \cap V, \quad f(x) - f(x_0) \leq 0$, puis que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ si } x < x_0 \quad \text{et} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ si } x > x_0.$$

Comme f est dérivable en x_0 , sa dérivée à gauche existe en x_0 et est égal à sa dérivée en x_0 . Par passage à la limite dans l'inégalité,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) \geq 0.$$

De même, pour la dérivée à droite, on obtient $f'_d(x_0) \leq 0$. Cela donne finalement $f'(x_0) = 0$. $\square$

Exemple 13. Cette condition est une condition nécessaire mais non suffisante : la dérivée de la fonction $x \mapsto x^3$ s'annule en 0 mais la fonction n'y admet pas d'extremum local.

De plus, si l'intervalle considéré n'est pas ouvert, le résultat de cette proposition tombe en défaut.

Exemple 14. On considère

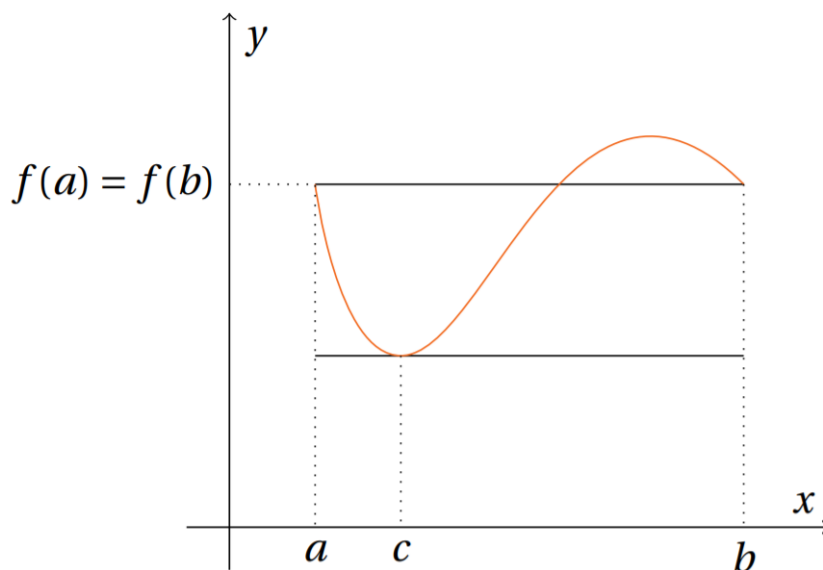
$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

f atteint son maximum en 1 et pourtant $f'(1) = 1 \neq 0$.

Quand on recherche les extrema locaux d'une fonction, la proposition 2.2 donne donc seulement les points candidats à être des extrema locaux (ceux où la dérivée s'annule et que l'on appelle des points critiques).

2.2 Théorème de Rolle

Si une fonction continue vérifie la condition $f(a) = f(b)$, on "observe" qu'elle possèdera au moins un extremum local entre a et b .



Théorème 2.3 : Théorème de Rolle

Soient $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Le réel c n'est pas nécessairement unique.

Démonstration. On raisonne par disjonction de cas.

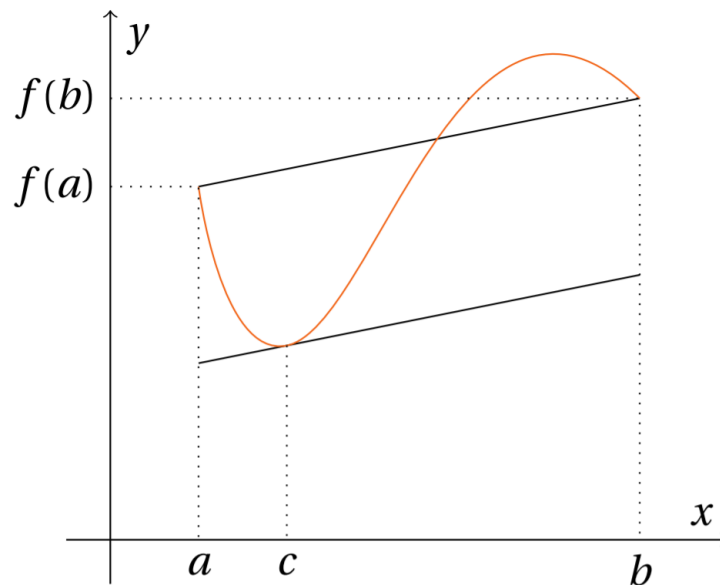
- Si f est constante sur $[a, b]$. Comme f est dérivable sur $]a, b[$, alors $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$. On en conclut qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

- Si f n'est pas constante sur $[a, b]$. Comme f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des bornes (voir chapitre Continuité), f atteint son maximum et son minimum sur $[a, b]$. Comme f n'est pas constante, au moins l'un des deux est différent de $f(a)$. Par exemple que $M > f(a)$ et soit $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. En considérant l'intervalle ouvert $]a, b[$, f est dérivable sur $]a, b[$ et admet un extremum local en c , ainsi d'après la proposition précédente 2.2, on obtient que

$$f'(c) = 0.$$

□

2.3 Théorème des accroissements finis**Théorème 2.4 : Théorème des accroissements finis**

Soient $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On considère la fonction auxiliaire

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right) \end{aligned}$$

On calcule

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0.$$

g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $g(a) = g(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à g et il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or pour tout $x \in]a, b[$,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ainsi

$$g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{donc} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Corollaire 2.5 : *Inégalité des accroissements finis*

Soit f une fonction dérivable sur I . S'il existe un réel positif k tel que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k,$$

alors

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ (le cas $a = b$ n'a pas d'intérêt). f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Ainsi d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Comme $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$, on obtient alors en $c \in I$

$$|f'(c)| = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq k \quad \text{donc} \quad |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

□

Théorème 2.6 : *Application aux suites récurrentes (hors programme)*

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et l un point fixe de f appartenant à I . Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 \in I$ donné et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

S'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k < 1,$$

alors (u_n) converge vers l .

Démonstration. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k |u_n - l|.$$

Ainsi par une récurrence facile,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|.$$

Comme $k \in]0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$. D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0.$$

(u_n) converge bien vers l .

□

Exemple 15. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et préciser sa valeur.

2. Montrer que

$$f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

3. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1.$$

4. Montrer que pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

5. Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Solution.

2.4 Dérivée et variations

Théorème 2.7 : Lien entre dérivée et monotonie

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

(i) $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ est croissante sur I .

(ii) $\forall x \in I, \quad f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ est décroissante sur I .

(iii) $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ est constante sur I .

Démonstration. On montre uniquement (i), la démonstration pour (ii) est alors totalement symétrique et (iii) est une conséquence de (i) et (ii).

Pour montrer (i), on raisonne par double implication.

$\Leftarrow$ On suppose que f est croissante sur I . Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \neq y$. Comme f est croissante, $f(y) - f(x)$ est du même signe que $y - x$. Ainsi

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Comme f est dérivable en tout $x \in I$,

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) \geq 0.$$

Par conséquent, $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$.

$\Rightarrow$ On suppose que f' est positive sur I . Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Ainsi, comme $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$,

$$f'(c) (y - x) = f(y) - f(x) \geq 0 \quad \text{donc} \quad f(y) \geq f(x).$$

On en conclut que f est croissante sur I . □

Exemple 16. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Solution.

Théorème 2.8 : Lien entre dérivée et stricte monotonie

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- (i) $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I .
- (ii) $\forall x \in I, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I .

Démonstration. On montre (i). On suppose que $\forall x \in I, f'(x) > 0$. Par le théorème précédent, cela signifie que f est croissante. On raisonne par l'absurde : si f n'est pas strictement croissante, alors cela signifie qu'il existe a et b dans I tels que

$$a < b \quad \text{et} \quad f(a) = f(b).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[\subset I$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Ce qui est absurde car $\forall x \in I, f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante.

La proposition (ii) se montre de manière analogue. □

Remarque 2.9 : Lien entre dérivée et stricte monotonie

Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I , alors f est strictement croissante sur I (idem pour la décroissance).

Exemple 17. La fonction définie par $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 3x^2$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0$ et pourtant $f'(0) = 0$.

2.5 Théorème de prolongement de la dérivée**Théorème 2.10 : Théorème de prolongement de la dérivée**

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l.$$

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$. De plus, f' est continue en x_0 .

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$. f est continue sur $[x_0, x]$ (si $x_0 < x$, sinon on considère $[x, x_0]$) et dérivable sur $]x_0, x[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis et il existe alors $c_x \in]x_0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow x_0} c_x = x_0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(c_x) = l.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l.$$

f est donc dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$. Comme $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$, f' est continue en x_0 . □

Corollaire 2.11 : *Théorème de prolongement de la dérivée (version C^1)*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I , de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$ et que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l.$$

Alors f est de classe C^1 sur I et $f'(x_0) = l$.

Exemple 18. Soit f définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Montrer que f est prolongeable en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$.

Solution.