

Lois de variables aléatoires finies

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] – Cours – On lance un dé et on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de $Y = (X - 2)^2$ et de $Z = \frac{1}{X + 1}$ ainsi que leur fonction de répartition.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] – Mobiliser –

L'arracheur de dents arrache les dents de ses patients au hasard. Les clients ont une dent malade parmi les 32 qu'ils possèdent avant l'intervention des tenailles du praticien. On considère les 10 premiers patients, en notant X le nombre de dents malades extraites à bon escient, sachant qu'il ne retire qu'une seule dent par personne.

1. Déterminer la loi de la variable X . Calculer la probabilité pour qu'aucun de ces patients n'y laisse la dent malade.
2. Combien doit-il traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6 ?
3. Le dernier client se laisse arracher les dents une à une tant que la dent n'a pas été extraite. On note Y le nombre de dents saines que ce malheureux voit tomber.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - b) Quelle est la probabilité pour qu'il reparte entièrement édenté.
 - c) Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] – Calculer – Soit X une variable aléatoire réelle finie suivant la loi uniforme sur $[-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Déterminer les moments d'ordre 1, 2 et 3 de X .

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] – Chercher – Calculer –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une v.a. telle que $X(\Omega) \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k).$$

2. On effectue trois tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 3$). Soit X le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi et l'espérance de X .

(On pourra se servir de l'égalité $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$)

Lois de variables aléatoires discrètes

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] – Cours – Chercher –

Un automobiliste doit dévisser dans le brouillard les boulons d'une roue de sa voiture. Il utilise une croix dont les quatre extrémités sont des clefs de taille différente indiscernables au toucher.

1. S'il procède au hasard, sans méthode.
 - a) Déterminer la probabilité de devoir faire n essais pour trouver la bonne clef.
 - b) Calculer le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la clef, puis la variance associée.
2. S'il procède au hasard, en éliminant les extrémités déjà testées. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais. Établir la loi de Y , ainsi que son espérance et sa variance.

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

Guy part en voyage pour une longue période avec une amie, mais il est distrait : quand il s'arrête pour prendre de l'essence, il y a une chance sur cinq pour qu'il reparte sans sa passagère, descendue pour visiter les toilettes... Elle est bien dans la voiture au départ du voyage. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes (s'arrêter pour prendre de l'essence) que Guy parcourt jusqu'à oublier sa passagère. Une fois oubliée, il ne fait pas demi tour.

1. Établir la loi de probabilité de X . Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma(X)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Quel est le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour que la passagère arrive à destination dans la voiture de Guy avec une probabilité supérieure à 0,6 ?

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] – Cours – Mobiliser –

On estime dans ce problème, que le nombre K de kilomètres complets qu'un enfant de cinq ans accepte de parcourir sur son vélo avant de le laisser sur place suit une loi de Poisson de moyenne 2.

(Pour exemple : pour 800m parcourus, on a $K = 0$. Si l'enfant parcourt 1,2km, on a $K = 1$, etc... De plus, une fois descendu, l'enfant ne remonte pas sur son vélo.)

7 pères de famille naïfs accompagnent leurs rejetons de cinq ans, chevauchent fièrement leur VTT, dans un périple dominical (nécessairement entamé) autour du lac Kir qui fait exactement 3km.

1. Calculer la probabilité pour un de ces bambins de faire au moins un tour complet de lac.

Sachant que ceux-ci n'ont le temps de faire qu'un tour, soit X le nombre de ces pères inconscients qui vont peut être terminer la grande boucle en portant le vélo de leur enfant.

2. Déterminer la loi de X , calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma(X)$.
3. Calculer la probabilité $P(X \leq \mathbb{E}[X])$.

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – Chercher – Calculer – Cours –

Chez les rois fainéants, les mariages consanguins ont développé un risque de stérilité. À partir de Clothaire III, on note X le nombre de générations précédant l'extinction de la dynastie par stérilité. (par exemple, on a $X = 0$ si Clothaire n'a pas de descendant.) La loi de probabilité de la variable aléatoire X vérifie la propriété suivante :

$$3p(X = n + 2) = 4p(X = n + 1) - p(X = n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer la loi de X .
2. En déduire la probabilité pour que Clothaire III soit stérile.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – Calculer – ☆

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de loi géométrique $\mathcal{G}(1 - \theta)$, avec $\theta \in]0; 1[$.

Pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y = \min\{n_0, X\}$ $Z = \max\{n_0, X\}$

1. Déterminer la loi de Y .
2. Déterminer la loi de Z .

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – Calculer –

Déterminer l'espérance et la variance de $Y = (-1)^X$ lorsque X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. En déduire la loi de Y .

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] Caractérisation d'une loi de Poisson – Calculer –

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $p_n = P(X = n) > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X suit la loi de Poisson de paramètre λ .
2. pour tout $n \geq 1$ on a, $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$.

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – Calculer – Chercher – ☆

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les cas d'existence de $\mathbb{E}(e^{-\alpha X})$ en fonction de $q = 1 - p$ et la calculer en cas d'existence.

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – Calculer –

1. Déterminer α tel qu'il existe une variable aléatoire X de loi définie par

$$P(X = n) = \frac{\alpha}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Montrer que l'espérance de X n'existe pas.

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

1. Déterminer α tel qu'il existe une variable aléatoire X de loi définie par $P\left(X = \frac{(-1)^n}{n+2}\right) = \frac{\alpha}{(n+1)!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ définisse une loi de probabilité.
2. Déterminer $\mathbb{E}[X]$.

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – Calculer –

On considère une variable X aléatoire de loi définie par

$$P(X = n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Vérifier que X est bien définie.
2. Calculer l'espérance de X .

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – Chercher – Calculer – ☆

Soit X une v.a. discrète telle que $\text{Supp}(X) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) + nP(X \geq n+1) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$$

2. Montrer que si X admet une espérance alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nP(X \geq n+1) = 0$.
3. En déduire que X admet une espérance $\iff$ la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} (P(X \geq k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

4. Montrer que dans ce cas $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] – Chercher – (ENS) Soit X une v.a. discrète sur Ω admettant une espérance. On note $Supp(X) = \{x_k, k \in K\}$ où les x_k sont deux à deux distincts ou nuls, et $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad E(X | A) = \sum_{k \in K} x_k P_A(X = x_k)$. Soit $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système complet d'événements. Montrer que

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) E(X | B_n).$$

(On admettra que les sommes de sommes qui interviendront sont interchangeables)

PROBLÈME : [Indications] [Correction] Fonctions génératrices (partie I d'un sujet d'écrit de concours)

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et on appelle "fonction génératrice de X " la fonction G définie par :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k) t^k$$

dont le domaine de définition D est celui de la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(X = n) t^n$.

1. On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
 - a) Déterminer le domaine de définition D de G .
 - b) Soit $t \in D$. Exprimer $G(t)$ à l'aide de p sans le signe $\sum$ et en simplifiant au maximum l'expression.
2. Déterminer de même de domaine de définition et la formule dans le cas où X suit cette fois-ci une loi de Poisson de paramètre λ .
3. Montrer que $1 \in D$ quelquesoit la variable X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et déterminer $G(1)$.

4. Dans cette question, on suppose que X prend des valeurs dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Dans ce cas, on a $D = \mathbb{R}$ et

$$G(t) = \sum_{k=1}^n p(X = k) t^k.$$

- a) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G' . en justifiant son existence.
- b) Établir la relation :

$$\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$$

Indications

Exercice 1 [Correction]
Se ramener à X .

Exercice 8 [Correction]

1. Une fois déterminé la formule issue d'une suite linéaire d'ordre 2 bien choisie, on trouvera les inconnues en se souvenant que p est une loi de probabilité discrète.

Exercice 10 [Correction]

pour le calcul de l'espérance : thm de transfert par exemple

Exercice 15 [Correction]

1. Déterminer a, b, c tels que $\frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$
2. Déterminer a, b tels que $\frac{4}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$

Exercice 1

- Loi de $Y = (X - 2)^2$:

Tout d'abord, on observe que comme $\text{supp}(X) = \{1, \dots, 6\}$, on obtient

$$\text{Supp}(Y) = \{0, 1, 2^2, 3^2, 4^2\}$$

On a que pour tout $k \in \text{Supp}(Y)$,

$$P(Y = k) = P((X - 2 = \sqrt{k}) \cup (X - 2 = -\sqrt{k})) = P((X = 2 - \sqrt{k}) \cup (X = 2 + \sqrt{k}))$$

Or la loi de X est uniforme, au cas par cas,

$$P(Y = k) = \begin{cases} \frac{2}{6} & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } k \neq 1 \end{cases}$$

D'où la fonction de répartition

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq t < 4 \\ \frac{4}{6} = \frac{2}{3} & \text{si } 4 \leq t < 9 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 9 \leq t < 16 \\ 1 & \text{si } t \geq 16 \end{cases}$$

- Loi de $Z = \frac{1}{X+1}$:

Tout d'abord, on observe que comme $\text{supp}(X) = \{1, \dots, 6\}$, on obtient

$$\text{Supp}(Z) = \left\{ \frac{1}{x+1} \mid x \in \{1, \dots, 6\} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{7} \right\}$$

On a que pour tout $k = \frac{1}{x+1} \in \text{Supp}(Z)$,

$$P(Z = k) = P(X = x) = \frac{1}{6}$$

La loi de Z est donc uniforme sur $\{\frac{1}{x+1} \mid x \in \{0, 1\}\}$.

D'où la fonction de répartition

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{7} \\ \frac{1}{6} & \text{si } \frac{1}{7} \leq t < \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \text{si } \frac{1}{6} \leq t < \frac{1}{5} \\ \frac{3}{6} & \text{si } \frac{1}{5} \leq t < \frac{1}{4} \\ \text{etc...} & \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 2

1.

$$X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{32})$$

La probabilité pour qu'aucun patient n'y laisse sa dent malade est de

$$P(X = 0) = \left(\frac{31}{32}\right)^{10} \simeq 0,73$$

2. Ici, on introduit la variable aléatoire X_n qui est la généralisation de X à n personnes au lieu de 10. Alors

$$X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{32})$$

On cherche n tel que

$$P(X_n \geq 1) \geq 0.6$$

i.e. $p(X_n = 0) < 0,4$, i.e.

$$\left(\frac{31}{32}\right)^n < 0,4$$

D'où

$$n \geq 29$$

3. a) On peut modéliser ceci de la manière suivante :

On numérote l'ensemble de toutes les dents et on peut supposer que la dent malade porte le numéro 1.

Une liste représente l'ordre dans lequel le dentiste arrache les dents. Chaque liste est équiprobable. Ainsi, $Y = k$ représente le choix de n'importe quelle liste ayant 1 en $k + 1^{\text{ème}}$ position.

D'où

$$p(Y = k) = \frac{1}{32} \quad \forall k \in \llbracket 0; 31 \rrbracket$$

- b) Le fait de repartir édenté correspond à l'évènement $Y = 31$

c) Y suivant une loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, 31\}$, on a

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{31}{2}$$

Exercice 3

$$E|X| = \sum_{k=-n}^n kp(X = k) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n |k| = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n k = \frac{2}{2n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

D'où

$$E|X| = \frac{n(n+1)}{2n+1}$$

$$E|X|^2 = \sum_{k=-n}^n k^2 p(X = k) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ D'où}$$

$$E|X|^2 = \frac{n(n+1)}{3}$$

$$E|X|^3 = \sum_{k=-n}^n |k|^3 p(X = k) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{2}{2n+1} \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ D'où}$$

$$E|X| = \frac{n^2(n+1)^2}{2(2n+1)}$$

Exercice 4

1. On peut raisonner directement ou utiliser que $X = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{(X \geq k)}$
2. $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(X \geq k+1) - P(X \geq k) = \frac{(n-k+1)^3}{n^3} - \frac{(n-k)^3}{n^3}$ et $E(X) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

Exercice 5

1. a) On note X le nombre d'essais nécessaires avant de trouver la bonne clef. C'est le rang de première apparition de l'événement : "trouver la bonne clé", dont la probabilité est $\frac{1}{4}$. Ainsi,

$$X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{D'où } p(X = n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4}$$

b) On sait que $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ où $p = \frac{1}{4}$ et $V(X) = \frac{p}{q^2}$ où $q = 1 - p$. D'où

$$\mathbb{E}[X] = 4 \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{3/4}{(1/4)^2} = 12$$

2. Y est une variable finie, à valeurs dans $\llbracket 1; 4 \rrbracket$, avec

k	1	2	3	4
$p(Y = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

i.e.

k	1	2	3	4
$p(Y = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$, d'où l'espérance connue

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{4+1}{2} = 2,5.$$

Sa variance est HP et doit donc être calculée. On obtient

$$V(Y) = \frac{4^2 - 1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Exercice 6

1. X est le rang de première apparition de l'événement : "Guy perd sa passagère", de probabilité $\frac{1}{5}$. On a donc

$$X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$$

d'où

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{1/5} = 5 \quad ; \quad V(X) = \frac{4/5}{(1/5)^2} = 20 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{20}$$

2. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X \leq k) = \sum_{i=1}^k q^{i-1} p = p \frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^k$. Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{\lfloor x \rfloor} & \end{cases}$$

3. Soit n le nombre d'étapes que veut parcourir la passagère. Pour y arriver, elle doit encore être dans la voiture au $n^{\text{ème}}$ arrêt. Il s'agit de résoudre $p(X \geq n) \geq 0.6$, ou dit autrement,

$$p(X \leq n-1) < 0.4$$

On trouve

$$n-1 \leq \frac{\ln 0.6}{\ln 0.4} \simeq 2.28$$

et donc

$$n \leq 3$$

Il peut donc y avoir

3 étapes au maximum

Exercice 7

1. On note Z la v.a. donnant le nombre de kilomètres faits par l'enfant. L'hypothèse donne

$$P(Z \geq 3) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - (P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2))$$

Or,

$$P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) = e^{-2}(1 + 2 + 2) = 5e^{-2}$$

D'où

$$P(Z \geq 3) = 1 - 5e^{-2} \simeq 0.32$$

- 2.

$$X \sim \mathcal{B}(7, p) \quad \text{où } p = 5e^{-2}$$

D'où

$$\mathbb{E}[X] = 7p = 35e^{-2} \simeq 4.74$$

$$\sigma(X) = \sqrt{7pq} = \sqrt{7(1-5e^{-2})5e^{-2}} \simeq 1.53$$

3. On décompose le calcul :

$$P(X \leq \mathbb{E}[X]) = P(X \leq 4) \simeq 0.41$$

Exercice 8

1. La résolution de l'équation caractéristique donne

$$P(X = n) = \lambda + \mu \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1.$$

Or, par le calcul précédent

$$\sum_{n=0}^N P(X = n) = (N+1)\lambda + \mu \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Le terme $(N+1)\lambda$ est divergent quand $N \rightarrow +\infty$, sauf si $\lambda = 0$ auquel cas, c'est la suite nulle. Le terme $\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est la somme partielle d'une série géométrique. Ainsi, leur somme converge ssi $\lambda = 0$. Dans ce cas, on trouve après calcul

$$\lambda = 0 \quad \mu = \frac{2}{3}$$

puis

$$P(X = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

On reconnaît

$X \hookrightarrow G_{\mathbb{N}}\left(\frac{2}{3}\right)$

2. C'est $P(X=0) = \frac{2}{3}$.
3. On peut utiliser les espérance et variance de Y , qui sont connues. D'où

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

et

$$V(X) \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$$

Exercice 9

1. On a clairement Y une v.a. finie avec $Supp(Y) = \{1, \dots, n_0\}$.
Soit $k \in Supp(Y)$, on a

$$P(Y = k) = P(\min\{n_0, X\} = k)$$

Or,

★ si $k < n_0$,

$$\min\{n_0, X\} = k \Leftrightarrow X = k$$

D'où

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\min\{n_0, X\} = k) \\ &= P(X = k) \\ &= (1 - \theta)\theta^{k-1} \end{aligned}$$

★ si $k = n_0$,

$$\min\{n_0, X\} = k \Leftrightarrow X \geq n_0$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(Y = n_0) &= P(\min\{n_0, X\} = n_0) \\ &= P(X \geq n_0) \\ &= \sum_{k=n_0}^{+\infty} (1 - \theta)\theta^{k-1} \\ &= (1 - \theta) \sum_{j=0}^{+\infty} \theta^{j+n_0-1} \\ &= (1 - \theta)\theta^{n_0-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \theta^j \\ &= (1 - \theta)\theta^{n_0-1} \frac{1}{1 - \theta} = \theta^{n_0-1} \end{aligned}$$

Finalement,

$$P(Y = k) = \begin{cases} (1 - \theta)\theta^{k-1} & \text{si } k = 1, \dots, n_0 - 1 \\ \theta^{n_0-1} & \text{si } k = n_0 \end{cases}$$

2. On a clairement Z une v.a.d. avec $Supp(Z) = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$. Soit $k \in Supp(Y)$, on a

$$P(Y = k) = P(\max\{n_0, X\} = k)$$

Or,

★ si $k > n_0$,

$$\max\{n_0, X\} = k \Leftrightarrow X = k$$

D'où

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(\min\{n_0, X\} = k) \\ &= P(X = k) \\ &= (1 - \theta)\theta^{k-1} \end{aligned}$$

★ si $k = n_0$,

$$\max\{n_0, X\} = n_0 \Leftrightarrow X \leq n_0$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(Z = n_0) &= P(\max\{n_0, X\} = n_0) \\ &= P(X \leq n_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} (1 - \theta)\theta^{k-1} \\ &= (1 - \theta) \sum_{k=1}^{n_0} \theta^{k-1} \\ &= (1 - \theta) \frac{1 - \theta^{n_0}}{1 - \theta} \\ &= 1 - \theta^{n_0} \end{aligned}$$

Finalement,

$$P(Y = k) = \begin{cases} (1 - \theta)\theta^{k-1} & \text{si } k = n_0 + 1, \dots \\ 1 - \theta^{n_0} & \text{si } k = n_0 \end{cases}$$

Exercice 10

- Eséprance :

$Supp(Y) = \{-1, 1\}$. Y est une variable finie, son espérance existe donc. De plus, par théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k P(X = k) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{-\lambda}\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = e^{-2\lambda}}$$

- Loi

On a

$$\begin{cases} P(Y = 1) + P(Y = -1) = 1 \\ P(Y = 1) - P(Y = -1) = \mathbb{E}[Y] = e^{-2\lambda} \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{Supp(Y) = \{-1, 1\}, \quad P(Y = 1) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} \quad P(Y = -1) = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}}$$

Exercice 11

La partie 1. $\Rightarrow$ 2. est immédiate. (Il suffit de poser la formule et de simplifier...)

Pour 2. $\Rightarrow$ 1. : On montre facilement par récurrence que

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} p_0$$

Ensuite, pour montrer que $p_0 = e^{-\lambda}$, il suffit de se souvenir que P est une probabilité et que donc $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$

Exercice 12

- Existence :

D'après le théorème de transfert, l'espérance demandée existe ssi la série $\sum_{k \geq 1} e^{-\alpha k} P(X = k)$ converge absolument. C'est une série à termes positifs, donc elle converge absolument ssi elle converge.

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k \geq 1} e^{-\alpha k} P(X = k) &= \sum_{n \geq 1} e^{-\alpha k} p q^{k-1} \\ &= e^{-\alpha} p \sum_{n \geq 1} (e^{-\alpha} q)^{k-1}\end{aligned}$$

Cette série converge ssi $q e^{-\alpha} \in]-1, 1[$, c'est-à-dire, par positivité de q , ssi $q \in [0, e^\alpha[$. Or, comme $q \in [0, 1]$, c'est est toujours le cas si $e^\alpha > 1$, i.e. $\alpha > 0$. En revanche, si $\alpha \leq 0$, on a $e^\alpha \leq 1$, il y a alors une condition restrictive sur q .

Pour résumer :

$$\boxed{\mathbb{E}(e^{-\alpha X}) \text{ existe ssi "}\alpha > 0\text{" ou "}\alpha < 0 \text{ et } q < e^\alpha\text{"}}$$

- Valeur :

On a dans les cas de convergence, comme la série est à termes positif, nous pouvons réutiliser la formule déjà calculée ci-dessus et faire ensuite un changement de variable $i = n - 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\alpha X}) &= e^{-\alpha} p \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-\alpha} q)^{k-1} \\ &= e^{-\alpha} p \sum_{i=0}^{+\infty} (e^{-\alpha} q)^i \\ &= e^{-\alpha} p \frac{1}{1 - e^{-\alpha} q}\end{aligned}$$

D'où en cas d'existence :

$$\boxed{\mathbb{E}(e^{-\alpha X}) = \frac{e^{-\alpha} p}{1 - e^{-\alpha} q}}$$

Exercice 13

1. En utilisant $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$, on trouve $\boxed{\alpha = 1}$.

2. La série $\sum nP(X = n) = \sum \frac{1}{n+1}$ diverge.

Exercice 14

1. En utilisant $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$, on trouve $\boxed{\alpha = \frac{1}{e-1}}$.
2. • Existence de $\mathbb{E}[X]$:

Etudions la convergence absolue de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+2} p(X = \frac{(-1)^n}{n+2})$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{(-1)^n}{n+2} p(X = \frac{(-1)^n}{n+2}) \right| = \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n+2)!}$$

C'est une série exponentielle. Elle est donc convergente. (Sa valeur n'a pas d'importance ici !) Ainsi, l'espérance de X existe.

- Valeur de $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)!} = \alpha \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 + 1 \right) = \alpha e^{-1} \text{ i.e.}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{1}{e(e-1)}}$$

Exercice 15

1. On trouve $a = 2$; $b = -4$; $c = 2$.

Les termes partent par élimination.

2. On trouve $a = 4$; $b = -4$

Les termes partent par élimination. X admet une espérance et $E(X) = 2$.

Exercice 16

1. Remarquons que :

$$\begin{array}{rcl} p(X \geq 1) & = & p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + \dots + p(X = n) + p(X \geq n+1) \\ p(X \geq 2) & = & p(X = 2) + p(X = 3) + \dots + p(X = n) + p(X \geq n+1) \\ p(X \geq 3) & = & p(X = 3) + \dots + p(X = n) + p(X \geq n+1) \\ & \dots & \\ p(X \geq n) & = & p(X = n) + p(X \geq n+1) \end{array}$$

En sommant par colonne, on obtient

$$\sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) + np(X \geq n+1)$$

2. Comme la série $\sum kP(X = k)$ est convergente, on sait que le reste tend vers 0 :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Or, on a

$$0 \leq nP(X \geq n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} nP(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3. La convergence de la partie de gauche est équivalente à celle de droite.
4. On applique la question 1 et 2.

Exercice 17

Par définition, on sait que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in K} x_k P(X = x_k)$$

Par système complet, pour tout k , on a

$$P(X = x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{B_n}(X = x_k) P(B_n)$$

(En fait, comme le système est complet, la somme est en réalité une somme finie qui ne contient qu'un seul terme puisqu'il n'y a qu'un seul $P_{B_n}(X = x_k)$ non nul.) En réinjectant, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in K} x_k \sum_{n=1}^{\infty} P_{B_n}(X = x_k) P(B_n) \\ &= \sum_{k \in K} \sum_{n=1}^{\infty} x_k P_{B_n}(X = x_k) P(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in K} x_k P_{B_n}(X = x_k) P(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \sum_{k \in K} x_k P_{B_n}(X = x_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) E(X | B_n) \end{aligned}$$

Problème

1. a) Par formule de cours sur la loi géométrique, on sait que dans ce cas, $P(X = 0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} p(X = n) t^n &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} p(1-p)^{n-1} t^n \\ &= pt \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (t(1-p))^{n-1} \\ &= pt \sum_{i \in \mathbb{N}} (t(1-p))^i \text{ avec le changement d'indice } i = n-1 \end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dont on sait qu'elle est convergente ssi

$$-1 < t(1-p) < 1$$

ce qui, comme $1-p > 0$, est équivalent à

$$-\frac{1}{1-p} < t < \frac{1}{1-p}$$

Le domaine de définition de G est donc

$$D = \left] -\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p} \right[$$

- b) Sur la domaine de convergence, les calculs précédents restent encore valides et on a directement

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(X = n) t^n \\ &= pt \sum_{i=0}^{+\infty} (t(1-p))^i \\ &= pt \frac{1}{1-t(1-p)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \quad \forall t \in \left] -\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p} \right[, \quad G(t) = \frac{pt}{1-t(1-p)}$$

2. Par formule de cours, on sait que dans ce cas,

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{N}} p(X = n) t^n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\end{aligned}$$

On reconnait une série exponentielle dont on sait qu'elle est toujours convergente. Le domaine de définition de G est donc

$$\boxed{\mathbb{R}}$$

et par calcul :

$$\begin{aligned}G(t) &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = e^{\lambda(t-1)}}$$

3. On note que pour $t = 1$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} p(X = n) t^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(X = n)$$

Or, on sait que cette série est convergente par σ additivité, donc $1 \in D$ et on sait également de plus que par propriétés des probabilités,

$$\boxed{G(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X = n) = 1}$$

4. a) G est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ car polynômiale. On a

$$G'(t) = \sum_{k=1}^n p(X = k) k t^{k-1}$$

De plus, comme X est une variable finie, on sait que son espérance existe et on voit d'ailleurs que

$$\boxed{G'(1) = \mathbb{E}[X]}$$

b) Tout d'abord, on a

$$G''(t) = \sum_{k=1}^n p(X = k) k(k-1) t^{k-2}$$

et donc

$$G''(1) = \sum_{k=1}^n p(X = k) k(k-1)$$

Par théorème de transfert, on peut d'ailleurs voir que ceci correspond à

$$G''(1) = \mathbb{E}[X(X-1)]$$

et par linéarité de l'espérance sur des variables finies :

$$G''(1) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]$$

avec en parallèle

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

D'où

$$V(X) = \underbrace{G''(1) + \mathbb{E}[X]}_{\mathbb{E}[X^2]} - \mathbb{E}[X]^2.$$

On sait également d'après la question précédente que

$$G'(1) = \mathbb{E}[X]$$

D'où finalement

$$\boxed{V(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2}$$