

Contenus du Cours

Chapitre 1 : Fonctions numériques à une variable

- ✚ Généralités (définition d'une fonction, domaine de définition d'une fonction, exemples de fonctions, fonctions particulières)
- ✚ Continuité et dérivation
- ✚ Quelques applications de la dérivée en économie
- ✚ Elasticité
- ✚ Optimisation d'une fonction
- ✚ Les fonctions économiques
- ✚ Rappels sur les intégrales
- ✚ Applications économiques des intégrales

Chapitre 2 : Fonctions numériques à plusieurs variables

- ✚ Généralités
- ✚ Exemples de fonctions numériques à plusieurs variables en économie
- ✚ Dérivées partielles et applications en économie
- ✚ Optimisation

Chapitre 1

Les fonctions Numériques à une variable réelle

I. Généralités

1. Définitions et exemples

On définit une fonction f comme une relation numérique telle qu'à chaque réel x , soit associée au plus une image notée $f(x)$

En d'autres termes si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Alors f est une fonction de A dans B si à tout élément de $x \in A$ correspond au plus un $f(x) \in B$.

On note :

$$f : A \rightarrow B$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

Exemples de fonctions

Comme exemples de fonctions on peut citer :

- ✚ Les fonctions usuelles : les fonctions logarithmes, les fonctions exponentielles, les fonctions trigonométriques etc.....
- ✚ Les fonctions polynômes
- ✚ Les fonctions rationnelles etc....

2. Domaine de définition d'une fonction

L'ensemble des réels admettant une image par f constitue le domaine de définition de la fonction f notée $D_f : D_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe}\}$

Exemples

En économie comme exemples de fonctions on peut citer :

- ✚ La fonction de demande $D(p)$ qui dépend de la seule variable p qui est le prix
- ✚ La fonction de consommation $C(R)$ qui dépend d'une seule variable R $R = \text{revenu}$
- ✚ La fonction d'épargne $E(R)$
- ✚ La fonction profit $B(q)$ d'une entreprise qui dépend de la quantité q produite
- ✚ La fonction de production $Y = F(K, L)$ qui dépend de deux facteurs $K = \text{capital}$ et

$$L = \text{travail}$$

Cette fonction est une fonction numérique à deux variables.

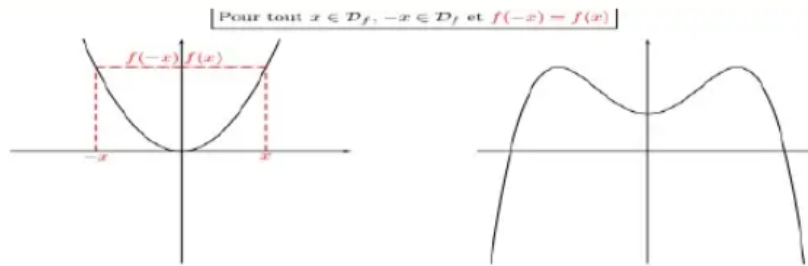
3. Quelques fonctions particulières utiles

Comme fonctions particulières on peut citer :

Fonction paire

Une fonction d'ensemble de définition D_f est dite paire :

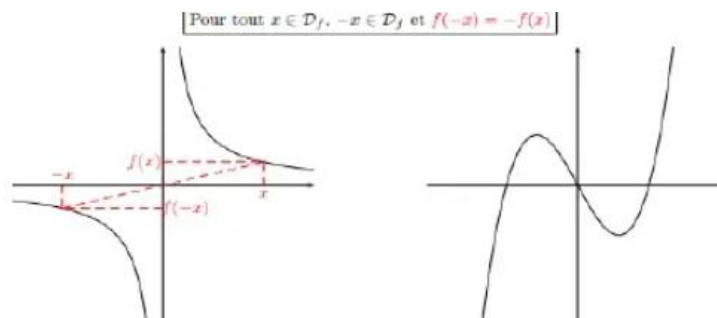
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \text{et } f(-x) = f(x) \end{cases}$$



Fonction impaire

Une fonction d'ensemble de définition D_f est dite impaire :

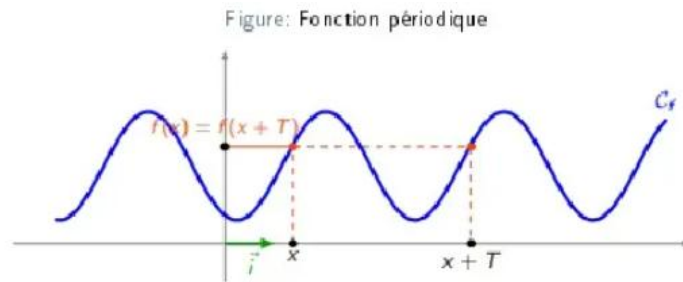
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \text{et } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$



Fonction périodique

Une fonction d'ensemble de définition D_f est dite périodique de période T :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, x+T \in D_f \\ \text{et } f(x+T) = f(x) \end{cases}$$



II. Continuité et dérivation de fonctions numériques

Définition On dit que la fonction f admet au point x_0 la limite l et on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$

si x devient très proche de x_0 , la fonction $f(x)$ devient très proche de l .

- ✚ Si $l \in \mathbb{R}$ alors on dit que f admet une limite en x_0 ,
- ✚ Si $l = \pm\infty$ alors on dit que f n'admet pas de limite en x_0
- ✚ Les notations $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ sont appelées respectivement limite à droite et limite à gauche de la fonction f
- ✚ Donc une fonction f admet une limite en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ (l finie)

Remarques

- ✚ Limites des fonctions polynômes à l'infini
- ✚ Limites des fonctions rationnelles à l'infini
- ✚ Les formes indéterminées: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 1^\infty$ etc.....

1. Continuité

Une fonction $f(x)$ est dite continue en $x = a$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites simultanément :

- ✚ $f(a)$ est défini
- ✚ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- ✚ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

En d'autres termes une fonction f est dite continue en $a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in D_f \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{cases}$

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto x^n$ pour n entier supérieur ou égal à 1 sont continues sur $\mathbb{R}$. Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $[0, +\infty[$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ pour n entier supérieur ou égal à 1 sont continues sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Proposition

La somme et le produit de fonctions continues en a sont des fonctions continues en a .

Si f est une fonction continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en a .

Si f est une fonction continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

Soit f une fonction réelle de variable réelle définie sur un intervalle I . On dit que f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout $x \in I$.

Prolongement par continuité

Soit f définie sur un intervalle I privé d'un point a et continue sur $I - \{a\}$.

Si on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors on dit que f est prolongeable par continuité en a . Il existe une unique fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I - \{a\} \\ l & \text{si } x = a \end{cases} \text{ et appelée prolongement par continuité de } f \text{ en } a$$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^3 + 5x + 6}{x^3 + 1}$

Montrer que cette fonction est prolongeable par continuité en $x_0 = -1$ et écrire le prolongement de cette fonction en ce point.

2. Dérivées d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

La fonction f est dite dérivable en x_0 si seulement s'il existe un nombre réel noté $f'(x_0)$ tel

que: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est fini

La fonction f est dite dérivable sur un intervalle I si seulement si f est dérivable en tout point de I .

La fonction notée f' et on a :

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ est alors la dérivée de } f \text{ sur } I.$$

Exemple

Si $f(x) = 2x^2 + 1$. On veut déterminer la fonction dérivée de f . On a :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h) = 4x$$

Sous réserve d'existence on définit la dérivée seconde de f :

$$f'' = (f')'.$$

De façon générale on définit sous réserve d'existence la dérivée n^{ieme} de f par :

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \text{ si } n \in \mathbb{N}^*$$

Notation

$$f^{(n)} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \text{ et } f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = (f')', f^{(3)} = (f'')', f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \Leftrightarrow f$ est au moins n fois dérivable sur I .

On définit aussi la dérivée à droite de x_0 : $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ sous réserve d'existence

de cette limite f est dite dérivable en x_0 .

f est dite dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie

Donc une fonction f est dite dérivable en $x_0 \in]a, b[$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ est finie}$$

$$f \text{ est dite dérivable sur } [a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ f \text{ dérivable en } a^+ \\ f \text{ dérivable en } b^- \end{cases}$$

Quelques dérivées de fonctions usuelles

Nous retiendrons le tableau ci-dessous :

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = \cotan x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cotan^2 x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 < x < 1)$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 < x < 1)$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$f(x) = \operatorname{arccot} \tan x \qquad f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$1) \quad (u+v)' = u' + v'$$

$$2) \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$3) \quad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$4) \quad (\lambda u)' = \lambda u'$$

$$5) \quad (u^n)' = nu' u^{n-1}$$

$$6) \quad (uov)' = u'[v] \times v'$$

$$7) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ et } \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

$$8) \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$9) \quad (e^u)' = u' e^u$$

$$10) \quad (a^u)' = (\ln a) a^u \times u'$$

$$11) \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$12) \quad (\log_a u)' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{u'}{u}$$

$$13) \quad (\cos u)' = -u' \sin u \text{ et } (\sin u)' = u' \cos u$$

$$14) \quad (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} \text{ et } (\cotan u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$$

$$15) \quad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \text{ et } (\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$16) \quad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} \text{ et } (\operatorname{arc cotan} u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

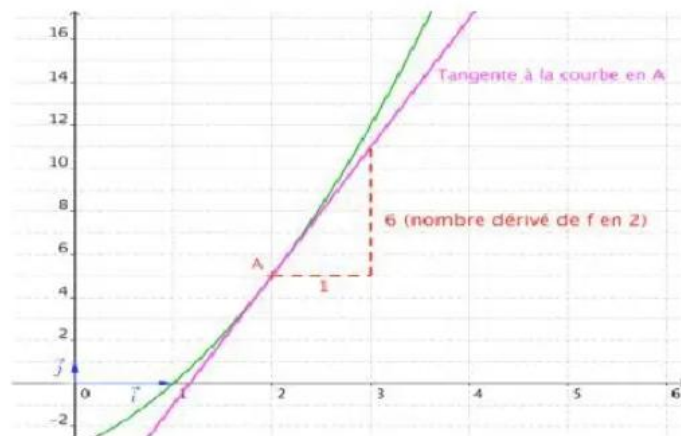
Remarque : Si u, v, w sont trois fonctions dérivables sur un intervalle I , $f = uvw$ est dérivable sur I et $f' = u'vw + uv'w + uvw'$

Interprétation du nombre dérivé d'une fonction en un point x_0

Si $y = f(x)$ est dérivable en x_0 alors $m = f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente au graphe de $y = f(x)$ au point M_0 d'abscisse x_0 .

L'équation de la tangente à la courbe (C_f) de la fonction f en x_0 est :

$$(D): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Exemple

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (On déterminera dans un premier temps le domaine de définition de la fonction avant tout calcul)

Dérivées d'ordre supérieur

Nous savons que la dérivée $f'(x)$ de la fonction $y = f(x)$ est aussi une fonction en x . En la dérivant nous obtenons une nouvelle fonction qui est la dérivée seconde ou celle du 2ème ordre de la fonction initiale $y = f(x)$. On désigne par y'' et $y'' = f''(x) = [f'(x)]'$

Par dérivation successive on peut obtenir la dérivée de n'importe quel ordre n notée

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

Exemples

Calculer les dérivées d'ordre 1 et 2 de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 6x + 4$$

$$R(p) = 1500(p) \left(e^{-\frac{p}{100}} \right)$$

$$g(x) = (1+x^2)^3$$

Les différentielles

Soit $y = f(x)$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable, la différentielle d'ordre 1 de f en $x \in I$ est définie par $dy = df(x)$ et

$$dy = df(x) = y' dx = f'(x) dx$$

$$\text{On a : } dy = df(x) = y' dx = f'(x) dx \Leftrightarrow y' = \frac{df(x)}{dx}$$

De manière analogue on définit les notions de différentielles d'ordre 2, 3, 4 etc....

$$\text{La différentielle d'ordre 2 de } y = f(x) \text{ est : } d^2y = d(dy) = d(df(x)) = f''(x)(dx)^2$$

$$\text{La différentielle d'ordre 3 de } y = f(x) \text{ est : } d^3y = d(d^2y) = d(d^2f(x)) = f'''(x)(dx)^3$$

De proche en proche la différentielle d'ordre n de $y = f(x)$ est :

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Exemple

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

Calculer la différentielle d'ordre 1 et 2 de f au point $x_0 = 0$.

En déduire cette différentielle pour $dx = 0.2$.

Optimisation d'une fonction, Concavité et convexité d'une fonction

Extremums d'une fonction

Soit une fonction $y = f(x)$ définie sur un intervalle contenant x_0 . On dit que $y = f(x)$

possède un minimum relatif au point $x = x_0$ si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x appartenant à un certain intervalle contenant x_0

De même $y = f(x)$ possède un maximum relatif au point $x = x_0$ si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x appartenant à un certain intervalle contenant x_0

On parle de minimum absolu en $x_0 \Leftrightarrow \forall x \in D_f, f(x) \geq f(x_0)$

On parle de maximum absolu en $x_0 \Leftrightarrow \forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$

Les maximas et les minimas d'une fonction s'appellent par définition les points extrêmes de cette fonction.

Connaissant l'expression explicite d'une fonction comment étudier les extrema de cette fonction?

Etapas d'Optimisation

- ✚ Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction f
- ✚ Déterminer les points critiques de la fonction : les points critiques sont solutions de l'équation : $f'(x) = 0$
- ✚ Calculer la fonction $f''(x)$
- ✚ Soit x_0 un point critique de la fonction f :
 - Si $f''(x_0) > 0$ alors la fonction f présente en x_0 un minimum
 - Si $f''(x_0) < 0$ alors la fonction f présente en x_0 un maximum
 - Si $f''(x_0) = 0$ alors la fonction f présente en x_0 un point d'inflexion

Exemple 1

Etudier les extrema des fonctions ci-dessous : $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

Exemple 2

Etudier les éventuels extrema locaux des fonctions : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Concavité et convexité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

✚ f est dite **convexe** sur $I \Leftrightarrow \forall x, y \in I$, et pour tout $\forall t \in [0, 1]$ on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Si f est **convexe** alors la courbe représentative de f est au-dessus de chacune de ses tangentes

Si f est convexe sur I alors on a : $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$

En conclusion on peut affirmer que f est convexe sur $I \Leftrightarrow f$ admet un minimum.

✚ f est dite **concave** sur $I \Leftrightarrow \forall x, y \in I$, et pour tout $\forall t \in [0, 1]$ on a :

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Si f est concave alors la courbe représentative de f est au-dessous de chacune de ses tangentes

Si f est concave sur I alors on a: $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$

En conclusion on peut affirmer que f est concave sur $I \Leftrightarrow f$ admet un maximum

Exemple

Etudier la convexité de chacune des fonctions suivantes: $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$, $h_1(x) = e^x$

Exercice

Etudier les éventuels extrema locaux des fonctions: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Une application de la dérivée en économie : maximisation du Profit total ou Bénéfice. Le profit total est donné par : $B(q) = R(q) - C(q)$

Où $R(q)$ est la recette totale de l'entreprise et $C(q)$ est le cout total de production.

Maximiser le profit total est de déterminer la quantité optimale à produire q^* qui maximise le profit ou bénéfice réalisé.

✚ On calcule $B'(q)$

✚ On résout $B'(q) = 0$

✚ Déterminer les quantités critiques q^*

✚ Si $B''(q^*) < 0$ alors q^* est la quantité optimale à produire.

Exemple 1

Soient $C(q)$ le coût total d'une firme, q la demande de son produit et p le prix de vente de ce

produit. Si $q = 100 - p$ et $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 7q^2 + 111q + 50$

Quel est le niveau q qui maximise le profit

Exemple 2

Si une entreprise vend q tonnes d'un produit, le prix P perçu par tonne est donnée par :

$P = 1000 - \frac{1}{3}q$. Le prix qu'elle doit payer par tonne est $P = 800 + \frac{1}{5}q$. De plus elle supporte

des couts de transport de 100 par tonne. Exprimer le profil B comme une fonction de q le nombre de tonnes vendues et déterminer la quantité qui rend ce profil maximal.

On suppose que le gouvernement impose une taxe sur le produit de cette entreprise de 10 par tonne. Ecrire la nouvelle expression du profil B et la nouvelle quantité qui rend ce profil maximal.

Taux de croissance

Le taux moyen de croissance entre deux points a et b ($a < b$) est : $\tau_f = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x$. Calculer le taux de croissance entre 100 et 150.

$$\tau_f = \frac{f(150) - f(100)}{f(100)} = \frac{150 - 100}{100} = \frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ soit } 50\%$$

Taux de croissance instantané

Le taux de croissance instantané d'une fonction f au point x est : $\tau_f^i = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Exemple

Calculer le taux de croissance instantané de la fonction $f(x) = e^x$

Elasticité

Soit f une fonction dérivable, on appelle élasticité de f au point x la quantité :

$$e_f(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$$

On peut aussi écrire l'élasticité sous la forme : $e_f(x) = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{f}{x}}$

Sous cette forme, on voit que l'élasticité mesure le rapport de l'accroissement relatif de $f = f(x)$ sur l'accroissement relatif de x .

$$\text{Elasticité Prix de la demande} = \frac{\text{Variation \% de la quantité demandée}}{\text{Variation \% du Prix}}$$

Exemple

La demande d'un produit varie en fonction du prix suivant la formule :

$$D(p) = -p^2 - 3p + 100$$

On a $D'(p) = -2p - 3$. L'élasticité-prix de la demande en $p = 3$ vaut :

$$e_D(3) = 3 \frac{D'(3)}{D(3)} = \frac{3(-9)}{82} = -0.33$$

Ce qui signifie que lorsque le prix est égal à 3 et qu'il augmente de 1%, la demande va baisser de 0.33%

Exercice

Soit la fonction de demande $D(p) = 14 - 2p$. Calculer l'élasticité au point $p = 4$. Pour une augmentation de 10% du prix calculer la variation de la demande. Et pour une diminution de 8% du prix, quelle est la variation de la demande?

Indication de solution

L'élasticité au point $p = 4$: $D(p) = 14 - 2p$.

$$e_D(p) = p \frac{D'(p)}{D(p)} = p \frac{(-2)}{14 - 2p} \Rightarrow e_D(4) = 4 \times \frac{(-2)}{14 - 2 \times 4} = -\frac{8}{6} = -1.33 < 0$$

Interprétation économique du résultat : Si le prix augmente de 1% à partir de 4 alors la demande diminue de 1.33%

Pour une variation de 10% du prix on a :

$$\frac{\%D(p)}{\%P} = -1.33 \Rightarrow \%D(p) = -1.33 \times \%P = -1.33 \times 10\% = -13.3\%$$

Donc si le prix augmente de 10% alors la demande baisse de 13.30%.

Pour une diminution de 8% du prix on a :

$$\frac{\%D(p)}{\%P} = -1.33 \Rightarrow \%D(p) = -1.33 \times \%P = -1.33 \times (-8\%) = 10.64\%$$

Donc si le prix diminue de 8% alors la demande augmente de 10.64%

Rappels sur les Intégrales

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$.

On appelle intégrale définie de $f(x)$ sur $[a, b]$ l'expression $\int_a^b f(x) dx$ et

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Les fonctions économiques

1. Les fonctions couts

Cout total de production

La production d'une quantité d'un certain produit entraîne dans les entreprises une série de dépenses telles que : les salaires, les matières premières, les frais d'entretien et les frais généraux. La somme de ces dépenses est appelée cout total de production. Dans ce cout total interviennent

- ✚ Les **couts variables** qui dépendent de la quantité produite : matières premières, achat de machines, embauche de personnel, . . .
- ✚ Les **couts fixes** qui ne dépendent pas de la quantité produite : location de locaux, publicités, assurances, . . .

Le cout total de production peut être modélisé par une fonction numérique définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Pour tout réel q de l'intervalle $[0, +\infty[$ et on a donc :

$$C_T(q) = C_V(q) + C_T(0)$$

Où q désigne la quantité produite, $C_V(q)$ correspond aux couts variables de production et

$C_T(0)$ correspond aux couts fixes (ils ne dépendent pas de q)

Exemple

Dans une imprimerie, l'impression et la reliure de livres entraîne des frais fixes de 650 Euros et 4.5 Euros de frais par livre fabriqué. Soit q le nombre de livres fabriqués. Le cout total vaut alors : $C_T(q) = 4.5q + 650$.

C_T est une fonction strictement croissante et strictement positive sur $[0, +\infty[$

Cout marginal de production

Lorsque l'entreprise fabrique q unités, elle a besoin de savoir combien lui coûterait la production d'une unité supplémentaire. Le cout de production de cette $q + 1$ - ième unité lorsque l'entreprise en a déjà produit q est le cout marginal $C_{ma}(q)$.

Exemple

Le cout total de production d'une marchandise particulière est $C_T(q) = 150 + 200q - 0.01q^2$.

Le cout total de production de 100 unités est de $C_T(100) = 20050$ et celui d'une unité

supplémentaire est de $C_T(101) = 20247.99$. Le cout marginal au rang 100 est de :

$$C_{ma}(100) = C_T(101) - C_T(100) = 197.99$$

Les économistes considèrent que sous certaines conditions, la dérivée du cout total est une bonne approximation du cout marginal : $C_{ma}(q) = C'_T(q)$

Cout moyen de production

Pour q unités produites, le cout moyen de production est le quotient du cout total de production par le nombre d'unités produites. On peut alors définir sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction cout moyen de production notée C_m par :

$$C_m(q) = \frac{C_T(q)}{q}$$

Exemple

Les couts de production d'une entreprise exprimer en milliers d'euros se répartissent de la manière suivante : les couts fixes : 12 et les couts variables ou proportionnels :

$$3q^3 - 9q^2 + 18q. \text{ Calculer le cout total de production et en déduire le cout moyen.}$$

Le cout total de production est : $C_T(q) = 3q^3 - 9q^2 + 18q + 12$

$$\text{Le cout moyen est alors : } C_m(q) = \frac{3q^3 - 9q^2 + 18q + 12}{q} = 3q^2 - 9q + 18 + \frac{12}{q}$$

Pour obtenir le cout moyen pour un certain nombre d'unités, il suffit de remplacer dans cette expression la valeur de q par celle correspondante. Par exemple, le cout moyen de production

$$\text{pour 10 unités vaut : } C_m(10) = 3(10)^2 - 9(10) + 18 + \frac{12}{10} = \frac{2292}{10} = 229.2 \text{ euros}$$

Remarque

Le cout moyen et le cout marginal sont des couts unitaires.

La recette et le bénéfice total (Ou revenu total)

Si l'entreprise vend une unité de produit p (en unités d'euros), la recette pour q unités est de :

$$R(q) = pq$$

✦ Le bénéfice réalisé est alors : $B(q) = R(q) - C_T(q)$

Exemple

Le cout total est donné en milliers d'euros par : $C_T(q) = q^3 - 3q^2 + 10.48q$

L'entreprise vend 11.8 milliers d'euros l'unité. Le bénéfice réalisé vaut alors :

$$B(q) = R(q) - C_T(q) = 11.8q - (q^3 - 3q^2 + 10.48q) = -q^3 + 3q^2 + 1.32q$$

✚ Le revenu marginal est égal à la première dérivée par rapport à q du revenu total :

$$RM_a(q) = \frac{dR(q)}{dq}$$

✚ Minimisation du cout moyen de production

Le problème posé est de déterminer la quantité optimale à produire q^* en vue de minimiser le cout moyen de production.

Proposition

Le minimum du cout moyen de production correspond à une quantité produite q^* pour laquelle le cout moyen est égal au cout marginal c'est à dire : $C_{ma}(q^*) = C_m(q^*)$

Remarque

On remarque que la courbe du cout marginal coupe celle du cout moyen au minimum du cout moyen. Donc la quantité qui minimise le cout moyen est telle que le cout moyen est égal au cout marginal

✚ Maximisation du profit total

Il s'agit de déterminer la quantité optimale à produire q^* qui maximise le profit ou bénéfice réalisé.

Proposition: Le maximum du profit ou bénéfice total correspond produite q^* pour laquelle la recette marginale est égale au cout marginal: $R_{ma}(q^*) = C_{ma}(q^*)$. La condition suffisante est : $B''(q) \leq 0$

Le profit est maximum quand le revenu marginal est égal au cout marginal et le profit total est l'intégrale du revenu marginal moins le cout marginal de la quantité 0 à la quantité pour laquelle le profit est maximum

Application

1. Le cout marginal C_{MA} est donné par : $C_{ma}(x) = 1.64 - 0.05x$

Trouver les fonctions du cout total et du cout moyen quand le cout fixe est égal à 10.3.

2. Trouver la quantité qui maximise le profit et calculer le profit total en ce point si les fonctions de revenu marginal et cout marginal sont données par : $R_{ma}(x) = 25 - 5x - 2x^2$,
 $C_{ma}(x) = 15 - 2x - x^2$

Indication de solution

1. Cout total : $C_T(x) = \int c_{ma}(x) dx + C_f = \int (1.64 - 0.05x) dx + 10.3$
2. $C_{ma}(x) = R_{ma}(x) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Seul $x_2 = 2$ a un sens économiquement parlant.

La dérivée première de la fonction $(R_{ma} - C_{ma})(x)$ est la dérivée seconde du profit total $(B_T)(x)$ et son signe nous indique si le profit est un maximum ou un minimum pour une valeur particulière de x .

$$\frac{d}{dx}(R_{ma} - C_{ma})(x) = \frac{d^2 B_T(x)}{dx^2} = -3 - 2x$$

Et avec $x = 2$ $\frac{d^2 B_T}{dx^2} = -7 < 0$

Donc le profit est maximum pour $x = 2$ et le profit maximum est :

$$B_T(2) = \int_0^2 (R_{ma} - C_{ma})(x) dx = \frac{34}{3}$$

Exercice 1

Un fabricant de pièces métalliques réalise une production annuelle de q unités pour un cout total de production C_T défini par $C_T(q) = q^3 - 12q^2 + 48q$

1. Déterminer le cout moyen.
2. Déterminer le cout marginal.
3. Déterminer le cout moyen minimal.
4. On suppose que le prix de vente unitaire est $p = 36$. Déterminer le bénéfice.

Définir la production qui optimise le bénéfice.

Les fonctions d'offre et de demande

Le vendeur est offreur alors que le consommateur est demandeur.

✚ La demande

La quantité d'un produit qu'un consommateur achètera est fonction du prix de ce produit. En général, la quantité demandée est d'autant plus grande que le prix du produit est plus bas. Cette demande est d'ailleurs fonction d'autres facteurs, par exemple, le revenu du consommateur.

On notera la demande $D(p)$. D est une fonction décroissante du prix p .

✚ L'offre : le vendeur qui cherche à maximiser son profit est d'autant plus disposé à vendre que le prix du produit est élevé. La quantité offerte, fonction du prix du produit, est donc d'autant plus grande que le prix du produit est plus élevé. On notera $O(p)$ l'offre, O est une fonction croissante du prix p .

Le marché est le lieu de rencontre où les offres des vendeurs rencontrent les demandes des acheteurs qui s'ajustent à un certain prix.

Le prix d'équilibre est celui où les quantités offertes et demandées sont égales : $D(p) = O(p)$

Exemple

Les fonctions d'offre et de demande d'un bien B sont données par $O(p) = 2p$ et

$D(p) = 35 - 3p$, où p est exprimé en euros.

L'équilibre est obtenu lorsque $D(p) = O(p)$. On pose donc $35 - 3p = 2p \Leftrightarrow p = 7$

Le prix d'équilibre est $p_0 = 7$ Euros, la quantité d'équilibre est $q_0 = D(p_0) = O(p_0) = 14$. Au prix de 7 Euros, 14 unités seront échangées.

Une autre application des dérivées: Formule de Taylor Young

Objet : Ici les principaux objectifs de cette partie sont entre autres :

- Lever les formes indéterminées dans les calculs de limites très compliquées
- Etudier la position relative de la courbe d'une fonction par rapport à une de ses tangentes

Soit une fonction réelle f et est n fois dérivable dans $]a, b[$ et si x_0 un nombre réel de $]a, b[$ alors :

$$\forall x \in]a, b[, f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \xi(x-x_0)$$

Avec $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^n \xi(x - x_0) = 0$ appelé développement limité de f en x_0 d'ordre n . Si $x_0 = 0$

alors on a :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \xi(x)$$

Avec $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \xi(x) = 0$

Développement limité des fonctions élémentaires

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \xi(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^n \xi(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n \xi(x)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + x^n \xi(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \xi(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \xi(x)$$

Avec $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \xi(x) = 0$

Exercice d'application 1

Donner le développement limité d'ordre n de la fonction

$$f(x) = [\ln(1+x)]^2, n=3, x_0=0$$

Indication de solution

$$f(x) = [\ln(1+x)]^2, n=3, x_0=0$$

On sait que : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \xi(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \xi(x) = 0$ et $\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}$

D'où $f(x) = [\ln(1+x)]^2 = x^2 - x^3 + x^3 \xi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \xi(x) = 0$

Exercice d'application 2

En utilisant le développement limité d'ordre n en x_0 calculer les limites ci-dessous :

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$
3. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} = \frac{1}{2}$

Chapitre 2

Les fonctions numériques à plusieurs variables Cas de deux variables

L'étude de nombreux problèmes nous conduit souvent à envisager des relations entre plusieurs variables dans lesquelles les valeurs de l'une d'elles sont complètement définies par celles des autres. Par exemple l'aire d'un rectangle de côtés x et y dépend des deux variables x, y . Le volume du parallélépipède rectangle de dimensions x, y, z dépend des trois variables x, y et z : $V = xyz$

On est souvent amené à considérer simultanément plusieurs variables. Par exemple la moyenne de classe d'un étudiant est obtenue à partir des notes dans les différentes matières.

I. Généralités

1. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble dont les éléments sont les n -uplets de réels. Un élément de $\mathbb{R}^n$ est la donnée de n réels $x_1, \dots, x_n$. Cet élément est noté $x = (x_1, \dots, x_n)$. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. On peut définir :

La somme : $x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

La multiplication par un réel λ : $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

🌟 On appelle fonction numérique à plusieurs variables une fonction définie sur un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notation :

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

En économie la fonction de production définie par :

$$F(K, L) = aK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0 \text{ et } \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

est une fonction numérique à deux variables (le facteur Capital et le facteur travail).

Cette fonction est appelée la fonction de Cobb Douglas.

Dans ce chapitre nous étudierons uniquement les fonctions numériques à deux variables dans tout ce qui suit.

✚ Si à chaque couple (x, y) de valeurs de deux variables indépendantes x et y correspond une valeur bien déterminée de la variable dépendante z , on dit que z est une **fonction de deux variables** indépendantes x et y .

Une fonction de deux variables est notée $z = f(x, y)$.

Une fonction numérique à deux variables une fonction définie sur un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notation:

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$$

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas des fonctions de deux variables.

✚ On appelle domaine de définition de la fonction $z = f(x, y)$ l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels cette fonction est définie. On note par D le domaine de définition.

Le domaine de définition peut être représenté géométriquement par l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, i, j) .

Exemples

Quel est le domaine de définition de la fonction $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$?

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 9 \geq 0\}$$

2. Distance euclidienne

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ est appelée la distance euclidienne de x et y

II. Dérivées partielles et différentielles totales

Dérivées partielles

Considérons la fonction de deux variables $z = f(x, y)$.

✚ Si on considère y comme une constante, z n'est plus qu'une fonction de x et dont on peut calculer la dérivée de cette fonction par rapport à x si elle existe.

La dérivée obtenue dans ce cas est la dérivée partielle de la fonction par rapport à x que on

peut écrire de plusieurs façons : $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), f_x(x, y), f_x$ ou z_x ou f'_x

La dérivée partielle de f par rapport à x est définie ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x}$$

✚ De façon analogue on peut définir la dérivée partielle de f par rapport à y notée :

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \text{ ou } f_y(x, y) \text{ ou } f'_y :$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{\Delta_y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta_y) - f(x, y)}{\Delta_y} \text{ (Lorsqu'elle existe et est finie)}$$

Soit $z = f(x, y)$ une fonction numérique a deux variables

✚ $\Delta_x z = \Delta_x f = f(x + \Delta_x, y) - f(x, y)$ s'appelle accroissement partiel de la fonction par rapport à x .

$\Delta_y z = f(x, y + \Delta_y) - f(x, y)$ s'appelle accroissement partiel de la fonction par rapport à y .

La limite $\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta_x}$ (respectivement $\lim_{\Delta_y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta_y}$) si elle existe s'appelle dérivée partielle de

$z = f(x, y)$ par rapport à x (respectivement par rapport à y)

Exemple 1

Soit la fonction de deux variables $z = f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^2$. Calculer la dérivée partielle de cette fonction par rapport à x et la dérivée partielle de z par rapport à y .

$$\text{On a : } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y, \text{ la variable } y \text{ est considérée comme constante} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y, \text{ la variable } x \text{ est considérée comme constante} \end{cases}$$

Exemple 2

Soit $z = f(x, y) = 5x \ln(1 + 2y)$ la fonction. Calculer les dérivées partielles de cette fonction

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 5 \ln(1 + 2y) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{10x}{1 + 2y} \end{cases}$$

✚ En général les dérivées partielles d'une fonction $z = f(x, y)$ sont aussi des fonctions de x et y , on peut les dériver partiellement une seconde fois par rapport à x et par rapport à y .

On appelle ces nouvelles dérivées les secondes dérivées partielles de z et on les note :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = z_{xx} = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = z_{xy} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = z_{yy} = f''_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = z_{yx} = f''_{yx}$$

De ces quatre dérivées, seules trois sont distinctes puisque, si elles sont continues :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (\text{Théorème de Schwartz})$$

Exemple

Calculer les dérivées partielles de premier et second ordre de la fonction :

$$z = f(x, y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3$$

$$\text{Les dérivées partielles d'ordre 1} \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -4x + 3y^2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 3y^2 \end{cases}$$

Les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-4x + 3y^2) = -4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-4x + 3y^2) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (6xy - 3y^2) = 6x - 6y$$

2. Applications économiques des dérivées partielles

Ici nous allons voir deux applications économiques des dérivées partielles : le cout marginal et la productivité marginale.

Cout marginal

La fonction de cout de productions des quantités x et y de deux biens définis par :

$$C = Q(x, y)$$

Nous pouvons calculer les dérivées partielles de C par rapport à x et par rapport à y :

$$\frac{\partial C}{\partial x} : \text{Cout marginal par rapport à } x$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} : \text{Cout marginal par rapport à } y$$

Exemple

Si la fonction de cout conjointe pour produire des quantités x et y de deux biens est :

$$C(x, y) = 10 + x^2 + xy + 3y^2$$

$$\text{Le cout marginal par rapport à } x : \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} = 2x + y$$

$$\text{Le cout marginal par rapport à } y : \frac{\partial C}{\partial y} = x + 6y$$

Productivité marginale

Pour produire la plupart des biens, on a besoin d'au moins deux facteurs de production tels que le travail, le capital, la terre, les matériaux ou les machines. Une fonction de production $z = f(x, y)$ signifie qu'une quantité z d'un bien est fabriquée à l'aide des quantités x et y de deux facteurs de production. On peut alors calculer la dérivée partielle de z par rapport à x qui nous donne la productivité marginale de x et la dérivée partielle de z par rapport à y qui nous donne la productivité marginale de y .

Exemple

Si la fonction de production d'un bien est donnée par : $z = f(x, y) = 2xy - 3x^2 + y^2$

$$\text{La productivité marginale de } x \text{ est égale à } \frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 6x$$

$$\text{et la productivité marginale de } y \text{ est égale à } \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y$$

3. Différentielle totale

$$\color{blue}{\star} \text{ L'accroissement total d'une fonction } z = f(x, y) \text{ est : } \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

✚ La différentielle totale de $z = f(x, y)$ d'ordre 1 est :

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Exemple :

$$\text{Soit } z = f(x, y) = \frac{2xy - 4y}{x - y}$$

Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ et en déduire la différentielle totale de $z = f(x, y)$

✚ La différentielle totale de $z = f(x, y)$ d'ordre 2 est :

$$d^2z = d^2f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Exemple

$$\text{Soit } z = f(x, y) = 2x^2 - 3xy - y^2$$

La différentielle totale de $z = f(x, y)$ d'ordre 2 est : $d^2f(x, y) = 4dx^2 - 6dx dy + (-1)dy^2$

III. Fonctions homogènes

Coefficient de rendement et Formule d'Euler

✚ Fonctions homogènes

On dit que la fonction $z = f(x, y)$ est homogène de degré n si pour tout $t > 0$, on a :

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

1) Coefficient de rendement

Le degré d'homogénéité n est appelé le coefficient de rendement. Pour apprécier le rendement d'une fonction on compare n à 1 :

Si $n > 1$ alors le rendement est croissant,

Si $n < 1$ alors le rendement est décroissant

Si $n = 1$ alors le rendement est constant.

2) Formule d'Euler

Une fonction homogène dérivable de degré n satisfait la relation ci-dessous :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y) \text{ appelée la formule d'Euler.}$$

Exemple

Soit la fonction $z = f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x + y}$

- Montrer que cette fonction est homogène en précisant son degré
- Vérifier la relation d'Euler.
- Apprécier le rendement de la fonction.

IV. Gradient d'une fonction, Elasticité

✚ Gradient d'une fonction

On appelle gradient de la fonction $z = f(x, y)$, noter $grad f$ et $grad f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

✚ Soit $z = f(x, y)$ une fonction. L'élasticité de f par rapport à x notée $e_{f/x}$ $e_{f/x} = \frac{x}{f} \frac{\partial f}{\partial x}$ et

l'élasticité de f par rapport à y est $e_{f/y} = \frac{y}{f} \frac{\partial f}{\partial y}$

Exemple:

Soit $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^3$

Calculer le gradient de f et l'élasticité de f

V. Optimisation d'une fonction

Minima et maxima d'une fonction de deux variables

✚ Une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ présente au point $M_0(x_0, y_0)$ un maximum (respectivement un minimum) local s'il existe un voisinage de point M_0 sur lequel $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (respectivement $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$) pour tout point $M(x, y)$.

Les points en les quels une fonction présente un minimum ou un maximum local s'appellent points extremums locaux. De la définition il résulte que si la fonction $z = f(x, y)$ présente un extremum en M_0 alors son accroissement total $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ en M_0 satisfait dans un voisinage de M_0 l'une des conditions suivantes :

- $\Delta f < 0$ cas de maximum local
- $\Delta f > 0$ cas de minimum local

Inversement si l'une de ces inégalités a lieu au voisinage d'un point M_0 alors la fonction présente un extremum local en M_0

✚ Si $z = f(x, y)$ possède des dérivées partielles premières en un point $M_0(x_0, y_0)$ où elle présente un extremum alors les dérivées partielles premières en M_0 sont nulles :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Dans ce chapitre on étudiera les extremums libres (ou sans contraintes) et les extremums liés (ou avec contraintes).

Etude des extremums libres

Algorithme de recherche des extremums libres (Extremums sans contraintes)

On suit le plan ci-dessous :

— Calculer les dérivées partielles premières : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$

— Recherche des points critiques ou points stationnaires : Pour cela il suffit de résoudre le

$$\text{système: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

— Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point critique. Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Posons : $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)$, $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)$ et $\alpha^* = ac - b^2$

On distingue trois cas : $\alpha^* > 0$, $\alpha^* < 0$ et $\alpha^* = 0$

✚ Cas 1 : $\alpha^* > 0 \Rightarrow$ la fonction présente en M_0 un extremum :

$$\begin{cases} \alpha^* > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow M_0 \text{ est un minimum}$$

$$\begin{cases} \alpha^* > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow M_0 \text{ est un maximum}$$

✚ Cas 2: $\alpha^* < 0 \Rightarrow$ la fonction n'admet pas d'extremum en M_0 . Le point M_0 est appelé un point Col ou un point Selle

✚ Cas 3: $\alpha^* = 0$

Dans ce cas on ne peut rien conclure, il faut une étude approfondie. Il faut calculer l'accroissement total Δz de la fonction au point et étudier son signe :

- Si $\Delta z < 0$ alors M_0 est un maximum local
- Si $\Delta z > 0$ alors M_0 est un minimum local
- Si Δz est à la fois positif et négatif (Δz ne garde pas de signe constant) alors M_0 n'est pas extremum.

Exemple d'application 1

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par : $f(x, y) = x^2 + y^2 - (x - y)^4$.

Etudier les extrema de cette fonction

Indication de solution

- Dérivées partielles premières

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4(x - y)^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4(x - y)^3 \end{cases}$$

- Points critiques

$$\begin{cases} 2x - 4(x - y)^3 = 0 \\ 2y + 4(x - y)^3 = 0 \end{cases}$$

Et résolvant ce système on a 3 points critiques : $A(0, 0)$, $B\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

- Dérivées partielles secondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 12(x-y)^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12(x-y)^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - 12(x-y)^2 \end{cases}$$

▪ Nature des points critiques

Pour $A(0,0)$:

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 2, b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 0, c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 2 \text{ et } \alpha = ac - b^2 = 4$$

$\alpha = 4 > 0 \Rightarrow A$ est un extremum

De plus $\begin{cases} \alpha = 4 > 0 \\ a = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow A$ est un minimum local

Pour $B\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$:

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = -1, b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) = 3, c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) = -1 \text{ et } \alpha = 1 - 9 = -8$$

$\alpha = -8 < 0 \Rightarrow B$ est un point Col

Pour $C\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$:

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) = -1, b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(C) = 3, c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) = -1 \text{ et } \alpha = 1 - 9 = -8$$

$\alpha = -8 < 0 \Rightarrow C$ est un point Col

Exemple d'application 2

Soit la fonction $z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Etudier les extrema de cette fonction.

Calcul des dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 12$

Recherche des points critiques : $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$

La résolution de ce système donne 4 points critiques :

$$M_1(1, 2), M_2(2, 1), M_3(-1, -2), M_4(-2, -1)$$

Calcul des dérivées partielles secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$

Pour le point $M_1(1,2)$: $a = 6, b = 12, c = 6$

$\alpha^* = 36 - 144 = -108 < 0 \Rightarrow M_1$ est un point Selle

Pour le point $M_2(2,1)$

$a = 12, b = 6, c = 12, \alpha^* = 144 - 36 = 108 > 0 \Rightarrow M_2$ est un point extremum

On a : $\begin{cases} \alpha^* = 108 > 0 \\ a = 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow M_2$ est un minimum local

Ainsi de suite.....

Exemple d'application 3

Soit la fonction $z = f(x, y) = x^4 + y^4$. Etudier les extrema de cette fonction.

Calcul des dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3$

Recherche des points critiques : $\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

L'unique point critique est le point $M_0(0,0)$

$a = 0, b = 0, c = 0, \alpha^* = 0$, on ne peut rien conclure. Il faut calculer l'accroissement total Δz de la fonction au point et étudier son signe

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) - f(x_0, y_0) = f(0 + \Delta_x, 0 + \Delta_y) - f(0, 0) = (\Delta_x)^4 + (\Delta_y)^4 > 0$$

$\Rightarrow M_0(0,0)$ est un minimum

Exemple d'application 4

Etudier les extrema des fonctions ci-dessous :

1. $z = f(x, y) = x^3 + y^3$
2. $z = f(x, y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$
3. $z = f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$

Etude des extremums liés

Dans de nombreuses applications pratiques de maximisation ou de minimisation, le problème est de maximiser ou minimiser une fonction donnée sous certaines conditions ou contraintes sur les variables.

La méthode étudiée ci-après est applicable à n'importe quel nombre de variables et de contraintes. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est employée pour obtenir un maximum ou un minimum d'une fonction soumise à des contraintes d'égalité.

Soit $z = f(x, y)$ la fonction objective qui doit être maximiser ou minimiser sous la contrainte $\varphi(x, y) = 0$.

L'équation $\varphi(x, y) = 0$ est appelée équation de liaison.

Algorithme de recherche des extremums liés (Extremums avec contraintes)

— Former une fonction auxiliaire appelée un lagrangien : $F(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

λ est le multiplicateur de Lagrange.

— Calculer les dérivées partielles premières de $F : \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$

— Recherche des points critiques :
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

— Soit $M_0(x_0, y_0; \lambda)$ un point critique (solution du système ci-dessus)

On calcule $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ au point M_0

Calculer $\alpha = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2$ au point M_0

Si $\alpha > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M_0) < 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M_0) < 0$ alors M_0 est un maximum

Si $\alpha > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M_0) > 0$ alors M_0 est un minimum

Si $\alpha \leq 0$ alors le test échoue, il faut examiner la fonction au voisinage de x et y .

Pour la nature des points critiques on peut aussi calculer :

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \text{ au point } M_0 \text{ avec la condition que } dx \text{ et } dy$$

sont liées entre elles par l'équation : $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$ et $dx^2 + dy^2 \neq 0$

$$d^2F(M_0) < 0 \Rightarrow M_0 \text{ est un maximum lié de la fonction } z = f(x, y)$$

$$d^2F(M_0) > 0 \Rightarrow M_0 \text{ est un minimum lié de la fonction } z = f(x, y)$$

Exemple 1 :

Soit $z = f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ une fonction numérique a deux variables x et y liées par la relation : $x^2 + y^2 = 1$. Etudier les extremums de cette fonction.

Indication de solution

— Le lagrangien : $F(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

— Calcul des dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -4 + 2x\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -3 + 2y\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

— Recherche des points critiques :
$$\begin{cases} -4 + 2x\lambda = 0 & (1) \\ -3 + 2y\lambda = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \lambda = \frac{2}{x}$$

$$(2) \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2y}$$

$$\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \lambda = \frac{2}{x} \\ (2) \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2y} \end{array} \left| \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{3}{2y} \Rightarrow x = \frac{4y}{3} \right.$$

Et remplaçons x par sa valeur dans (3) on a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \\ x = \frac{4y}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{14y^2}{9} + y^2 = 1 \Leftrightarrow 25y^2 = 9$$

$$25y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow y = \frac{3}{5} \text{ ou } y = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Pour } y = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5} \text{ et } \lambda = \frac{5}{2}$$

$$\text{Pour } y = -\frac{3}{5} \Rightarrow x = -\frac{4}{5} \text{ et } \lambda = -\frac{5}{2}$$

Les points $M_0\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}; \frac{5}{2}\right)$ et $M_1\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}; -\frac{5}{2}\right)$ sont les points critiques de la fonction.

Nature de chacun de ces points :

$$\text{Pour } M_0\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}; \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$$

$$\alpha = \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 = 5 \times 5 - 0 = 25$$

On a $\alpha = 25 > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M_0) = 5 > 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M_0) = 5 > 0$ alors M_0 est un minimum lié

$$\text{Pour } M_1\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}; -\frac{5}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 = (-5) \times (-5) - 0 = 25$$

On a $\alpha = 25 > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M_0) = -5 < 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M_0) = -5 < 0$ alors M_0 est un maximum lié

$$\text{On a : } \begin{cases} z_{\min}(M_0) = 1 \\ z_{\max}(M_1) = 11 \end{cases}$$

Exemple 2

Déterminer les minima et maxima de la fonction objectif $z = f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ sous la contrainte $x + 2y = 24$.

— Pour cela, construisons la fonction de Lagrange :

$$F(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy + \lambda(x + 2y - 24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 10x - y + \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 12y - x + 2\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = x + 2y - 24$$

$$\text{— Recherche des points critiques : } \begin{cases} 10x - y + \lambda = 0 & (1) \\ 12y - x + 2\lambda = 0 & (2) \\ x + 2y - 24 = 0 & (3) \end{cases}$$

De ce système on trouve l'unique point critique $A(6, 9)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 10, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 12$$

$$\alpha = \frac{\partial^2 F(A)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F(A)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F(A)}{\partial x \partial y} \right)^2 = (10) \times (12) - 1 = 119$$

$$\alpha = 119 > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(A) = 10 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(A) = 12 > 0 \text{ alors } A \text{ est un minimum lié}$$

VI. Applications économiques des multiplicateurs de Lagrange

Il y a beaucoup d'applications économiques des minima et maxima sous contraintes.

Par exemple :

- Si un producteur fabrique deux biens, il peut vouloir minimiser le cout total tout en devant fabriquer une quantité totale minimale spécifiée ;
- Une compagnie peut désirer maximiser ses ventes résultant de deux publicités effectuées, tout en observant la contrainte du budget de publicité ;
- Un consommateur peut vouloir maximiser sa fonction d'utilité provenant de la consommation de certains biens, tout en étant restreint par son budget.

Exemple 1

Un consommateur dépense son revenu de 48 francs pour l'achat de deux biens x et y . Les prix de x et de y sont respectivement 2 francs et 3 francs. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par la formule :

$$u(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy$$

Combien d'utilités du bien x et du bien y doit-il consommer pour maximiser son utilité ?

Indication de solution

La fonction objective à maximiser est $u(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy$. La contrainte est

$$2x + 3y = 48$$

La fonction auxiliaire est :

$$U(x, y; \lambda) = u(x, y) + \lambda \varphi_u(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy + \lambda(2x + 3y - 48)$$

Dérivées partielles

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi_u}{\partial x} = -2x + 2y + 2\lambda$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi_u}{\partial y} = -4y + 2x + 3\lambda$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \varphi_u(x, y) = 2x + 3y - 48$$

$$\text{Points critiques : } \begin{cases} -2x + 2y + 2\lambda = 0 & (1) \\ -4y + 2x + 3\lambda = 0 & (2) \\ 2x + 3y - 48 = 0 & (3) \end{cases}$$

Et en résolvant ce système on trouve : $x = \frac{336}{29}$ et $y = \frac{240}{29} \left(B \left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29} \right) \right)$

On calcule à présent de calculer les dérivées partielles d'ordre afin

de déterminer la nature de ce point critique : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -2, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 2, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -4$

$$\alpha = \frac{\partial^2 U(B)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U(B)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U(B)}{\partial x \partial y} \right)^2 = (-2) \times (-4) - 4 = 4$$

$\alpha = 4 > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B) = -2 < 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(B) = -4 < 0$ alors B est un maximum lié

Exemple 2

Une firme fabrique des avions qu'elle vend sur deux marchés étrangers. On désigne par q_1 le nombre d'avions vendus sur le 1^{er} marché au prix unitaire $p_1 = 60 - 2q_1$ et q_2 le nombre d'avions vendus sur le 2^{er} marché au prix unitaire $p_2 = 80 - 4q_2$. On pose $q_1 + q_2 = q$ le nombre total d'avions vendus. La fonction du Coût total de la firme est : $C = 50 + 40q$

a. Donner l'expression explicite de la fonction Coût total de fabrication de la firme.

$$C(q_1, q_2) = 50 + 40(q_1 + q_2) = 40q_1 + 40q_2 + 50$$

b. Calculer la recette totale de la firme.

$$\begin{aligned} R(q_1, q_2) &= p_1 q_1 + p_2 q_2 = (60 - 2q_1)q_1 + (80 - 4q_2)q_2 \\ &= -2q_1^2 - 4q_2^2 + 60q_1 + 80q_2 \end{aligned}$$

c. Calculer la fonction bénéfice total ou Profit total de la firme.

$$\begin{aligned} B(q_1, q_2) &= R(q_1, q_2) - C(q_1, q_2) \\ &= -2q_1^2 - 4q_2^2 + 60q_1 + 80q_2 - 40q_1 - 40q_2 - 50 \\ &= -2q_1^2 - 4q_2^2 + 20q_1 + 40q_2 - 50 \end{aligned}$$

d. Trouver les quantités optimales de q_1 et q_2 qui maximisent le Profit.

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial q_1} = -4q_1 + 20 \\ \frac{\partial B}{\partial q_2} = -8q_2 + 40 \end{cases}$$

Points critiques :

$$\begin{cases} -4q_1 + 20 = 0 \\ -8q_2 + 40 = 0 \end{cases} \begin{cases} q_1 = 5 \\ q_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow M(5, 5) \text{ est l'unique point critique}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial q_1^2} = -4 \quad \frac{\partial^2 B}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial q_2^2} = -8$$

$$\alpha = \frac{\partial^2 B}{\partial q_1^2}(M) \frac{\partial^2 B}{\partial q_2^2}(M) - \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q_1 \partial q_2}(M) \right)^2 = 32 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial q_1^2}(M) = -4 < 0$$

$\Rightarrow M$ est un maximum

Le profit B possède un maximum local en $q_1 = 5$ et $q_2 = 5$ avions et le profit maximum réalisé

est $B(5, 5) = 100$

Méthode de substitution

Si la contrainte est linéaire le problème d'optimisation à deux variables est ramener à un problème d'optimisation à une variable

Application

On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P): \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = y - \frac{9}{x} \\ \text{sous la contrainte } x + y = 5 \end{cases}$$

1. Montrer que le problème (P) se ramène à un problème d'optimisation d'une fonction d'une variable $h(x)$ et étudier les extremums de cette fonction
2. Résoudre ce problème