

Correction Concours blanc n°1 type EDHEC

Exercice 1. d'après edhec 2018 S

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \frac{1}{n \ln n}$.

(a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a pour $0 < k \leq t$ puis par croissance de la fonction logarithme :

$0 < \ln k \leq \ln t$ et par produit de nombres positifs on a alors : $k \ln k \leq t \ln t$ et enfin par décroissance de la fonction inverse on a l'inégalité demandée : $0 < \frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}$.

(b) Montrons alors que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}$.

On intègre l'inégalité précédente de 1a) sur $[k, k+1]$ (bornes croissantes), et comme

$\int_k^{k+1} \frac{1}{k \ln k} = \frac{1}{k \ln k}$ on a alors :

pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}$.

(c) Par sommation de cette dernière inégalité de $k = 2$ à $k = N$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \ln k}.$$

Puis d'après la relation de Chasles pour les intégrales et par définition de la suite (a_n) , on

trouve que pour tout entier $N \geq 2$: $\int_2^{N+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \sum_{k=2}^N a_k$.

(d) Calculons la dérivée de $t \mapsto \ln(\ln t)$, cette fonction étant dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$ (car $\ln t > 0, \forall t \geq 2$) : on obtient $\frac{1}{t \ln t}$.

Donc : $\int_2^{N+1} \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln(\ln t)]_2^{N+1} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2)$.

Ainsi d'après la question 1c, pour tout entier $N \geq 2$: $\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^N a_k$.

On reconnaît dans le terme de droite : $\sum_{k=2}^N a_k = S_N$, la suite des sommes partielles associées à la série $\sum_{n \geq 2} a_n$.

De plus, $\lim_{N \rightarrow +\infty} [\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2)] = +\infty$ (par composées de limites).

Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty$, par conséquent la série de terme général a_n diverge.

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrons que f est continue sur $] -\infty, 1[$.

f est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.

($\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, 1-x > 0, (1-x) \ln(1-x) \neq 0$).

• Étude en 0 :

On a par équivalent usuel en 0 que $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ et $1-x \underset{0}{\sim} 1$ d'où par quotient et produit d'équivalents :

$$\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x}{-x} = 1. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en 0.}$$

Par conséquent f est continue sur $] -\infty, 1[$.

- (b) Le taux d'accroissement de f en 0 est donné par :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} = \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)}.$$

On a de plus d'après le cours que le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1-x)$ est :

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

- (c) D'où en utilisant ce DL, $(1-x)\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$$\text{Puis : } \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} \underset{0}{=} \frac{-x - [-x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)]}{(x[-x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)])} \underset{0}{=} \frac{\frac{-x^2}{2}}{-x^2 + o(x^2)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}, f \text{ est donc dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

3. (a) f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.

$$(\forall x \in] -\infty, 0[\cup]0, 1[, 1-x > 0, (1-x)\ln(1-x) \neq 0).$$

On a pour tout x de $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$,

$$f'(x) = \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x(-\ln(1-x) - 1)}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2} = \frac{-\ln(1-x) - x}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2}.$$

- (b) Étudions le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $] -\infty, 1[$.

On peut voir facilement que la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est concave sur $] -\infty, 1[$ (car dérivée seconde est négative) et que sa tangente en 0 a pour équation $y = -x$ donc on a lorsque x appartient à $] -\infty, 1[$, $\ln(1-x) \leq -x$ d'où $\ln(1-x) + x \leq 0$ sur $] -\infty, 1[$.

$$\text{Or, } f'(x) = \frac{-\ln(1-x) - x}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2}, f'(x) \text{ est du signe de } -(\ln(1-x) + x), \text{ donc sur }] -\infty, 0[\cup]0, 1[,$$

$f'(x) \geq 0$, et $f'(0) > 0$, f est donc strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ et comme f est continue en 0, f est strictement croissante sur $] -\infty, 1[$.

- (c) On a par équivalent à l'infini que $(1-x) \underset{-\infty}{\sim} -x$ et donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{-x}{-x\ln(1-x)} \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(1-x)}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = +\infty$ d'où par inverse, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ($y = 0$ est asymptote horizontale à C_f).

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, alors $y = (1-x)$ tend vers zéro par valeurs supérieures et on sait par croissance comparée que $y \ln y$ tend vers 0 par valeurs inférieures. Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)\ln(1-x) = 0^-$ d'où par inverse et comme $-x$ tend vers -1 on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

On résume tous ces résultats dans le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1
f	0	$+\infty$

(d) Programme Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    y=-x/((1-x)*np.log(1-x))
    return y

x=np.linspace(-5,-1,100)
y=f(x)
plt.plot(x,y, label='courbe de f')
plt.legend()
plt.show()
```

4. (a) D'après les questions 2a) et 3c), f est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$ donc d'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $[0, 1[$ sur $[f(0), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)[= [1, +\infty[$.

Or $\mathbf{N}^* \subset [1, +\infty[$, donc pour tout n de $\mathbf{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$.

On sait que $f(0) = 1$ avec $0 \in [0, 1[$ donc par unicité de u_1 : $u_1 = 0$.

- (b) On a montré que f était bijective donc d'après le cours on sait que sa fonction réciproque aura pour tableau de variations et limites, le tableau suivant :

x	1	$+\infty$
f^{-1}	0	1

Or, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $f(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(n)$, donc d'après les résultats obtenus $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(n) = 1$, donc u_n converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

- (c) Pour tout entier naturel n non nul, on admet qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on a : $u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Alors, $\forall n \geq n_0$, $0 > \ln(1 - u_n) \geq \ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -\frac{3}{2} \ln n$.

Puis par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+$, $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)} \geq \frac{2/3}{n \ln n} = \frac{2}{3} a_n \geq 0$.

Comme la série de terme général a_n diverge d'après 1d), on en déduit par critère de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général $\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est divergente.

- (d) En revenant à la définition de u_n , on a pour tout n de $\mathbf{N}^*$:

$n = f(u_n) = \frac{-u_n}{(1 - u_n) \ln(1 - u_n)}$ donc $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $1 - u_n = \frac{-u_n}{n \ln(1 - u_n)} \sim \frac{-1}{n \ln(1 - u_n)} \geq 0$ (car u_n tend vers 1 d'après 4b)). Or, comme la série de terme général $\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est divergente d'après 4c), par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $1 - u_n$ est également divergente.

Exercice 2. d'après edhec 2019

1. (a) $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et, sans difficulté par calcul direct : $(A - I)^2 = O_3$

- (b) On a donc comme A et I commutent que : $A^2 - 2A + I = O_3$ donc $I = -A^2 + 2A = A(-A + 2I)$. On sait que si $AB = I$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$, donc A est inversible et $A^{-1} = -A + 2I$

2. (a) N et I commutent, donc on peut développer $(N + I)^n$ avec la formule du binôme. De plus, comme $N^2 = O_3$, on a immédiatement $N^k = O_3$ pour $k \geq 2$.

Pour $n \geq 2$: $A^n = (N + I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 = I + nN$.

La formule marche pour $n = 0$ et $n = 1$.

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad A^n = I + nN \text{ puis comme } N = A - I, \forall n \in \mathbf{N} \quad A^n = nA + (1 - n)I.$$

(b) Pour $n = -1$, $I + nN = I - N = I - (A - I) = 2I - A = A^{-1}$. La formule est toujours valable.

3. (a) On dispose d'après 1a) d'un polynôme annulateur pour la matrice A : $P(x) = (x - 1)^2$

Or, ce polynôme a pour unique racine 1 et donc $Sp(A) \subset \{1\}$.

Reste à vérifier que 1 est bien valeur propre.

Plusieurs méthodes :

- $A - I$ a trois colonnes colinéaires (non nulles) donc $A - I$ est de rang 1 donc $A - I$ non inversible et donc 1 est bien valeur propre de A .

- $(A - I)(A - I) = O_3$. Si $(A - I)$ était inversible, en multipliant par $(A - I)^{-1}$ on aurait $A - I = O_3$, ce qui n'est pas vrai.

Donc $A - I$ n'est pas inversible, et 1 est bien valeur propre :

$$Sp(A) = \{1\}$$

(b) Si A était diagonalisable, on aurait A semblable à D c'est à dire $A = PDP^{-1}$ avec $D = I$ donc $A = I$, ce qui n'est pas vrai.

Donc A n'est pas diagonalisable

(c) Programme Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.linalg as al

A=np.array([[0,1,1],[-2,3,2],[1,-1,0]])
Sp,VP=al.eig(A)
print(Sp,VP)
```

4. (a) $mat_{\mathcal{B}}(f - id) = A - I$. Or $A - I$ a trois colonnes colinéaires (non nulles) donc $A - I$ est de rang 1.

On a bien $rg(f - id) = 1$

(b) Le théorème du rang donne : $\dim(\ker(f - id)) + rg(f - id) = 3$ donc $\dim(\ker(f - id)) = 2$.

Montrons d'abord que $u_1 \in \ker(f - id)$ et $u_2 \in \ker(f - id)$.

$(f - id)(u_1) = (f - id)^2(e_1) = 0_{\mathbf{R}^3}$ car $(f - id)^2$ est l'endomorphisme nul.

On calcule les composantes de $(f - id)(u_2)$ dans $\mathcal{B}$ avec le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u_1 \in \ker(f - id)$ et $u_2 \in \ker(f - id)$.

Les deux vecteurs u_1 et u_2 sont non colinéaires donc forment une famille libre de $\ker(f - id)$

et $\dim(\ker(f - id)) = 2$, donc (u_1, u_2) est bien une base de $\ker(f - id)$.

5. (a) Ici, plusieurs méthodes : - soit en considérant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la famille

$$\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_1) : P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En échangeant la ligne 2 et la ligne 3 on obtient une matrice triangulaire avec des pivots non nuls.

Donc P est inversible et d'après le cours $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbf{R}^3$.

Ou bien la plus utilisée :

-soit avec le cardinal de la famille qui est 3 qui est égal à la dimension de $\mathbf{R}^3$ et ensuite on montre que la famille est libre (à vous de le faire).

(b) $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ et $f(e_1) = u_1 + e_1$ car $f(e_1) - e_1 = u_1$. La construction directe de la matrice

de f dans la base $\mathcal{B}'$ donne :
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Soit, on a déjà prouvé à 5a) que P était inversible,

- soit d'après le cours, on reconnaît que P est la matrice de passage entre les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ donc P est inversible et toujours d'après le cours la formule de changement de base donne

$$T = P^{-1}AP.$$

7. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$MT = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ d & e & d+f \\ g & h & g+i \end{pmatrix}$$

$$TM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$MT = TM \iff a+g = a; b+h = b; c+i = a+c; d+f = f; g+i = i \iff g=0; h=0; d=0; a=i$$

$$MT = TM \iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a, b, c, e, f) \in \mathbf{R}^5$$

Donc $E = \{a(E_{1,1} + E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3} \mid (a, b, c, e, f) \in \mathbf{R}^5\} = \text{Vect}(\mathcal{F})$

avec $\mathcal{F} = (E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$

Cela prouve déjà que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et que

$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E .

Montrons que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

$$a(E_{1,1} + E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3} = O_3 \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = O_3 \iff a = b = c = e = f = 0$$

$\mathcal{F}$ est donc libre, et forme une base de E . Donc $\dim(E) = 5$

(b) On a : $A = PTP^{-1}$, d'où : $NA = AN \iff NPT^{-1} = PTP^{-1}N \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP) \iff N'T = TN'$ en notant $N' = P^{-1}NP$

(c) D'après ce qui précède $AN = NA \iff N'$ commute avec T donc d'après la question 7a)

$$N' = a(E_{1,1} + E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3} \quad \text{avec } (a, b, c, e, f) \in \mathbf{R}^5$$

Donc F est l'ensemble des matrices N avec

$$N = PN'P^{-1} = aP(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{1,3}P^{-1} + ePE_{2,2}P^{-1} + fPE_{2,3}P^{-1} \quad \text{avec } (a, b, c, e, f) \in \mathbf{R}^5.$$

Cela répond bien à la question.

Exercice 3.

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi $U(\{-1; 1\})$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) et on pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M(\omega) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}), M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_2(\omega) & X_1(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, $M(\omega)$ est une matrice diagonalisable car elle est symétrique.

Pour montrer que $M(\omega)$ n'est pas inversible plusieurs méthodes :

- comme $X_2(\omega) = X_1(\omega)$ ou bien $X_2(\omega) = -X_1(\omega)$ les deux colonnes de $M(\omega)$ sont liées.

La matrice n'est pas inversible.

ou bien

- on calcule le déterminant de $M(\omega)$: $\det(M(\omega)) = X_1(\omega)^2 - X_2(\omega)^2 = 0$ car X_1 et X_2 suivent la même

loi $U(\{-1; 1\})$ donc $X_1(\omega)^2$ et $X_2(\omega)^2$ ne peuvent être égaux qu'à 1.

D'où La matrice n'est pas inversible.

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, déterminons $\lambda \in \mathbf{R}$ telle que $M(\omega) - \lambda I_2$ non inversible :

$M(\omega) - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \det(M(\omega) - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (X_1(\omega) - \lambda)^2 - (X_2(\omega))^2 = 0 \Leftrightarrow (X_1(\omega) - X_2(\omega) - \lambda)(X_1(\omega) + X_2(\omega) - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = X_1(\omega) - X_2(\omega)$ ou $\lambda = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.

Ces deux valeurs sont distinctes car sinon on aurait $X_2(\omega) = 0$ ce qui est impossible car $X_2(\Omega) = \{-1; 1\}$.

On peut conclure sur le spectre de $M(\omega)$:

$Sp(M(\omega)) = \{X_1(\omega) + X_2(\omega); X_1(\omega) - X_2(\omega)\}$.

3. On peut observer que $M(\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (X_1(\omega) + X_2(\omega)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que $M(\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (X_1(\omega) - X_2(\omega)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non nuls, ce sont des vecteurs propres de $M(\omega)$ associés respectivement aux valeurs propres $X_1(\omega) + X_2(\omega)$ et $X_1(\omega) - X_2(\omega)$.

On peut dire que forcément $E_{X_1(\omega)+X_2(\omega)} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{X_1(\omega)-X_2(\omega)} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ de bases respectives $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ car uniques et non nuls.

NB : on pouvait aussi calculer directement les sous-espaces propres comme d'habitude.

La concaténation des bases des sous-espaces propres forme une famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. Donc c'est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. Donc on retrouve que $M(\omega)$ est diagonalisable.

On sait d'après le cours qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}M(\omega)P = D(\omega) \text{ où } D(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) + X_2(\omega) & 0 \\ 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \end{pmatrix}.$$

4. On considère le système différentiel linéaire à coefficients aléatoires :

$$(S) \begin{cases} y_1' = X_1 y_1 + X_2 y_2 \\ y_2' = X_2 y_1 + X_1 y_2 \end{cases}.$$

On pose, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. On admet que $Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$.

- (a) Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, Y est solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} y_1' = X_1 y_1 + X_2 y_2 \\ y_2' = X_2 y_1 + X_1 y_2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\boxed{Y' = M(\omega)Y}.$$

- (b) Soit $\omega \in \Omega$ fixé.

- i. Les états d'équilibre du système sont les solutions constantes du système différentiel. Ce sont donc les éléments du noyau de $M(\omega)$.

On cherche donc $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ état d'équilibre du système $\Leftrightarrow Y \in \ker(M(\omega)) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 0 = X_1(\omega)a + X_2(\omega)b \\ 0 = X_2(\omega)a + X_1(\omega)b \end{cases} \Leftrightarrow b = -\frac{X_2(\omega)}{X_1(\omega)}a.$$

$$\text{Donc } \ker(M(\omega)) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{X_2(\omega)}{X_1(\omega)} \end{pmatrix}\right) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ -X_2(\omega) \end{pmatrix}\right).$$

Les états d'équilibre du système sont les éléments de $\text{vect}\left(\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ -X_2(\omega) \end{pmatrix}\right)$.

- ii. Comme $M(\omega)$ est diagonalisable et d'après la question 3, on a le spectre et les bases des sous-espaces propres de $M(\omega)$, on sait d'après le cours que :

pour tout $\omega \in \Omega$ l'ensemble des solutions de (S) est alors donné par :

$$\{Y : t \mapsto \alpha e^{(X_1(\omega) + X_2(\omega))t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{(X_1(\omega) - X_2(\omega))t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

(c) On sait d'après le cours que toutes les trajectoires sont convergentes si et seulement si

$$Sp(M(\omega)) \subset \mathbf{R}_-.$$

Or, $X_1(\omega) \pm X_2(\omega) \in \{-2, 0, 2\}$ et on a, par indépendance de X_1 et X_2

$$P(Sp(M(\omega)) \subset \mathbf{R}_-) = P(X_1 \pm X_2 \in \{-2, 0\}) = P((X_1 = 1) \cap (X_2 = -1)) \cup ((X_1 = -1) \cap (X_2 = 1)) \cup ((X_1 = -1) \cap (X_2 = -1)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

D'où la probabilité que toutes les trajectoires soient convergentes est de $\frac{3}{4}$. Et on converge dans ce cas vers un état d'équilibre.

PROBLEME.

On lance indéfiniment une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{\text{ième}}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k - 1)^{\text{ième}}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient Pile (resp. Face) au $k^{\text{ième}}$ lancer".

Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Partie I : Simulation informatique et conjectures

1. Simulation de la variable aléatoire X_n .

La liste T de ce programme contient n réalisations d'une variable de Bernoulli de paramètre p qui représente donc les n lancers de la pièce, un 1 représentant alors l'obtention d'un Pile. On va donc parcourir tous les termes de la liste et regarder s'ils sont différents ou non du terme d'avant, augmentant le compteur chgt si c'est le cas.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simul_X(n, p):
    chgt= 0
    T=[rd.binomial(1, p) for k in range(n)]
    for k in range(1, n):
        if T[k] != T[k-1] :
            chgt=chgt+1
    return chgt
```

On exécute le script suivant pour différentes valeurs de n et avec $p = q = 1/2$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
p=1/2
L=[ ]
M=[ ]
for k in range(1000):
    L.append(simul_X(n,p))
    M.append(rd.binomial(n-1,p))
plt.hist([L, M], color = ['orange', 'pink'], density = True,
label = ['X_n' , 'mystere'])
plt.legend()
plt.show()
```

Conjecture loi de X_n :

La liste L contient 1000 simulations de X_n pour $p = 1/2$. La liste M contient 1000 simulations d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n-1, 1/2)$. Pour les différentes valeurs de n testées, les hauteurs des bâtons de l'histogramme semblent être les mêmes, on peut donc conjecturer dans le cas particulier $p = q = 1/2$, que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, 1/2)$.

Partie II : étude de quelques exemples.

1. Lors des deux premiers lancers, il peut y avoir 0 ou 1 changement : $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

Donc X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p(X_2 = 1)$.

$(X_2 = 0) = (P_1 P_2 \cup F_1 F_2)$ événements incompatibles, d'où :

$p(X_2 = 0) = p(P_1 P_2) + p(F_1 F_2)$ puis par indépendances des lancers,

$$p(X_2 = 0) = p(P_1)p(P_2) + p(F_1)p(F_2) = p^2 + q^2.$$

Comme $(X_2 = 1) = \overline{(X_2 = 0)}$ alors $p(X_2 = 1) = 1 - p^2 - q^2 = 2pq$ car $p + q = 1$.

Donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq)$.

2. (a) Avec 3 lancers, on peut avoir aucun changement (toujours la même face de la pièce), un changement ou au plus deux changements. Donc $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$(X_3 = 0) = (P_1 P_2 P_3 \cup F_1 F_2 F_3)$ et comme précédemment par incompatibilités et indépendances des événements

$$p(X_3 = 0) = p^3 + q^3 = (p+q)(p^2 - pq + q^2) = p^2 - pq + q^2.$$

$(X_3 = 2) = (P_1 F_2 P_3 \cup F_1 P_2 F_3)$ et comme précédemment par incompatibilités et indépendances des événements

$$p(X_3 = 2) = p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq.$$

$$\text{Enfin } p(X_3 = 1) = 1 - (p(X_3 = 0) + p(X_3 = 2)) = 1 - p^2 + pq - q^2 - pq = 1 - p^2 - q^2 = 2pq$$

D'où la loi de X_3 :

j	0	1	2
$P(X_3 = j)$	$p^2 - pq + q^2$	$2pq$	pq

- (b) On a $E(X_3)$ qui existe car support fini et :

$$E(X_3) = 0p(X_3 = 0) + 1p(X_3 = 1) + 2p(X_3 = 2) = 0 + 1(2pq) + 2(pq) = 4pq.$$

De même la variance existe :

$$E(X_3^2) = 0 + 1^2(2pq) + 2^2(pq) = 6pq \text{ d'où par K-H :}$$

$$V(X_3) = 6pq - (4pq)^2 = 2pq(3 - 8pq).$$

3. (a) Avec le même raisonnement que précédemment, en 4 lancers, on peut avoir entre 0 et 3 changements donc : $X_4(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

$(X_4 = 0) = (P_1 P_2 P_3 P_4 \cup F_1 F_2 F_3 F_4)$ donc par incompatibilités et indépendances des événements

$$p(X_4 = 0) = p^4 + q^4.$$

$(X_4 = 1) = (P_1 F_2 F_3 F_4 \cup P_1 P_2 F_3 F_4 \cup P_1 P_2 P_3 F_4) \cup (F_1 P_2 P_3 P_4 \cup F_1 F_2 P_3 P_4 \cup F_1 F_2 F_3 P_4)$ donc par incompatibilités et indépendances des événements

$$p(X_4 = 1) = p q^3 + p^2 q^2 + p^3 q + q p^3 + q^2 p^2 + q^3 p = 2pq(q^2 + pq + p^2) = 2pq((p+q)^2 - pq) = 2pq(1 - pq).$$

$(X_4 = 2)$ est plus compliqué.

$(X_4 = 3) = (P_1 F_2 P_3 F_4 \cup F_1 P_2 F_3 P_4)$ donc par incompatibilités et indépendances des événements

$$p(X_4 = 3) = p(P_1 F_2 P_3 F_4) + p(F_1 P_2 F_3 P_4) \quad p(X_4 = 3) = 2p^2 q^2.$$

D'où par système complet d'événements ($X_4 = 0, 1, 2$ ou 3),

$$p(X_4 = 2) = 1 - (p^4 + q^4) - 2pq(1 - pq) - 2p^2 q^2 = 1 - p^4 - q^4 - 2pq.$$

La loi de X_4 est donc :

j	0	1	2	3
$P(X_4 = j)$	$p^4 + q^4$	$2pq(1 - pq)$	$1 - p^4 - q^4 - 2pq$	$2p^2q^2$

(b) On a $E(X_4)$ qui existe car support fini et :

$$\begin{aligned} E(X_4) &= 2pq(1 + pq) + 2(1 - q^4 - p^4 - 2pq) + 3(2p^2q^2) \\ &= 2pq + 2p^2q^2 + 2pq - 2pq(p^4 + q^4) - 4pq + 6p^2q^2 \\ &= 8p^2q^2 - 2pq(p^4 + q^4) \\ &= 2pq(4pq - p^4 - q^4) \end{aligned}$$

Partie III : étude du cas $p \neq q$. Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Si on a aucun changement on a eu ou bien n Pile consécutifs ou bien n Face consécutifs.

$(X_n = 0) = \left(\bigcap_{k=1}^n P_k \right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^n F_k \right)$ (événements incompatibles et lancers indépendants) donc

$$P(X_n = 0) = p^n + q^n.$$

2. (a) $\forall a, b \in \mathbf{R}, \forall m \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} (b - a) \left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} - \sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} b^{m-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (a^k b^{m-k} - a^{k+1} b^{m-1-k}) \\ &= a^0 b^m - a^{m-1+1} b^{m-(m-1+1)} \text{ par télescope} \\ &= b^m - a^m \end{aligned}$$

(b) $(X_n = 1)$ signifie que l'on commence par P ou F et il y a un seul changement entre le 1er et le $(n-1)^{\text{ème}}$ lancer. D'où :

$(X_n = 1) = \bigcup_{k=1}^{n-1} \left(\bigcap_{i=1}^k P_i \bigcap_{i=k+1}^n F_i \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^k F_i \bigcap_{i=k+1}^n P_i \right)$ réunion d'événements incompatibles : d'où

$$\begin{aligned} p(X_n = 1) &= \sum_{k=1}^{n-1} p \left(\bigcap_{i=1}^k P_i \bigcap_{i=k+1}^n F_i \right) + \sum_{k=1}^{n-1} p \left(\bigcap_{i=1}^k F_i \bigcap_{i=k+1}^n P_i \right) \text{ les lancers sont indépendants} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^k p(P_i) \prod_{i=k+1}^n p(F_i) \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^k p(F_i) \prod_{i=k+1}^n p(P_i) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (p^k q^{n-k}) + \sum_{k=1}^{n-1} (q^k p^{n-k}) = q^n \sum_{k=0}^{n-1} (p/q)^k - q^n + p^n \sum_{k=0}^{n-1} (q/p)^k - p^n \\ &= q^n \frac{(p/q)^n - 1}{p/q - 1} - q^n + p^n \frac{(q/p)^n - 1}{q/p - 1} - p^n = q \frac{p^n - q^n}{p - q} - q^n + p \frac{q^n - p^n}{q - p} - p^n \\ &= \frac{1}{q - p} (q(-p^n + q^n) - q^n(q - p) + p(q^n - p^n) - p^n(q - p)) \\ &= \frac{1}{q - p} (-2qp^n + 2q^n p) = \frac{2pq}{q - p} (q^{n-1} - p^{n-1}). \end{aligned}$$

3. Pour avoir $n - 1$ changements en n lancers, il faut changer à chaque lancer. On commence par F ou P.

— Si n est pair il y a autant de Pile que de Face. En écrivant $n = 2m$:

$(X_n = n - 1) = \left(\bigcap_{j=1}^m P_{2j-1} F_{2j} \right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^m F_{2j-1} P_{2j} \right)$ (incompatibles) et donc

$$P(X_n = n - 1) = p^m q^m + q^m p^m = 2(pq)^m = 2(pq)^{n/2}.$$

- Si n est impair, la face par laquelle on commence est présente une fois de plus.

Notant $n = 2m + 1$, on a :

$$(X_n = n - 1) = \left(\bigcap_{j=1}^m P_{2j-1} F_{2j} P_{2m+1} \right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^m F_{2j-1} P_{2j} F_{2m+1} \right) \text{ (incompatibles) et}$$

$$P(X_n = n - 1) = p^m q^m p + q^m p^m q = p^m q^m (p + q) = (pq)^m = \boxed{(pq)^{(n-1)/2}}.$$

4. • $n = 3$ (impair)

Les résultats des trois dernières questions donnent

$$P(X_3 = 0) = p^n + q^n = p^3 + q^3,$$

$$P(X_3 = 2) = (pq)^{\frac{n-1}{2}} = pq,$$

$$P(X_3 = 1) = 2pq \frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q - p} = 2pq \frac{q^2 - p^2}{q - p} = 2pq(q + p) = 2pq,$$

et il s'agit bien des valeurs trouvées dans la Partie II.

• $n = 4$ (pair)

Les résultats des trois dernières questions donnent

$$P(X_4 = 0) = p^n + q^n = p^4 + q^4,$$

$$P(X_4 = 3) = 2(pq)^4,$$

$$P(X_4 = 1) = 2pq \frac{q^3 - p^3}{q - p} = 2pq \frac{(q - p)(q^2 + qp + p^2)}{q - p} = 2pq(q^2 + qp + p^2) = 2pq((q + p)^2 - pq) = 2pq(1 - pq),$$

et il s'agit bien encore des valeurs trouvées dans la Partie II.

5. On a Z_k qui est le nombre de changements lors du $k^{\text{ième}}$ lancer.

- (a) $Z_k(\Omega) = \{0, 1\}$ donc Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p(Z_k = 1)$.

La probabilité de changement dépend du résultat précédent. (P_{k-1}, F_{k-1}) est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(Z_k = 1) &= p([Z_k = 1] \cap P_{k-1}) + p([Z_k = 1] \cap F_{k-1}) \\ &= p_{P_{k-1}}([Z_k = 1])p(P_{k-1}) + p_{F_{k-1}}([Z_k = 1])p(F_{k-1}) \\ &= p_{P_{k-1}}(F_k)p(P_{k-1}) + p_{F_{k-1}}(P_k)p(F_{k-1}) = p \cdot q + q \cdot p = \boxed{2pq} \end{aligned}$$

$$\boxed{Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq)}.$$

- (b) On compte le nombre de changements, il faut donc additionner les variables Z_k . On a clairement :

$$\boxed{X_n = \sum_{k=2}^n Z_k.}$$

- (c) Donc d'une part d'après le cours : $E(Z_k) = 2pq$ et par linéarité de l'espérance : $E(X_n) = \sum_{k=2}^n E(Z_k)$

$$\text{donc } \boxed{E(X_n) = 2(n-1)pq.}$$

Partie IV : étude du cas $p = q$.

1. Pour $p = q = 1/2$, les lois obtenues pour X_3 et X_4 sont bien celles des lois binomiales de paramètres respectifs $\mathcal{B}(2, 1/2)$ et $\mathcal{B}(3, 1/2)$.

En effet pour X_3 :

$$\binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

2. A chaque lancer, la probabilité de changer est de $\frac{1}{2}$, que le lancer précédent ait donné P ou F. Les changements sont ici indépendants les uns des autres. On peut en effectuer $n - 1$.

X_n est un compteur de succès dans la répétition de $n - 1$ épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètres $\frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, \frac{1}{2})}.$$

Le résultat est exactement celui conjecturé grâce aux figures obtenues à la Partie I avec Python.