

NOM :

Prénom :

Devoir de rentrée

(calculatrice interdite)

Compléter les et les blancs laissés sur la feuille (aucune justification n'est demandée)

1) Calculs

$$1000 \times 0,01^5 = 10^{\dots\dots\dots}$$

$$\frac{3^a \times 8^b}{2^c \times 6^d} = 2^{\dots\dots\dots} \times 3^{\dots\dots\dots}$$

$$2^n + 2^n = 2^{\dots\dots\dots} = 4^{\dots\dots\dots}$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} = \dots\dots\sqrt{3}$$

$$\sqrt{72} + \sqrt{144} = \dots\dots\dots + \dots\dots\sqrt{2}$$

$$\frac{12}{28} + \frac{9}{6} = \dots\dots\dots \quad (\text{fraction irréductible})$$

$$\ln\left(\frac{a^4}{b^3}\right) = \dots\dots\dots \ln(a) \dots\dots\dots \ln(b)$$

$$|3 - x| = 5 \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots$$

$$|x - 5| \leq 2 \Leftrightarrow \dots\dots \leq x \leq \dots\dots$$

2) Valeurs numériques

Valeurs exactes : $e^{4\ln 2} = \dots\dots\dots$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(\pi) = \dots\dots\dots$$

$$\binom{6}{5} = \dots\dots\dots$$

$$\binom{8}{8} = \dots\dots\dots$$

$$5^0 = \dots\dots\dots$$

Valeurs approchées à 0,1 près : $e \approx \dots\dots\dots$

$$\ln 2 \approx \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{2} \approx \dots\dots\dots$$

$$\frac{23}{7} \approx \dots\dots\dots$$

3) Formules remarquables : $(a, b, x) \in \mathbb{R}^3 \quad (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$(3x - 2)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(a + b)^3 = \dots\dots\dots$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(\dots\dots\dots)$$

$$\sin(a - b) = \dots\dots\dots$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{si } x \neq 1 \\ \dots\dots\dots & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \dots\dots\dots$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{\dots\dots}{\dots\dots}$$

4) Polynômes

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Factoriser : $4x^2 - 10x + 4 = \dots\dots\dots$

Compléter : $(8x^3 - 16x^2 + 2x + 6) = (4x + 2)(\dots\dots\dots)$

5) Inégalités Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a < b$ et $0 < c < d$

Entourer les affirmations forcément exactes et barrer les affirmations potentiellement fausses

$$a^2 < b^2 \quad c - b < d - a \quad \frac{1}{c} > \frac{1}{d} \quad \sin c < \sin d \quad ac < bd \quad \frac{c}{d} < \frac{d}{c}$$

6) Systèmes

Le système $\begin{cases} 2x - 3y = 21 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$ a pour solution $\dots\dots\dots$

Le système $\begin{cases} 2x + y + 3z = -5 \\ 3y + 2z = -4 \\ -4z = 20 \end{cases}$ a pour solution $\dots\dots\dots$

7) Dénombrement/Probabilités

a) Dans une classe de 38 élèves, 17 étudient l'allemand et 10 étudient l'espagnol dont 3 qui font de l'allemand et de l'espagnol. Combien d'élèves n'étudient ni l'allemand ni l'espagnol ?

b) On lance 2 dés à 6 faces non truqués. Calculer la probabilité d'obtenir :

2 numéros pairs:

Au moins un 5 :

Une somme égale à 9 :

c) On dispose de deux urnes. L'urne A contient un jeton blanc et 2 jetons noirs. L'urne B contient 2 jetons blancs et 2 jetons noirs. On choisit l'une des deux urnes au hasard puis un jeton au hasard dans cette urne.

La probabilité de tirer un jeton noir est :

Sachant qu'on a tiré un jeton blanc, la probabilité qu'il vienne de l'urne B est

8) Variables aléatoires

a) La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre

x_i	0	2	3	4	8
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,2		0,3

Compléter le tableau et calculer $E(X) = \dots\dots\dots$ et $V(X) = \dots\dots\dots$

Calculer $P_{X>2}(X=3) = \dots\dots\dots$ et $P_{X<5}(X \geq 3) = \dots\dots\dots$

b) On lance 180 fois de suite dans des conditions identiques un dé non truqué. On note Y le nombre de 6 obtenus.

La loi de Y est

$P(Y=30) = \dots\dots\dots$

$E(Y) = \dots\dots\dots$

$\sigma(Y) = \dots\dots\dots$

c) Soit Z une variable aléatoire finie et $a \in \mathbb{R}$. Alors $E(a.Z) = \dots\dots\dots$ et $V(a.Z) = \dots\dots\dots$

9) Suites

a) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison 2 telle que $u_4 = 5$ alors $u_{10} = \dots\dots\dots$

b) Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique telle que $v_5 = 14$ et $v_{13} = 32$. La raison de la suite est et $v_1 = \dots\dots\dots$

c) Soit $(g_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0 \Leftrightarrow q \in \dots\dots\dots$

d) On considère trois suites telles que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$

Barrer les affirmations potentiellement fausses et entourer les affirmations nécessairement exactes :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 2

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

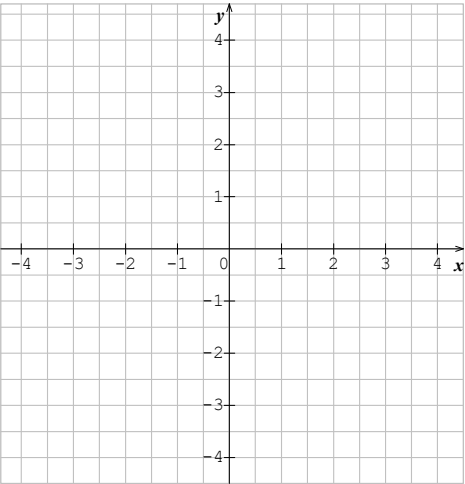
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

10) Récurrence : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

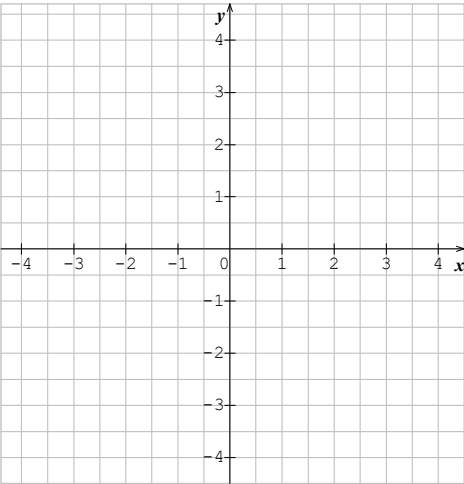
Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 2$

11) Représentation graphiques : Donner l’allure des représentations graphiques des fonctions suivantes

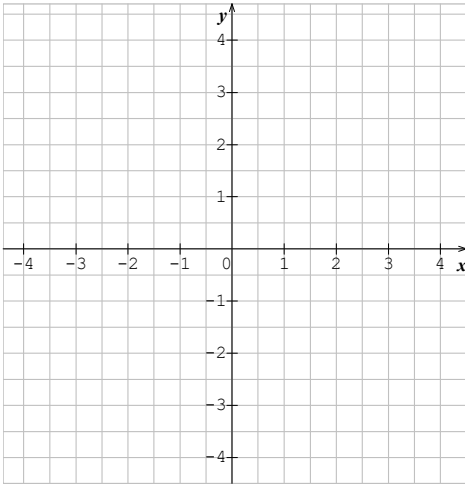
$a : x \rightarrow (x-1)^2 - 2$



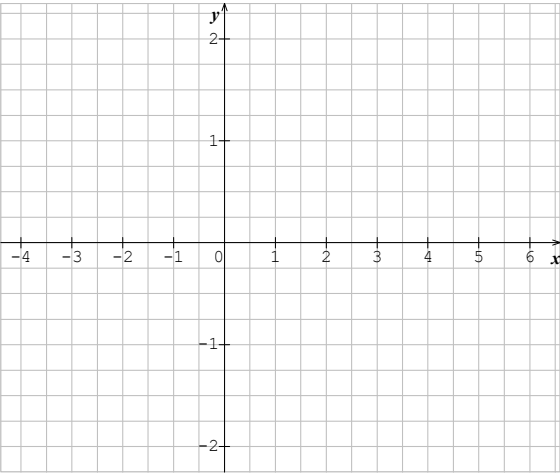
$b : x \mapsto \frac{1}{x-2}$



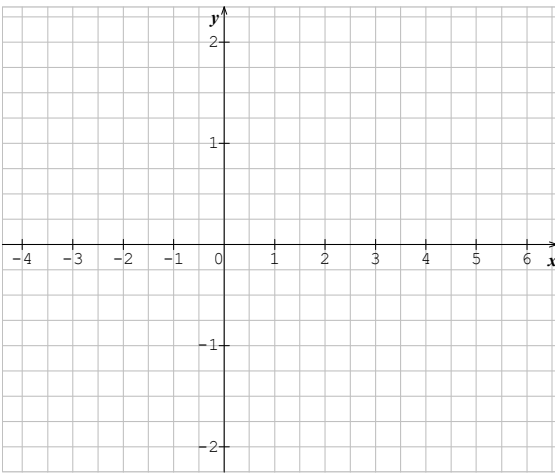
$c : x \mapsto -\sqrt{x}$



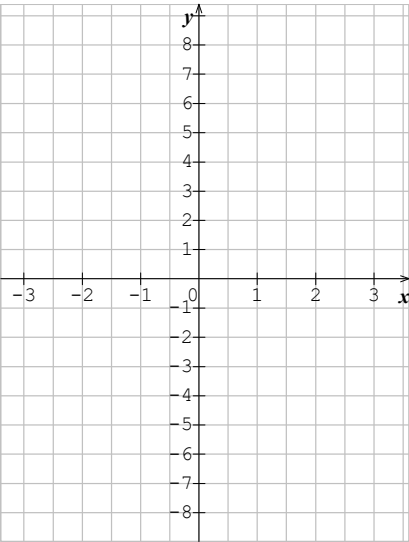
$d : x \mapsto \cos x$



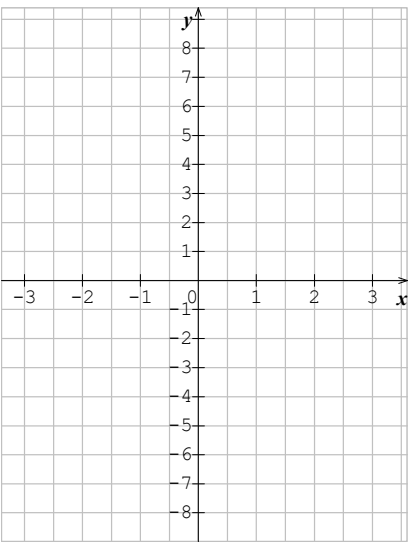
$e : x \mapsto \ln x$



$g : x \mapsto e^{-x}$



$h : x \mapsto -x^3$

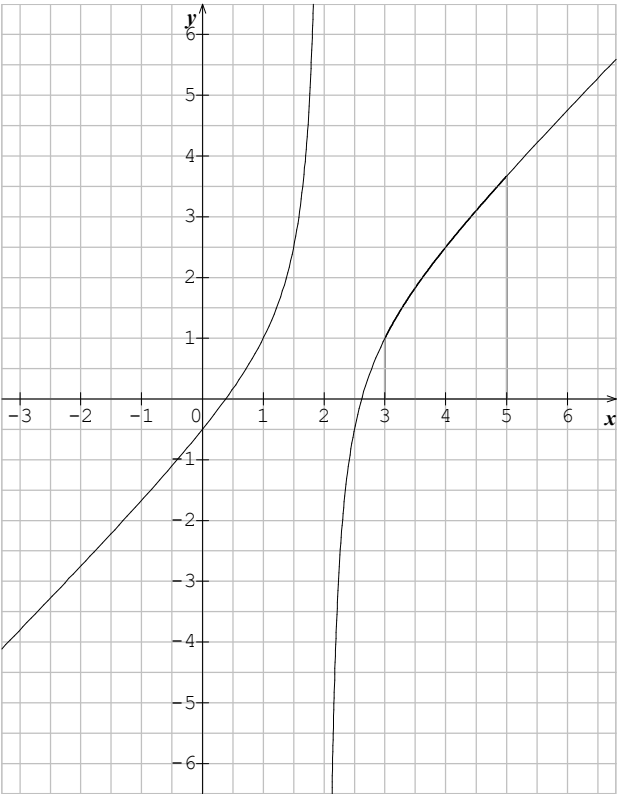


On donne ci-contre la représentation graphique d’une fonction f

L’ensemble de définition de f semble être $D_f = \dots\dots\dots$

Les deux asymptotes à la courbe représentative ont pour équations
 $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$

Donner une valeur approchée $\int_3^5 f(x)dx \approx$



12) Limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 3e^{-x} - \sqrt{x} = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln x + 5 = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x} + 4 \right) = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos x}{x} = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 3x + 1}{5x - 10} = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x^2 + 3x + 1}{5x - 10} = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 7 \ln x}{2 \ln x + 4} = \dots\dots\dots$$

13) Domaine de définition

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad D_a = \dots\dots\dots$$

$$b(x) = \frac{\ln(x^2)}{x + 1} \quad D_b = \dots\dots\dots$$

$$c(x) = \ln(2x - 18) \quad D_c = \dots\dots\dots$$

$$d(x) = \frac{5 - 3 \sin(4x - 1)}{4 - e^{5x}} \quad D_d = \dots\dots\dots$$

14) Dérivées (pas besoin de rechercher l'ensemble de définition dans cette question).

$$a(x) = (\cos x) \sqrt{x} \quad a'(x) = \dots\dots\dots$$

$$b(x) = \frac{x}{\ln x} \quad b'(x) = \dots\dots\dots$$

$$c(x) = \ln(6x^2 + 4) \quad c'(x) = \dots\dots\dots$$

$$d(x) = e^{3x^2} + (\sin(5x + 1))^2 \quad d'(x) = \dots\dots\dots$$

15) Primitives

a) Déterminer une primitive des fonctions définies par :

$$f(x) = 7x^4 + e^{3x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad F(x) = \dots\dots\dots$$

$$g(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2} \quad G(x) = \dots\dots\dots$$

$$h(x) = \frac{8x}{x^4 + 6x^2 + 9} \quad H(x) = \dots\dots\dots \quad \text{Indice : Que reconnaît-on au dénominateur ?}$$

b) Calculer la valeur exacte des intégrales

$$I = \int_1^2 3x^2 - \frac{5}{x^2} dx = \dots\dots\dots$$

$$J = \int_0^3 \frac{5}{x + 2} dx = \dots\dots\dots$$

16) Définitions/Théorèmes

1) Donner la définition d'une fonction continue en un point puis celle d'une fonction dérivable en un point.

2)a) Soient $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ les coordonnées de deux vecteurs de l'espace dans un repère orthonormé.

$$\text{Alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \dots\dots\dots$$

b) Donner un vecteur normal au plan d'équation cartésienne $3x + 4y - 2z = 5$

3) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :