

TD EM5

Énergie électromagnétique

A. Chauffage par induction CCP TSI 2013 ••○

Un disque conducteur de conductivité σ , d'axe Oz vertical, de rayon b et d'épaisseur e est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ (figure 1). Ce champ magnétique possède les caractéristiques suivantes :

- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical Oz de rayon a ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ; il est dirigé verticalement suivant le vecteur unitaire $\vec{e}_z$;
- il varie de façon sinusoïdale au cours du temps selon la forme : $\vec{B}(t) = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$, où B_m représente son amplitude et ω sa pulsation.

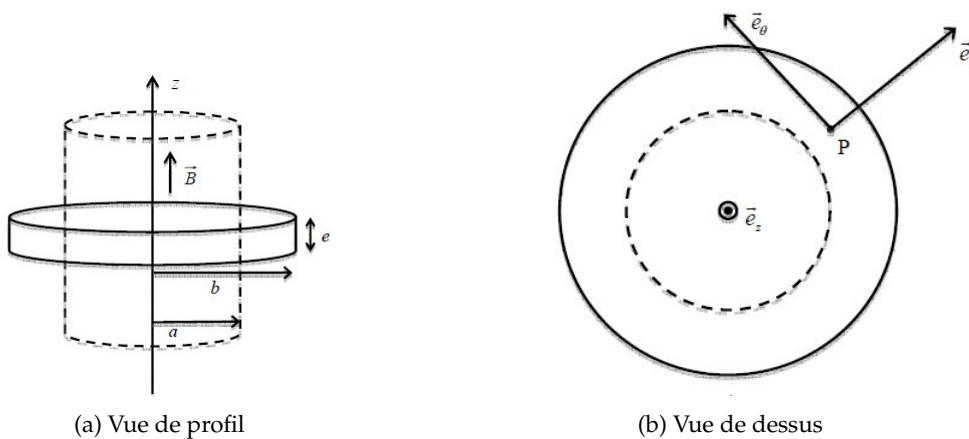


FIGURE 1 – Disque conducteur et champ magnétique

Nous admettons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le disque conducteur étant disposé dans un champ magnétique variable, il sera le siège d'un courant volumique induit $\vec{j}$;
- compte-tenu de la symétrie du système, le courant volumique induit est orthoradial et de la forme : $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$;
- dans les conditions du problème, le champ magnétique induit créé par le courant induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

1. Rappeler la relation liant le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ au champ électrique $\vec{E}$ dans un conducteur de conductivité σ .
2. On considère un contour circulaire Γ de rayon r et d'axe Oz . Déterminer la circulation $\mathcal{C}(r, t)$ du champ électrique résultant sur ce contour. On exprimera $\mathcal{C}(r, t)$ en fonction de r , $j(r, t)$ et σ .
3. Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique à travers la surface définie par le contour Γ . On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.
4. En appliquant la loi de FARADAY, déterminer l'expression du courant volumique induit $j(r, t)$ en fonction de σ , ω , r , a , B_m et t . On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.
5. Rappeler l'expression de la puissance volumique dissipée par effet JOULE.

6. En considérant que le disque conducteur est constitué par des couronnes de rayon r , de largeur dr et d'épaisseur e , déterminer l'expression de la puissance totale $\mathcal{P}_j$ dissipée par effet JOULE dans l'ensemble du disque conducteur puis sa valeur moyenne $\langle \mathcal{P}_j \rangle$. On montrera que $\langle \mathcal{P}_j \rangle$ peut se mettre sous la forme $\langle \mathcal{P}_j \rangle = A\omega^2 B_m^2$ où A est un coefficient que l'on exprimera en fonction de e , a , b et σ .

On se placera, pour la suite, dans le cas particulier où $a = b$. Dans ce cas, le coefficient A est donné par l'expression :

$$A = \frac{\pi e \sigma a^4}{16}$$

7. Le dispositif précédent est utilisé dans les plaques électriques à induction pour chauffer les casseroles et leur contenu. Comment peut-on créer, en pratique, le champ magnétique souhaité? Citer quelques avantages de ce dispositif de chauffage par rapport aux plaques électriques classiques.
8. En pratique, le champ magnétique utilisé a une pulsation ω de l'ordre de $2 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ (courant de fréquence f de l'ordre de 30 kHz). Son intensité B_m est de l'ordre de 10^{-4} T . On considère une plaque à induction de rayon $b = 10 \text{ cm}$ et une casserole dont le fond a le même rayon $a = b = 10 \text{ cm}$, une épaisseur $e = 1,0 \text{ cm}$ et une conductivité $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_j \rangle$ dissipée dans le fond de la casserole.

B. Bilan énergétique dans un cylindre conducteur _____ •••

On considère un cylindre conducteur de rayon $R = 0,80 \text{ mm}$ et de longueur $h = 120 \text{ m}$, dont la conductivité vaut $\gamma = 6,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$, aux bornes duquel on applique une différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B = 10,0 \text{ V}$.

On suppose les champs statiques et la répartition du courant uniforme sur toute la section.

1. Champ électrique

- Déterminer le champ électrique, supposé constant, dans le cylindre.
- En déduire la densité volumique de charge dans le cylindre.
- Que vaut le champ électrique à l'extérieur? Justifier.

2. Champ magnétique

- Déterminer le vecteur densité volumique de courant circulant dans le cylindre. On notera j_0 son module.
- Que vaut l'intensité du courant I ?
- En déduire le champ magnétique en tout point de l'espace de deux manières?

3. Puissance rayonnée

- Exprimer le vecteur de POYNTING en tout point de l'espace.
- Déterminer la puissance rayonnée par le champ électromagnétique à travers la surface délimitée par le cylindre.

4. Conservation de l'énergie ?

- Calculer la puissance cédée aux porteurs de charges.
- La relation de conservation de l'énergie est-elle satisfaite?
- Déterminer la résistance du conducteur.

C. Solénoïde et énergie

Un solénoïde très long de rayon R , d'axe (O, z) comporte n spires par mètre réparties uniformément, et est parcouru par un courant d'intensité I .

1. Rappeler l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.
2. En partant de la densité volumique d'énergie magnétique en tout point, déterminer l'énergie magnétique présente sur une longueur h de solénoïde.
3. En déduire le coefficient d'auto-inductance L (pour une longueur h).

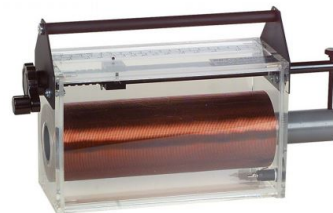


FIGURE 2 – Solénoïde

D. Champs et bilan énergétique dans une bobine

Un solénoïde infini, de section circulaire de rayon a , comprend $n = 1000$ spires par mètre, chacune étant parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On suppose que le courant varie assez lentement pour se placer dans le cadre de l'ARQS. La pulsation des signaux est de l'ordre de 10^3 rad.s^{-1} et I_0 vaut une dizaine d'ampères. On donne $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ USI}$.

1. Comment les équations de MAXWELL sont-elles modifiées si on se place dans l'ARQS?
2. Quelle inégalité forte vérifient ω , a et c dans le cadre de l'ARQS?
3. Rappeler le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ créé par un solénoïde infini en tout point de l'espace en fonction notamment du courant $i(t)$.
4. Expliquer qu'un champ électrique est présent dans le solénoïde. On admet que le champ créé $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(r, t)$.
5. En utilisant les équations de MAXWELL, montrer que $\vec{E}(M, t) = E_\theta(r, t)\vec{u}_\theta$.
6. Expliciter la fonction $E_\theta(r, t)$ en fonction des données de l'énoncé.
7. Exprimer les densités volumiques d'énergie électrique w_E et magnétique w_B . En déduire les valeurs moyennes.
8. Comparer les ordres de grandeurs de ces deux moyennes dans le cadre de l'ARQS. Commenter. On rappelle que $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$.
9. Exprimer le vecteur de POYNTING associé. Que représente-t-il? En quelle unité s'exprime-t-il?

On place dans le solénoïde un cylindre conducteur de longueur $L = 1,0 \text{ m}$, de rayon $b = 10 \text{ m}$ et de conductivité $\sigma = 10^7 \text{ USI}$. Sa capacité thermique est évaluée à $c = 1,0 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et sa densité, après mesures, vaut $8,00$.

10. Quelle est l'unité de la conductivité électrique?
11. Déterminer le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ circulant dans le cylindre.
12. Exprimer la puissance volumique cédée au cylindre. Comment nomme-t-on cette puissance?
13. Déterminer la puissance totale cédée et montrer que sa moyenne peut s'exprimer sous la forme :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \sigma \pi L \left(\frac{\mu_0 n I_0 \omega b^2}{4} \right)^2$$

14. Évaluer le temps nécessaire pour élever la température du cylindre de 50°C .
15. Citer une application de ce phénomène.

E. Impact des courant FOUCAULT

On place un cylindre conducteur d'axe Oz , de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L et de conductivité γ , dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique et on néglige les effets de bord. Les coordonnées des opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques sont fournies.

1. On admet $\vec{E} = E(r, t)\vec{u}_\theta$. Montrer que $\vec{E}(M) = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2}\vec{u}_\theta$ en utilisant deux méthodes.
2. Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet JOULE dans le cylindre.
3. Que devient la puissance moyenne dissipée par effet JOULE si, au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques, de même longueur L , de section $S'_0 = \frac{S_0}{N}$ sachant que le volume total occupé par les N cylindres est le même que précédemment ?
4. Expliquer l'intérêt du feuilletage pour la réalisation des transformateurs.

F. Condensateur en régime lentement variable.....

Un condensateur plan est constitué par deux disques conducteurs de rayon a , distants de e , d'axe Oz . Il est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

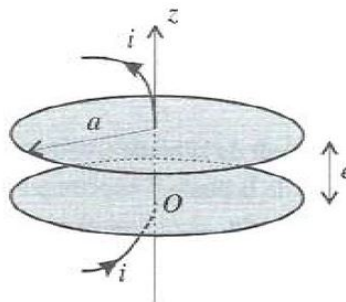


FIGURE 3 – Condensateur à basse fréquence

1. Exprimer la charge $q(t)$ portée par l'armature inférieure du condensateur en admettant que sa moyenne temporelle est nulle. En déduire la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, en convention récepteur par rapport au courant $i(t)$.
2. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ à l'intérieur du condensateur, en supposant qu'il est identique au champ d'un condensateur plan en électrostatique sans effets de bords.
3. Montrer qu'il existe un champ magnétique non nul à l'intérieur du condensateur. Calculer ce champ $\vec{B}(M, t)$ en appliquant le théorème d'AMPÈRE généralisé à un cercle quelconque d'axe Oz .
4. En déduire le vecteur de POYNTING. On appelle S la surface délimitant le condensateur (cylindre de rayon a et hauteur e). Calculer le flux du vecteur de POYNTING sortant de la surface S . Conclure.
5. Déterminer un critère de validité pour l'expression approchée du champ électrique utilisée dans cet exercice.
6. Déterminer les valeurs moyennes des densités énergétiques électrique et magnétique. A quelle condition l'énergie électromagnétique contenue dans le condensateur peut-elle être considérée comme purement électrique ? Commenter.

Remarque : Pour répondre à la question 3, on peut aussi utiliser l'équation de MAXWELL-AMPÈRE, en admettant qu'il n'existe pas de champ statique.

G. Modèle de DRÜDE de la conduction électrique.....

Faisant abstraction de l'agitation thermique, on note $\vec{v}$ la vitesse d'ensemble que prennent les porteurs de charges, de concentrations particulière $n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$, de charge $q = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ et de masse $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$. On suppose que l'action du réseau sur les porteurs est modélisable par une force de "frottement fluide" de la forme : $-k\vec{v}$ où k est une constante.

1. Les porteurs sont initialement immobiles et on établit un champ électrique permanent $\vec{E}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$. On introduira deux constantes $\vec{v}_l$ et τ à l'aide desquelles on réécrira l'équation différentielle.
2. Déterminer $\vec{v}(t)$ et interpréter physiquement l'introduction des deux constantes.
3. Montrer qu'en régime permanent, le modèle rend bien compte de la loi d'OHM locale. Exprimer, la conductivité γ_0 . Calculer numériquement τ pour une conductivité valant $\gamma \approx 6 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Commenter.

H. Équations de MAXWELL dans un conducteur ohmique _____ ●●○

On considère un conducteur métallique considéré comme ohmique : il vérifie donc la loi d'OHM locale $\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$.

1. Démontrer l'équation de conservation de la charge à partir de deux des équations de MAXWELL.
2. En partant de l'équation de conservation de la charge et d'une équation de MAXWELL, déterminer l'équation différentielle du premier ordre satisfaite par la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ dans un métal ohmique. On suppose alors qu'autour d'un point M du métal, pour une raison quelconque, la charge volumique à l'instant $t = 0$ est non nulle et égale à ρ_0 . Donner l'évolution de $\rho(M, t)$. En déduire un temps typique de disparition de la charge noté τ' . Faire l'application numérique pour le cuivre. Que peut-on en conclure quant à la valeur de ρ ?
3. On prendra $\rho = 0$. Comment expliquer le paradoxe apparent suivant : "dans un milieu localement vide de charges, il peut y avoir un courant, donc des charges qui se déplacent"?
4. Exprimer le rapport entre le courant de déplacement et le courant de conduction pour un champ électrique de pulsation ω . A quelle condition sur la pulsation peut-on négliger le premier devant le second? Calculer numériquement la fréquence limite. On supposera désormais que l'on peut négliger le courant de déplacement.
5. Écrire les équations de MAXWELL dans le conducteur étudié. En déduire l'équation du champ électrique.

On utilisera la relation suivante :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

I. Décharge d'une sphère chargée dans l'air _____ ●●●

Une boule porte une charge uniformément répartie sur sa surface. On notera Q_0 la valeur initiale de cette charge. Cette boule se trouve dans l'air, gaz légèrement conducteur, au travers duquel la boule se décharge progressivement.

On rappelle l'équation de POYNTING (bilan local d'énergie électromagnétique) :

$$\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

1. Analyser les symétries du problème. Conclure sur les champs.
2. Interpréter physiquement chaque terme de l'équation de POYNTING. En déduire le champ électrique à l'extérieur de la boule à tout instant.
3. Déterminer la charge portée par la boule à tout instant.
4. Déterminer l'énergie dissipée dans le milieu au cours du processus. Interpréter le résultat.

J. Sonde à effet HALL _____ Mines Ponts PSI 2016 ●●○

L'élément principal d'une sonde à effet HALL est une plaquette constituée d'un semi-conducteur, dopé N, dans laquelle les porteurs de charges libres sont des électrons, dont la charge est $q = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{C}$.

La densité volumique de ces électrons dans cette plaquette est $n = 3,30 \times 10^{18} \text{m}^{-3}$.

Cette plaquette possède la forme d'un parallélépipède, dont les six faces sont numérotées conformément à la figure 4, ses dimensions sont $a = 3 \text{ mm}$, $b = 6 \text{ mm}$ et $c = 0,2 \text{ mm}$. Les faces 1 et 3 sont reliées aux bornes d'une source de courant idéale, délivrant un courant d'intensité $I_0 = 10 \text{ mA}$ constante.

En régime permanent, on peut considérer que les lignes de courant sont rectilignes et parallèles, le vecteur densité volumique de courant est uniforme et s'écrit $\vec{j} = j\hat{u}_x$.

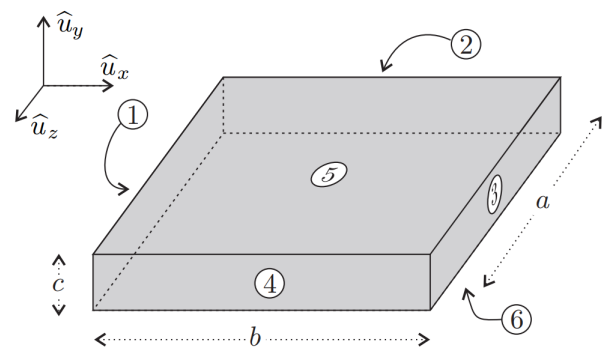


FIGURE 4 – Plaquette de semi-conducteur

1. Établir l'expression de la vitesse $\vec{v}$ des porteurs de charge et calculer sa norme.

La plaquette est placée dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique considéré comme constant, tel que $\vec{B} = B\hat{u}_y$ avec $B > 0$.

2. Après avoir exprimé la force magnétique s'exerçant sur une charge mobile, justifier que des densités surfaciques de charge apparaissent sur les faces 2 et 4. On précisera les signes de ces densités.

Ces densités surfaciques de charges créent un champ électrique $\vec{E}_h = E_h\hat{u}_z$ au sein de la plaquette. En régime permanent, la vitesse des porteurs de charge reste inchangée.

3. En appliquant le principe fondamental de la mécanique à un porteur de charge en projection sur $\hat{u}_z$, déterminer l'expression de E_h . Montrer qu'il apparaît une différence de potentiel $u_h = V_4 - V_2$ entre les faces 4 et 2. Celle-ci est appelée tension de HALL, on l'écrira sous la forme $u_h = \gamma B$ en précisant l'expression et la valeur numérique de la constante γ .
4. Expliquer comment ce phénomène peut être mis en place dans un teslamètre.