

Chapitre 5

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Sommaire

5.1 Rappels et exemples d'équations différentielles en économie	104
5.1.1 Équilibre d'un marché en concurrence pure	104
5.1.2 Second modèle	106
5.2 Système différentiel	107
5.2.1 Définition et écriture matricielle	107
5.2.2 Lien entre équation différentielle d'ordre 2 et système différentiel	108
5.2.3 Systèmes particuliers	109
5.3 Solutions des systèmes différentiels	109
5.4 Trajectoires et états d'équilibre	112

Le but de ce chapitre est d'une part d'étendre les notions sur les équations différentielles vues en première année par l'étude de systèmes différentiels et d'autre part, de mettre en place les techniques de résolution de ces systèmes par la diagonalisation des matrices de taille 2 ou 3.

Nous verrons comment obtenir un état d'équilibre et comment étudier des trajectoires.

Une bonne maîtrise des chapitres sur la dérivation, sur la fonction exponentielle vous permettront de répondre aux exercices posés au concours.

Ce chapitre est à mettre en étroite relation avec le chapitre d'informatique : Équations et systèmes différentiels.

Compétences attendues. ⇨ Savoir étudier des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

⇨ Savoir étudier des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

⇨ Savoir étudier des systèmes différentiels linéaires associés à des matrices d'ordre 2 et 3.

⇨ Connaître le lien entre équations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants et systèmes différentiels linéaires.

⇨ Savoir étudier le comportement asymptotique des trajectoires

⇨ Savoir étudier des trajectoires de systèmes d'ordre 2.

Comme le dit lui-même Newton, « il est utile de résoudre des équations différentielles. ».

Dès lors que l'analyse pris son essor sous l'impulsion de Newton, Leibniz, et des Bernoulli, on s'est préoccupé de résoudre des problèmes de géométrie avec cet outil. Et plus encore, avec des outils mécaniques. De 1692 à 1752, pendant soixante ans, on a développé toute une industrie mécanique

destinée à résoudre graphiquement les équations différentielles (traité de Riccati).

De la même manière, on a cherché à résoudre de manière analogique les équations aux dérivées partielles en se servant des phénomènes physiques à l'origine de ces équations (équation de Laplace).

Les problèmes posés ou menant à des équations différentielles sont aussi vieux que l'analyse elle-même. Avant même qu'on ait complètement élucidé la question des infiniment petits et trouvé des fondements (provisaires), l'on se préoccupe déjà de résoudre des problèmes de tangente, qui mènent invariablement à une équation différentielle.

Pour un mathématicien de la fin du XVII^e siècle ou du début du XVIII^e, résoudre une équation différentielle consiste à écrire la solution générale de l'équation, et de préférence en termes finis et avec des fonctions élémentaires. Il n'est ici pas question de problème de conditions initiales.

Si l'on sait, dès la fin du XVII^e siècle intégrer les équations différentielles linéaires du premier et du second ordre à coefficients constants par des sommes d'exponentielles, il faut attendre 1760 pour que la théorie vienne à bout des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque.

La résolution des équations différentielles avait montré que les solutions dépendaient des constantes d'intégration et des conditions du problème (conditions de Cauchy). Une solution était définie dans un certain intervalle et cet intervalle d'existence dépendait en général du problème.

Les applications sont nombreuses, notamment en économie :

- Certains produits financiers (les options par exemple) sont calculés par résolution d'équations différentielles (résolution qui peut être explicite ou par approximations numériques).
- Mais pour les produits encore plus complexes, c'est la méthode "monte Carlo" (arbre de possibilités probabilisées) qui est utilisée.
- Application dans les finances : l'évolution d'un capital selon le taux d'intérêt.
- Dans notre société humaine où il existe une monnaie d'échange (de référence) et des biens, persiste un problème qui consiste en la détermination de la valeur monétaire d'un bien. Pour déterminer celle-ci, il faut pouvoir connaître l'évolution de l'offre et de la demande. Il faut comprendre les mécanismes de marché, basés sur l'équilibre entre offre et demande, qui détermine les prix.

5.1 Rappels et exemples d'équations différentielles en économie

5.1.1 Équilibre d'un marché en concurrence pure

En finance, une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (strike), pendant un temps donné ou une date fixée. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation ou d'assurance.

On souhaite ici modéliser la dynamique des prix entre l'offre et la demande d'options ainsi que la formation d'un équilibre de prix sur le marché des options.

Soit P le prix d'une option, ce prix peut bien entendu varier au cours du temps : $P = P(t)$. On note respectivement

- Q_d la demande associée à cette option, et
- Q_0 l'offre associée à cette option.

Une façon simple de modéliser l'évolution de l'offre et de la demande en fonction du temps consiste à poser :

$$Q_d(t) = a - bP(t) \quad (1),$$

$$Q_0(t) = -c + dP(t) \quad (2)$$

où a, b, c, d sont des constantes positives.

Les paramètres, b et d mesurent respectivement la sensibilité au prix de la demande et de l'offre. Ces deux paramètres sont positifs, car, sur la plupart des marchés, la demande est décroissante et l'offre est croissante. On peut alors se poser les questions suivantes :

Tous les marchés atteignent-ils un équilibre ?

Quel est le prix d'équilibre, noté $\bar{P}$? Partant d'un prix d'option initial P_0 à l'instant $t = t_0$, comment ce prix va-t-il évoluer au cours du temps ?

Afin de modéliser l'évolution du prix, nous supposons qu'il est soumis à la force (relative) qui relie la demande et l'offre dans le marché. Pour simplifier, supposons que le taux de changement du prix en fonction du temps est à tout moment proportionnel à l'excédent de demande ($Q_d - Q_0$) qui prévaut à ce moment-là, autrement dit :

$P'(t) = j(Q_d(t) - Q_0(t))$, avec j une constante strictement positive.

Le prix augmente lorsque la demande est supérieure à l'offre et diminue en cas d'offre excédentaire.

EXERCICE 5.1.

Montrer que cette modélisation conduit à la résolution d'une équation différentielle. Puis résoudre cette équation en utilisant les rappels de première année (on pourra prendre $P_0 = 15$ et $a = 200, b = 4, c = 100, d = 5$).

Rappels de première année :

THÉORÈME 5.1 (Equation différentielle générale d'ordre 1).

I désignera un intervalle, a un réel et b une fonction continue sur I . Toute solution sur I de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b(t)$ est de la forme $y = Y + Y_0$ où Y est une solution de l'équation homogène associée à (E) , et Y_0 une solution particulière de (E) .

THÉORÈME 5.2 (Equation différentielle homogène).

a un réel.

Les solutions sur I de l'équation différentielle homogène associée à $(E) : y' + ay = 0$ sont exactement toutes les fonctions définies sur I par $t \mapsto \lambda e^{-at}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉS 5.3.

Soit a un réel non nul, b un réel. La fonction constante égale à $\frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$.

THÉORÈME 5.4 (Equation différentielle homogène d'ordre 2).

Soient a et b deux réels.

Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions de la forme : $y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec λ_1, λ_2 réels quelconques.

Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a une unique racine réelle r_0 , les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions de la forme : $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}$ avec λ, μ réels quelconques.

THÉORÈME 5.5 (Equation différentielle générale d'ordre 2).

Soient a et b deux réels et c une fonction continue sur I .

Toute solution sur I de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = c(t)$ est de la forme $y = Y + Y_0$ où Y est une solution de l'équation homogène associée à (E) , et Y_0 une solution particulière de (E) .

Remarques. Le marché sera stable si $-j(b + d) < 0$. Cela signifie que

- le prix croîtra de façon asymptotique vers le prix d'équilibre $\bar{P}$ s'il est initialement inférieur au prix d'équilibre ($P_0 < \bar{P}$),
- le prix décroîtra de façon asymptotique vers $\bar{P}$ s'il lui est initialement supérieur ($P_0 > \bar{P}$)
- Si le prix correspond d'emblée au prix d'équilibre ($P_0 = \bar{P}$), il sera constant et retournera vers l'équilibre suite à une éventuelle perturbation.

Le marché sera en revanche instable si $-j(b + d) > 0$. Cela signifie que le prix tendra vers moins l'infini s'il est initialement inférieur à l'équilibre et vers plus l'infini s'il est initialement supérieur à l'équilibre. S'il est par hasard égal à l'équilibre, il se placera sur une des deux trajectoires divergentes en cas de perturbation.

5.1.2 Second modèle

Le modèle précédent d'offre et de demande d'options n'utilisait que l'information sur les prix. Afin de l'enrichir, nous allons maintenant prendre en compte le fait que les acheteurs et vendeurs se basent non seulement sur le prix actuel mais également sur la tendance qui prévaut à cette période. À partir de cette tendance, ces intervenants financiers formeront leurs anticipations du niveau futur du prix ce qui aura une influence sur leurs décisions d'offre et de demande. Du point de vue de la modélisation, l'information sur la tendance du prix d'équilibre d'une option sur le marché financier peut être obtenue en utilisant les dérivées première et seconde. La dérivée première nous informe sur la pente du prix (hausse ou baisse) et la dérivée seconde sur la variation dans la pente (accélération de hausse ou de baisse du prix). Afin de tenir compte de ces effets nous modélisons l'évolution de l'offre et de la demande en fonction du temps par :

$$nP''(t) + mP'(t) - bP(t) + a = Q_d(t) \quad (3)$$

$$wP''(t) + uP'(t) + dP(t) - c = Q_0(t) \quad (4)$$

où a, b, c, d sont des constantes positives, (dans toute la suite, nous continuerons d'utiliser les valeurs $a = 200, b = 4, c = 100, d = 5$).

Les paramètres m, n, u et w , qui n'ont par ailleurs pas été contraints, emmagasinent l'information sur les anticipations des acheteurs et vendeurs.

Prenons $m > 0$. Alors une hausse de prix impliquera une hausse de la quantité demandée. Ceci nous indique que les acheteurs anticipent que la hausse de prix va se poursuivre et préfèrent augmenter leurs achats maintenant, quand les prix sont encore relativement bas.

Par contre, si $m < 0$, cela signifie que les acheteurs anticipent un renversement rapide dans la tendance du prix et qu'ils préfèrent alors diminuer leurs achats courants et attendre une baisse de prix qui s'effectuera plus tard.

Le paramètre n concerne le taux de changement de la pente du prix dans le temps. Il indique s'il y a accélération ou ralentissement dans l'accroissement des prix.

Comme on peut le constater, les paramètres m et n ajoutent un élément de spéculation aux prix dans notre nouveau modèle, ce qui s'avère tout à fait réaliste au regard des marchés financiers. Concernant la modélisation du changement de prix, nous conservons la même que pour le premier modèle.

EXERCICE 5.2.

Montrer qu'en utilisant les nouvelles expressions (3) et (4) pour l'offre et la demande, on arrive à une équation différentielle ordinaire du second ordre de la forme :

$$P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) + \gamma = 0.$$

Nous verrons par la suite comment résoudre des équations de ce type.

5.2 Système différentiel

5.2.1 Définition et écriture matricielle

Définition 5.1.

Soit n un entier naturel non nul et soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit I un intervalle et n fonctions dérivables sur I : $x_1, x_2, \dots, x_n$.

On appelle système différentiel linéaire, à coefficients constants, à n inconnues tout système constitué de n équations différentielles dont l'écriture générale est :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les familles de fonctions $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vérifiant simultanément les n équations du système.

Exemple 5.1.

Cette écriture $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$ désigne un système différentiel linéaire à 2 inconnues, les fonctions x_1 et x_2 .

Remarques.

1. Si n vaut 1, alors on est ramené à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.
2. En général, les systèmes proposés seront à 2 ou 3 inconnues et dans ce cas, les fonctions inconnues seront le plus souvent notées x, y, z plutôt que x_1, x_2, x_3 .

Théorème 5.6 (Ecriture matricielle).

En posant, $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases} \Leftrightarrow X' = AX \text{ avec } A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}.$$

Remarques.

1. La matrice A ne dépend pas du réel t .
2. On notera X' le vecteur colonne dont les coordonnées sont les dérivées des coordonnées du vecteur colonne X .

5.2.2 Lien entre équation différentielle d'ordre 2 et système différentiel

Théorème 5.7 ([🔗 Lien entre ED d'ordre 2 et système différentiel](#)).

Soient a et b deux réels, et considérons l'équation différentielle homogène d'ordre 2 suivante :

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

En posant, $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ alors on a l'équivalence suivante :

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \Leftrightarrow X' = AX.$$

Exemple 5.2.

Posons $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, on a $x''(t) - 4x'(t) + 2x(t) = 0 \Leftrightarrow X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X$.

EXERCICE 5.3.

On reprend une partie de l'exercice 5.2, à savoir cette équation différentielle d'ordre 2 :

$$P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) = 0$$

Écrire sous forme matricielle cette équation.

Remarque.

La résolution d'une équation différentielle homogène d'ordre 2 se ramène donc à la résolution d'un système différentiel linéaire à 2 inconnues, $x(t)$ et $x'(t)$, mais en fait, il suffit de trouver x (en dérivant on trouve x').

EXERCICE 5.4.

Traduire sous forme matricielle le système différentiel suivant ou l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$1. (S) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

$$2. (E) : x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0$$

Il existe des systèmes particuliers simples à résoudre.

5.2.3 Systèmes particuliers

Exemple 5.3 (Système diagonal). Si A est une matrice diagonale à coefficients réels, alors le système

$$\text{s'écrit } X' = AX \text{ avec } A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ c'est à dire } \begin{cases} x'_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ x'_2(t) = \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases}$$

On résout indépendamment chaque équation $x'_i(t) = \lambda_i x_i(t)$, dont les solutions sont $x_i(t) = k_i e^{\lambda_i t}$, avec $k_i \in \mathbb{R}$.

Les solutions sont donc les fonctions $t \mapsto k_i e^{\lambda_i t}$, $k_i \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.4 (Système triangulaire). Un système triangulaire n'est pas tellement plus compliqué à résoudre. En effet, si A est une matrice triangulaire, on a comme système :

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{2,2}x_2(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,n}x_n(t) \end{cases}$$

On résout le système de proche en proche : on peut d'abord intégrer la dernière équation, puis reporter la solution dans l'équation précédente (qui devient une équation du type $x'(t) = ax(t) + b(t)$) et ainsi en remontant intégrer tout le système.

5.3 Solutions des systèmes différentiels

Dans tout ce paragraphe, on considèrera :

soit n un entier naturel et soit I un intervalle et n fonctions dérivables sur I : $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\text{On considère le système différentiel linéaire (S)} \begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases}.$$

Nous allons voir que ce système (S) si l'on se donne des conditions initiales, c'est à dire en imposant des contraintes, aura une unique solution.

Théorème 5.8 (Problème de Cauchy).

On a un système différentiel linéaire, à coefficients constants.

Soit t_0 un élément de I et n réels fixés $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Il existe une unique solution au système (S) vérifiant les conditions initiales :

$$\forall k \in [1, n], x_k(t_0) = \alpha_k$$

Ce théorème nous assure de l'existence et de l'unicité de la solution mais ne nous donne pas la méthode de résolution.

Exemple 5.5. Il existe une unique solution à $\begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x'_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$, vérifiant les conditions initiales $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

Voici un premier résultat qui affirme que si on connaît un vecteur propre de A , alors on peut lui associer une solution du système différentiel.

Proposition 5.9. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Alors la fonction $t \mapsto e^{\lambda t} V$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ est solution du système différentiel $X' = AX$.

Preuve. Soit $Y(t) = e^{\lambda t} V$ alors $Y'(t) = \lambda e^{\lambda t} V = e^{\lambda t} (\lambda V) = e^{\lambda t} AV = AY(t)$. Ce qui prouve bien que Y est solution du système $X' = AX$.

◇

EXERCICE 5.5.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que 2 est une valeur propre de A . Donner un vecteur propre associé V .

En déduire une solution au système différentiel $X' = AX$

Théorème 5.10 (Résolution et ensemble solution).

Soit p un entier naturel.

On considère le système différentiel linéaire, mis sous forme matricielle $X' = AX$.

On suppose que A est **diagonalisable**. On note alors $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de A et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les p valeurs propres distinctes associées.

L'ensemble des solutions du système $X' = AX$ est :

$$\left\{ X : t \mapsto \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_p t} V_n, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

L'ensemble des solutions d'un système différentiel linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble des solutions d'un système différentiel linéaire est un espace vectoriel de dimension n .

Preuve. On va montrer que la famille $\{e^{\lambda_1 t} V_1, e^{\lambda_2 t} V_2, \dots, e^{\lambda_p t} V_n\}$ est libre et génératrice de l'ensemble des solutions du système $X' = AX$.

D'après 5.9, les applications $X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$ sont bien des solutions du système différentiel.

Montrons que ces solutions sont linéairement indépendantes.

Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_p t} V_n = 0$.

Cette égalité étant vraie pour tout réel t , elle est vraie pour $t = 0$, ce qui donne :

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n = 0.$$

Or, comme $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de A , on a donc que : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Ce qui entraîne donc que les solutions sont bien linéairement indépendantes.

Soit P la matrice de passage formée en colonne des vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$. Comme A est diagonalisable, on sait alors que $P^{-1}AP = D$, où D est diagonale avec éléments diagonaux les valeurs propres de A .

Soit $X(t)$ une solution du système différentiel $X' = AX$, alors en posant $Y = P^{-1}X$ (c'est à dire que $X = PY$), on a :

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY.$$

Ainsi, Y est solution du système diagonal $Y' = DY$ c'est à dire :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_p y_n(t) \end{cases}$$

$$\text{Donc } Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_p t} \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de P sont les vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$, alors

$$X(t) = PY(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_p t} V_n = \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \dots + \alpha_n X_n(t).$$

On vient de prouver que n'importe quelle solution $X(t)$ est combinaison linéaire des $X_i(t)$.

Ainsi la famille est génératrice de l'espace des solutions.

Comme elle est libre, c'est une base de solutions. $\diamond$

Exemple 5.6. On veut résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

• Valeurs propres et vecteurs propres :

Les valeurs propres de A sont 1, -2, 5. La base des vecteurs propres associés respectifs est :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• Solutions générales :

$$\text{On a trois solutions } X_1(t) = e^t V_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, X_2(t) = e^{-2t} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, X_3(t) = e^{5t} V_3 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système $X' = AX$ sont donc les fonctions de la forme :

$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) + \gamma X_3(t); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

• Conditions initiales :

On cherche quelle solution vérifie $X(0) = X_0$.

$$\text{Or, } X(0) = \alpha X_1(0) + \beta X_2(0) + \gamma X_3(0) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } X(0) = X_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1.$$

Par conséquent, l'unique solution qui vérifie le système et la condition initiale est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 5.6.

Résoudre :

1. (S) $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$
2. (E) : $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0$

EXERCICE 5.7.

Résoudre $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$, vérifiant les conditions initiales $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$

• **Point méthode pour résoudre un système différentiel**

La résolution se fait en 3 étapes :

1. On donne l'écriture matriciel du système : $X' = AX$, cela revient donc à trouver A .
2. On cherche les valeurs propres de A et la base de chacun des sous-espaces propres associés. On a montré au passage que A est diagonalisable.
3. On conclut avec l'écriture des solutions d'après le théorème 5.10.

5.4 Trajectoires et états d'équilibre

Définition 5.2 (Trajectoire).

On appelle trajectoire d'un système différentiel linéaire $X' = AX$ tout ensemble

$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$, où le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est une solution de $X' = AX$.

Remarques.

- Si $n = 2$, une trajectoire est représentée par une courbe du plan.
- Une trajectoire peut parfois être réduite à un point, c'est ce qui arrive quand la solution est l'application nulle sur I .
- Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une trajectoire est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5.7. On reprend l'exercice 5.4. Le système $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$, avec les conditions initiales données, possède comme unique solution la fonction $t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La trajectoire est donc l'ensemble des points $(e^t + e^{3t}, -e^t + e^{3t})$, où $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.8. Considérons le système $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On est ramené donc au système différentiel : $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrice diagonale.

Ses valeurs propres sont 1 et -2 (on les lit sur la diagonale de A) et la base des vecteurs propres associés respectifs : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit l'ensemble des solutions : $X(t) = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-2t} \end{pmatrix}$, où a et b sont des réelles.

Étudions plus précisément les trajectoires obtenues selon les valeurs des constantes a et b .

- Si $a = b = 0$, la solution du système obtenue est l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et sa trajectoire est réduite au point de coordonnées $[0, 0] \in \mathbb{R}^2$.
- Si $a = 0$, $b \neq 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = 0, y(t) = be^{-2t}$ qui est du signe de b . Ainsi les trajectoires sont les demi-axes verticaux.
- Si $a \neq 0$, $b = 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = 0, x(t) = ae^t$ qui est du signe de a . Ainsi les trajectoires sont les

demi-axes horizontaux.

- Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = b \left(\frac{a}{x(t)} \right)^2$ et les trajectoires sont donc les courbes d'équation $y = \frac{ba^2}{x^2}$.

Ce sont des courbes qui ressemblent à des branches d'hyperboles.

EXERCICE 5.8.

Considérons le système $X' = AX$ avec cette fois la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Résoudre le système sur $\mathbb{R}$ et donner ses trajectoires.

EXERCICE 5.9.

Soit le système (S) $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$ Résoudre (S) sur $\mathbb{R}$ et donner ses trajectoires.

Définition 5.3 (État d'équilibre).

On appelle point d'équilibre ou état d'équilibre du système différentiel (S) toute solution de (S) constituée de fonctions constantes. On dit aussi point critique ou point stationnaire.

Remarques. 1. Les différentes composantes d'un point d'équilibre sont des fonctions constantes.

Les dérivées associées sont donc nulles. Donc pour déterminer les états d'équilibre d'un système différentiel, il suffira de résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 0 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ 0 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ 0 = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

2. Si A est inversible, le seul point d'équilibre est $(0, 0, \dots, 0)$.

Car les états d'équilibres associés à S s'obtiennent en résolvant $AV = 0$ donc à voir si 0 est valeur propre de A .

Si 0 n'est pas valeur propre de A alors A est inversible et il n'existe donc qu'un seul vecteur V solution c'est $V = 0$

EXERCICE 5.10.

On reprend le système $\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$, donner les points d'équilibre.

Définition 5.4 (Convergence d'une trajectoire).

On dit qu'une trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$, d'un système linéaire $X' = AX$, converge si, pour tout $i \in [1, n]$, la fonction x_i possède une limite finie quand t tend vers $+\infty$.

En notant, pour tout $i \in [1, n]$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \ell_i$, on dit alors que cette trajectoire converge vers le n -uplet $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$. Sinon, on dit que la trajectoire diverge.

Exemple 5.9. On reprend le système $\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$, la trajectoire associée à la solution est l'ensemble des points $(e^t + e^{3t}, -e^t + e^{3t})$, où $t \in \mathbb{R}$. Elle diverge car au moins une composante (ici les deux) tendent vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$.

Théorème 5.11 (Comportement asymptotique et signes des valeurs propres). On considère un système différentiel du type $X' = AX$ et on suppose que A est diagonalisable.

- Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, toutes les trajectoires du système convergent vers un point d'équilibre et on dit que ce point d'équilibre est stable.
- Sinon, il existe des trajectoires divergentes.

EXERCICE 5.11.

On reprend l'exercice 5.9. Étudier le comportement asymptotique des trajectoires.

• Point méthode pour étudier des trajectoires

La résolution se fait en 3 étapes :

1. On résout le système.
2. On donne les trajectoires en transposant les solutions en n -uplets.
3. On étudie les limites des différentes composantes des n -uplets. On peut aussi voir le signe des valeurs propres de A

Feuille d'exercices n°5

SYSTEMES DIFFERENTIELS

Exercice 1. Ecriture matricielle

Traduire sous forme matricielle les systèmes différentiels suivant ou l'équation différentielle d'ordre 2 :

1. (S)
$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 6x_2(t) \end{cases}$$
2. (E) : $x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 0$
3. (S)
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$$

Exercice 2. Une solution à $X' = AX$

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que 2 est une valeur propre de A . Donner un vecteur propre associé V .

En déduire une solution au système différentiel $X' = AX$.

• Point méthode pour résoudre un système différentiel

La résolution se fait en 3 étapes :

1. On donne l'écriture matriciel du système : $X' = AX$, cela revient donc à trouver A .
2. On cherche les valeurs propres de A et la base de chacun des sous-espaces propres associés. On a montré au passage que A est diagonalisable.
3. On conclut avec l'écriture des solutions d'après le théorème 5-10 .

Exercice 3. Preuve du point méthode

Soit V un vecteur propre de A matrice carrée d'ordre n .

1. On note λ la valeur propre associée. Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto e^{\lambda t} V$ est l'unique solution du problème de Cauchy : (S) $X' = AX, X(0) = V$.
2. On suppose ici de plus que A est diagonalisable. Soit $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres de A et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Montrer alors, qu'en notant $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto e^{\lambda_k t} V_k$, la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de S .

Exercice 4. $X' = AX$ Résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Résolution et ensemble solution

Résoudre :

$$1. (S) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

$$2. (S) \begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$$

$$3. (S) : \begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$$

Exercice 6. Problème de Cauchy

Résoudre

$$1. \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}, \text{ vérifiant les conditions initiales } x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$$

$$2. \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}, \text{ vérifiant les conditions initiales } x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$$

Exercice 7. Lien entre ED d'ordre 2 et système diff.

Résoudre :

$$1. (E) : x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0.$$

$$2. P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) = 0.$$

$$3. x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 0.$$

Exercice 8. Système équivalent

$$\text{Soit le système (S)} \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + y \end{cases}$$

$$1. \text{ Prouver que } (S) \Leftrightarrow (S') \begin{cases} u' = 2u \\ v' = 0 \end{cases}$$

$$2. \text{ Résoudre } (S').$$

$$3. \text{ Conclure pour } (S).$$

Exercice 9. Trajectoire et $X' = AX$ Considérons le système $X' = AX$ avec cette fois la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.Résoudre le système sur $\mathbb{R}$ et donner ses trajectoires.

Exercice 10. Trajectoire et système différentiel

Soit le système (S) $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$

Résoudre (S) sur $\mathbb{R}$ et donner ses trajectoires.

Exercice 11. Points d'équilibres

1. On reprend le système $\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$, donner les points d'équilibre.

2. On reprend le système $\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ x'_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$, donner les points d'équilibre.

Exercice 12. Comportement asymptotique des trajectoires

On reprend le système (S) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$ Existe-t-il des états d'équilibres? Étudier le comportement asymptotique des trajectoires.

• Point méthode pour étudier des trajectoires

La résolution se fait en 3 étapes :

1. On résout le système.
2. On donne les trajectoires en transposant les solutions en n -uplets.
3. On étudie les limites des différentes composantes des n -uplets. On peut aussi voir le signe des valeurs propres de A

Exercice 13. Étude complète

Soit le système (S) $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$

1. Résoudre le système (S).
2. Trouver les états d'équilibre associés à (S).
3. Existe-t-il des trajectoires convergentes? Si oui, en donner une.
4. Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.

Exercice 14. Étude complète

Soit le système (S) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}$

1. Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.
2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.
3. Résoudre le système (S).
4. Trouver une trajectoire qui converge vers l'état d'équilibre $(2, -2)$.

Exercice 15. Cas où la matrice n'est pas diagonalisable

On considère le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$

1. Traduire sous forme matricielle $X' = AX$, ce système. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner P^{-1} .
3. Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire que l'on notera T .
4. On pose $Y = P^{-1}X$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors en notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, montrer que $Y' = P^{-1}X'$.
5. En déduire que $X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$.
6. Résoudre $v' = 2v$ et en déduire les solutions du système $Y' = TY$.
7. Résoudre enfin (S).

Exercice 16. * Cas où la matrice n'est pas diagonalisable

Étude du système différentiel (S) :
$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

Indication : s'inspirer de l'exo précédent, on prouvera que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et on montrera que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire que l'on notera T ...

Exercice 17. ** Système d'ordre 3

On considère le système d'équations différentielles (S)
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = 6x - 11y + 6z \end{cases}$$

1. Résoudre (S).
2. Donner la solution vérifiant : $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.
3. Donner la solution générale de : $x'''(t) - 6x''(t) + 11x'(t) - 6x(t) = t$ (indication : on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme du premier degré).