

Chapitre 3

Applications linéaires

Sommaire

3.1 Applications linéaires	56
3.1.1 Généralités	56
3.2 Noyau d'une application linéaire	58
3.3 Image d'une application linéaire	59
3.4 Applications linéaires et dimension finie	59
3.4.1 Image d'une base par une application linéaire	60
3.4.2 Rang d'une application linéaire	60
3.4.3 Caractérisation des isomorphismes	61
3.5 Applications linéaires et matrices	61
3.5.1 Matrice colonne associée à un vecteur	61
3.5.2 Matrice associée à un morphisme	62
3.5.3 Expression de l'image d'un vecteur	63
3.5.4 Rang d'une matrice	63
3.5.5 Opérations	64
3.5.6 Polynômes d'endomorphisme, polynôme matriciel	65
3.6 Noyau et image	65
3.7 Changements de base	67
3.7.1 Matrice de passage	67
3.7.2 Changement de coordonnées d'un vecteur	67
3.7.3 Effet du changement de base sur la matrice d'un endomorphisme	68

L'objectif de ce chapitre est une étude élémentaire des applications linéaires approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des endomorphismes et des matrices.

Cette partie du programme aura de nombreuses applications, que ce soit en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables (second semestre) ou en probabilités (chaînes de Markov).

Compétences attendues. $\Rightarrow$ Montrer qu'une application est linéaire.

$\Rightarrow$ Montrer qu'une application linéaire est un endomorphisme.

$\Rightarrow$ Trouver le noyau et l'image d'une application linéaire.

$\Rightarrow$ Montrer qu'une application linéaire est injective ou surjective.

- ⇒ Connaître et savoir utiliser le théorème du rang.
- ⇒ Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme ou un automorphisme.
- ⇒ Déterminer la matrice d'une application linéaire.
- ⇒ Déterminer matriciellement le noyau, l'image et le rang d'une application linéaire.
- ⇒ Connaître et savoir utiliser la formule de changement de bases.

Le mathématicien Arthur Cayley, né le 16 août 1821 à Richmond, ville de la banlieue de Londres, passe les huit premières années de sa vie à Saint Petersburg, en Russie, où ses parents, de prospères commerçants, se sont établis. Lorsqu'ils reviennent en Angleterre, le jeune Arthur est envoyé dans une école privée, puis au King's College School. Il y montre de vives dispositions pour les mathématiques, si bien que ses professeurs l'encouragent à poursuivre ses études dans ce domaine, contre l'avis de son père qui souhaitait qu'il reprenne l'activité familiale.

Ainsi, en 1838, Cayley entre au Trinity College de Cambridge où il excelle dans toutes les disciplines, en particulier en langues et en mathématiques. Il obtient une bourse universitaire et publie alors une trentaine d'articles. Cependant cette bourse a une durée limitée et Cayley, qui n'a pas d'espoir d'obtenir immédiatement une chaire universitaire, doit choisir un métier. Il prépare durant trois ans l'examen d'accès au barreau, qu'il réussit en 1849. Cayley exerce alors pendant 14 ans la profession d'avocat. Il se spécialise dans le transfert de propriété, une activité qu'il juge ennuyeuse, mais qui lui laisse du temps pour sa passion, les mathématiques. Durant les années où il est avocat, Cayley publie plus de 200 articles! En 1863, une nouvelle chaire de mathématiques est créée à Cambridge et est proposée à Cayley. Celui-ci accepte aussitôt et abandonne le métier d'avocat.

Cayley occupe sans discontinuité cette chaire jusqu'à sa mort, si ce n'est une visite de 5 mois à Baltimore en 1881 pour rencontrer son ami Sylvester qui y est professeur. Déjà très prolifique auparavant, Cayley augmente encore sa productivité mathématique, publiant en tout plus de 900 articles. Cela en fait le 4ème mathématicien le plus prolifique, après Euler, Cauchy et Erdős. Il est aussi très actif dans le combat pour faire accepter les femmes à Cambridge.

En algèbre linéaire : Cayley est le premier à introduire formellement les matrices, à étudier leurs produits et à remarquer qu'il n'est pas commutatif. Il introduit l'équation caractéristique d'une matrice et énonce ce que nous appelons le théorème de Cayley-Hamilton.

3.1 Applications linéaires

On rappelle que la lettre E désigne un espace vectoriel et la lettre F désigne un autre ev.

3.1.1 Généralités

Définition 3.1.

On appelle application linéaire de E dans F (ou morphisme), toute application f de E dans F telle que :

1. $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$, et
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Propriété 3.1.

f est une application linéaire de E dans F si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Définitions 3.2 ([🔗 endo-auto-iso-..., notations]).

1. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$, et si $F = \mathbb{R}$, on parle de forme linéaire.
2. On appelle endomorphisme de E , toute application linéaire de E dans E . L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}(E)$.
3. On appelle isomorphisme de E dans F , toute application linéaire bijective de E dans F . On dit que E et F sont isomorphes s'il existe une telle application.
4. On appelle automorphisme de E , toute application linéaire bijective de E dans E (ou tout endomorphisme bijectif de E , ou tout isomorphisme de E dans E).
L'ensemble des automorphismes de E se note $GL(E)$.

Propriété 3.2.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{R}$ -ev.

De même $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}$ -ev.

Définition 3.3. Si E et F sont des ev dotés de bases canoniques et si f est un isomorphisme de l'un dans l'autre, transformant une base canonique de l'un en une base canonique de l'autre, on dit alors que f est un isomorphisme canonique et que les deux espaces sont canoniquement isomorphes.

Exemples 3.1 (d'application linéaire).

L'application identité de E , notée id_E est un automorphisme de E .

L'application nulle de E est l'application qui, à tout X de E associe 0_E est un endomorphisme.

L'application f qui à toute fonction polynomiale de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le réel $\int_0^1 P(t) dt$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}$.

Propriétés 3.3.

1. Pour toute application linéaire de E dans F , on a : $f(0_E) = 0_F$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tous vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ de E et tous réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Propriétés 3.4 ([🔗 Composées]).

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
2. Si f est un automorphisme de E alors f^{-1} est aussi un automorphisme de E .
3. En particulier la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E .
4. En particulier la composée de deux automorphismes f et g de E est un automorphisme de E .
Et on a dans ce cas : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition 3.4.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose par convention $f^0 = Id_E$ et pour tout entier naturel p non nul, on définit l'endomorphisme f^p par la relation :

$$f^p = f^{p-1} \circ f.$$

Pour tout entier naturel p non nul, f^p est la composée de p endomorphismes tous égaux à f .

Propriété 3.5.

Soit F et G deux ev tels qu'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre. Alors f transforme toute famille libre de F en une famille libre de G .

EXERCICE 3.1.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x - y, 2x - 3y, x + 2y)$. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 3.2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], f(P) = P'$. (P' étant la dérivée de P). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

3.2 Noyau d'une application linéaire

Définition 3.5 ([[🔗](#) Noyau]).

Soit f une application linéaire de E dans F . On appelle noyau de f , noté $\text{Ker}(f)$ le sous-ensemble de E défini par : $\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$.

Remarques.

Pour déterminer le noyau de f , on est conduit à la résolution d'un système linéaire.

On exprimera l'ensemble des solutions sous la forme d'un Vect().

Trouver le noyau de f , c'est trouver l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0_F$. (ou encore l'ensemble des antécédents de 0 par f .)

Propriété 3.6 ([[🔗](#) sev]).

Soit f une application linéaire de E dans F . $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exemples 3.2.

$$\text{ker}(id_E) = \{0_E\}.$$

$$\text{ker}(0_{E,F}) = E.$$

Propriété 3.7 ([[🔗](#) Injectif]).

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est injective ssi $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration : Si f est injective, $f(u) = 0_F = f(0_E)$ implique $u = 0_E$; le noyau de f est bien réduit au vecteur nul. Réciproquement, supposons que le noyau de f est réduit au vecteur nul. Montrons que f est injective. Pour cela, supposons que $f(u) = f(v)$; par linéarité, on a $f(u - v) = 0_F$ c'est à dire $u - v = 0_E$ et donc $u = v$: f est bien injective.

EXERCICE 3.3.

1. On reprend l'exo 3.2, déterminer $\text{Ker}(f)$.
2. On reprend l'exo 3.1, déterminer $\text{Ker}(f)$.

3.3 Image d'une application linéaire

Définition 3.6 (Image).

Soit f une application linéaire de E dans F . On appelle image de f , noté $Im(f)$ le sous-ensemble de F défini par : $Im(f) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$.

C'est l'ensemble des images des éléments de E .

Propriété 3.8 (Cas où E est de dimension finie).

Soit f une application linéaire de E dans F . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E . $Im(f)$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$, c'est à dire :

$$Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Remarques.

ATTENTION :

La propriété 3.8 permet de déterminer l'image d'une application.

On y obtient une famille génératrice de $Im(f)$, il faut ensuite voir si cette famille est libre pour donner une base de $Im(f)$.

On peut calculer $Im(f)$ à partir d'une autre base, que la base canonique.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de E et x un élément de E , alors on sait que x s'écrit dans cette base :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Donc $f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n)$. (car f est linéaire) donc $f(x)$ s'écrit bien comme combinaison linéaire de la famille $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

EXERCICE 3.4. 1. On reprend l'exo 3.2, déterminer $Im(f)$.

2. On reprend l'exo 3.1, déterminer $Im(f)$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, définie par $\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(u) = (x + y; 2x + 2y)$.

Donner $Ker(f)$ et $Im(f)$.

Exemples 3.3.

$$Im(id_E) = E.$$

$$Im(0_{E,F}) = \{0_F\}.$$

Propriété 3.9 (Surjectif).

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est surjective ssi $Im(f) = F$.

EXERCICE 3.5.

1. On reprend l'exo 3-4-3, f est-t-il surjectif?

2. On reprend l'exo 3.2, f est-t-il surjectif?

3.4 Applications linéaires et dimension finie

Tous les ev considérés dans ce paragraphe seront de dimension finie.

3.4.1 Image d'une base par une application linéaire

Propriétés 3.10.

Soit E et F deux ev de dimension finies et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Toute application linéaire f de E dans F est parfaitement définie par la donnée des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

Conséquence :

Si f et g (deux applications linéaires de E dans F) coïncident sur la base $\mathcal{B}$, alors $f = g$.

L'image par f d'une base de E est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$: $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Propriétés 3.11 (🔗 Injection et familles libres).

Une application linéaire injective transforme les familles libres en familles libres.

En conséquence, si E et F sont de dimension finie et si f est injective de E dans F , alors la dimension de F est supérieure à celle de E .

Propriétés 3.12 (🔗 Surjection et familles génératrices).

Une application linéaire surjective transforme les familles génératrices en familles génératrices.

Ainsi si f est surjective de E dans F , alors la dimension de E est supérieure à celle de F .

Propriétés 3.13 (🔗 Bijection et bases).

Soit E et F deux ev de dimension finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si f est bijective alors l'image par f d'une base de E est une base de F .

S'il existe une base de E dont l'image par f est une base de F , alors f est bijective.

Théorème 3.14 (🔗 Isomorphisme avec $\mathbb{R}^n$).

Soit E et F deux ev de dimension finies et s'il existe un isomorphisme de E dans F alors $\dim E = \dim F$.

En particulier, tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Remarque.

En dimension finie, il ne peut donc exister d'application linéaire bijective qu'entre deux espaces de même dimension.

Exemple 3.4.

$\mathbb{R}_3[x]$ et $\mathbb{R}^4$ sont isomorphes : concrètement cela permet d'identifier les espaces de dimension finie aux espaces de référence, tout travail sur les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, se ramène à un travail sur l'ev $\mathbb{R}^4$.

3.4.2 Rang d'une application linéaire

Définition 3.7 (🔗 Rang).

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f , noté $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , le rang de f est le rang de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Théorème 3.15 (🔗 du rang).

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a : $\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f)$.

EXERCICE 3.6.

Déterminer le rang de l'application f définie de $\mathbb{R}_2[x]$ vers $\mathbb{R}^3$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[x], f(P) = (P(1), P'(1), P(0))$.

3.4.3 Caractérisation des isomorphismes

Propriétés 3.16 (Caractérisation).

Soit E et F deux ev de dimension finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si $\dim E = \dim F$ alors : f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.
2. Tout endomorphisme de E injectif est un automorphisme de E .
3. Tout endomorphisme de E surjectif est un automorphisme de E .
4. Si $\dim E = \dim F = n$ alors f bijective ssi $\operatorname{rg}(f) = n$.

EXERCICE 3.7.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = AM$.

Que peut-on dire de f ?

EXERCICE 3.8.

Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (2x + 5y - 2z, -3x + y, x + 4y + 4z)$.

Montrer que $f \in GL(\mathbb{R}^3)$.

3.5 Applications linéaires et matrices

3.5.1 Matrice colonne associée à un vecteur

Définition 3.8.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $x \in E$, il existe des réels uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que : $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. (coordonnées de x dans la base

$\mathcal{B}$. On note alors $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, le vecteur colonne associé à x dans la base $\mathcal{B}$.

On le note parfois : $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$.

Exemple 3.5.

Soit $x = (1, -3, 5, 7) \in \mathbb{R}^4$. Quel est le vecteur colonne associé à x dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?

Propriétés 3.17. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors son vecteur colonne dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$. Alors le vecteur colonne associé à P dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Remarques.

-Attention ce n'est vrai que pour le vecteur colonne dans la base canonique!!!! Pour les autres bases ce n'est pas vrai!!!!

- Attention à l'ordre des coefficients du polynôme dans le vecteur colonne : commencer par le coefficient constant pour finir par celui de x^n .

Encore une fois, cette propriété ne fonctionne qu'avec la base canonique!!!

Propriété 3.18.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . L'application qui à un vecteur $x \in E$ associe son vecteur colonne dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3.5.2 Matrice associée à un morphisme

Définition 3.9.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un espace vectoriel de dimension finie p .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F .

On note $(a_{1i}, \dots, a_{pi})$ les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $(f_1, \dots, f_p)$:

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^p a_{ki} f_k.$$

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice de terme général a_{ij} . On note cette matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Exemple 3.6.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$f(e_1) = -2e_1 + e_2 + e_3$$

$$f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3$$

$$f(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3$$

$$\text{Alors : } M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques.

-La construction de M se fait par colonne.

M a sa j -ième colonne formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Si $n = p$, M est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la j -ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

-Les coordonnées de $f(e_i)$ étant uniques, la matrice associée à f dans les bases données est unique.

-Réciproquement à toute matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, il correspond une unique application $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

-Application identité :

On considère l'application id_E . Pour tout $e_j \in \mathcal{B}_E$, on a $id_E(e_j) = e_j$ donc on en déduit :

$M_{\mathcal{B}_E}(id_E) = I_p$, où I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

EXERCICE 3.9.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[x], f(P)(x) = (x-1)P'(x) + 3P(x)$.

Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

EXERCICE 3.10.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X) = AX - XB$.

Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Théorème 3.19.

L'application Φ de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ qui à toute application linéaire associe la matrice $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme.

En particulier, l'application qui à tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ égale à np .

Conséquence : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Si $\dim E = \dim F$ alors $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$.

3.5.3 Expression de l'image d'un vecteur

Théorème 3.20.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tout $x \in E, y \in F$, on note X et Y leurs vecteurs colonnes dans les bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ de F .

Alors on a :

$y = f(x) \iff Y = AX$, où A est la matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

3.5.4 Rang d'une matrice

Définition 3.10 (Rang d'une matrice).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle rang d'une matrice A , le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 3.7.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $rg(A) = 3$ car la famille $\mathcal{L} = ((1, -1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 1, 2), (1, 1, 0, 2, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^5$.

Propriétés 3.21.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Une matrice et sa transposée ont même rang : $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$.
2. Une matrice et une réduite de Gauss de A ont le même rang.
3. $\text{rg}(A) = 0$ ssi $A = 0$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors A est inversible ssi $\text{rg}(A) = n$.

Théorème 3.22.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un espace vectoriel de dimension finie p .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F .

Soit M la matrice $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$, matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors on a : $\text{rg}(f) = \text{rg}(M)$.

Le rang d'une application linéaire est égal au rang de n'importe laquelle de ses matrices.

3.5.5 Opérations**Propriétés 3.23** (Addition et multiplication par un réel).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un espace vectoriel de dimension finie p .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F .

Soit la matrice $A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$, matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et soit la matrice $B_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$, matrice de g relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors on a :

- la matrice de $f + g$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice $A + B$.
- La matrice de λf relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice λA .

Propriétés 3.24 ([🔗 [Produit et composition](#)]).

Soit G un autre espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}_G$. Soient aussi $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ Alors on a : $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$. Conséquence :

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on a donc pour tout entier k , $M_{\mathcal{B}_E}(f^k) = [M_{\mathcal{B}_E}(f)]^k$.

Remarque.

Attention à ne pas changer l'ordre dans le produit de matrice car les matrices ne commutent pas!!!!

Propriété 3.25 ([🔗 [Application réciproque](#)]).

Soit u un endomorphisme de E et M sa matrice relative à la base $\mathcal{B}_E$. Alors u est bijectif si et seulement si M est inversible et dans ce cas M^{-1} est la matrice de u^{-1} relativement à la base $\mathcal{B}_E$.

Remarque.

Lorsque l'on dispose d'un endomorphisme et de sa matrice dans une base, pour savoir si l'endomorphisme est bijectif, il suffit de regarder si sa matrice est inversible.

EXERCICE 3.11.

On reprend l'exo 3.9. f est-t-il bijectif?

3.5.6 Polynômes d'endomorphisme, polynôme matriciel

Définition 3.11.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et sa matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ relativement à une base de E .

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$. On note $P(f)$ l'endomorphisme défini par : $P(f)(x) = \sum_{k=0}^p a_k f^k(x)$ où $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k fois)

On note $P(A)$ la matrice $P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k$.

Exemple 3.8.

Si $P(x) = 3x^2 - x - 2$, alors $P(f) = 3f^2 - f - 2Id_E$ et $P(A) = 3A^2 - A - 2I$.

Propriétés 3.26.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, α, β deux nombres réels, on a :

$(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$ et $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

$(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$ et $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

Définition 3.12 ([\[L\] Polynôme annulateur](#)).

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de f ssi $P(f) = 0_{E,E}$

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[x]$. Si $P(A) = 0$, on dit que P est un polynôme annulateur de A .

EXERCICE 3.12.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Montrer que P est un polynôme annulateur de A .

EXERCICE 3.13.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Montrer que P est un polynôme annulateur de A .

En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I .

3.6 Noyau et image

Dans ce paragraphe, on considère un ev E de dimension finie n , et F un espace vectoriel de dimension finie n .

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, soit la matrice $A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et pour tout vecteur x de E , on note X le vecteur colonne dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 3.13 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors l'application :

$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto AX \end{cases}$, est une application linéaire, dite application linéaire canoniquement associée à A .

Exemple 3.9.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, alors l'application linéaire f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, canoniquement associée à A est définie par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = AX, \text{ soit } f(X) = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ x - 4z \end{pmatrix}.$$

Définition 3.14 (Noyau d'une matrice).

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle noyau de A , et on note $\text{Ker}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}.$$

Propriété 3.27 ([[🔗](#) Lien entre noyau d'une application linéaire et matrice]).

Pour tout vecteur x de E , $x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow AX = 0$.

EXERCICE 3.14.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans une base de E est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Donner $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(f)$.

Définition 3.15 (Image d'une matrice).

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On appelle image de A , notée $\text{Im}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Il s'agit de l'image de l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Propriété 3.28 ([[🔗](#) Image d'une application linéaire et matrice]).

On a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$, la famille $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ et les coordonnées des vecteurs de cette famille dans la base $\mathcal{B}$ sont données par les colonnes de A .

Ainsi dans certains cas, on peut définir $\text{Im}(f)$ simplement en observant les colonnes de A .

EXERCICE 3.15.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donner $\text{Im}(J)$ et $\text{Im}(f)$.

Remarques. Le rang d'une matrice est le rang de l'endomorphisme canoniquement associé à cette matrice.

On retrouve bien la définition donnée en 3.10.

La commande Python `matrix_rank()` de la librairie `numpy.linalg` renvoie le rang d'une matrice.

Théorème 3.29 ([[🔗](#) du rang matrice]).

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\text{On a : } n = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A).$$

Propriétés 3.30 ([[🔗](#) Conséquences]).

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes (resp. lignes) forment une famille liée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est non inversible.

En particulier :

Toute matrice ayant une colonne (resp. ligne) nulle est non inversible.

Toute matrice ayant deux colonnes (resp. lignes) proportionnelles est non inversible.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible $\Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$.

EXERCICE 3.16.

Discuter sans calcul de l'inversibilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7 Changements de base

On considère dans cette partie un espace vectoriel E de dimension finie n .

3.7.1 Matrice de passage

Définition 3.16 (Matrice de passage).

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ deux bases de E . On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, la matrice dont la j -ième colonne contient les coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

EXERCICE 3.17.

Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$, où $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X - 1$ et $R_2(X) = (X - 1)^2$, une autre base de cet espace. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Propriété 3.31 (Inversibilité).

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est une matrice inversible et $P^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

Remarques.

-On peut vérifier que dans l'exo précédent on a bien $P \times Q = I$.

? Le plus souvent pour déterminer P^{-1} on utilisera le pivot de Gauss sur $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ plutôt que de déterminer $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ qui pourra être plus compliqué.

Toutefois ce résultat est à bien retenir car on pourra vous demander d'interpréter $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$.

3.7.2 Changement de coordonnées d'un vecteur

Propriété 3.32 ([[🔗](#) Formule vecteurs]).

On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de l'espace vectoriel E . Soit $x \in E$. On note X le vecteur colonne associé à x dans la base $\mathcal{B}$, X' le vecteur colonne associé à x dans la base $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors on a :

$$X = P X'.$$

EXERCICE 3.18.

Reprenons l'exo 3.17. Déterminer à l'aide de la proposition précédente les coordonnées du polynôme $R(X) = 4X^2 - 3X + 7$ dans la base $\mathcal{B}'$.

3.7.3 Effet du changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Propriété 3.33 ([🔗 Formule matrices](#)).

On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de l'espace vectoriel E et f un endomorphisme de E . On pose $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. Alors on a :

$$M = PM'P^{-1}.$$
EXERCICE 3.19.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(aX^2 + bX + c) = aX^2 - (b + 4a)X + 6a + 4b + 3c$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les deux bases de l'exo 3.17. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$, puis en déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Définition 3.17 ([🔗 Matrices semblables](#)).

On dit que M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si il existe une matrice inversible P telle que

$$M' = P^{-1}MP.$$

Remarque.

Deux matrices associées à un même endomorphisme mais relatives à deux bases différentes sont donc semblables.

Propriété 3.34 ([🔗 Endomorphisme et matrices semblables](#)).

Deux matrices sont semblables ssi elles sont la matrice d'un même endomorphisme relatives à deux bases différentes.

La principale utilisation des matrices semblables vient de la propriété suivante :

Propriété 3.35 ([🔗 Puissance de matrices](#)).

Soient M et M' deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible telle que $M = PM'P^{-1}$, alors : $\forall k \in \mathbb{N}, M^k = PM'^kP^{-1}$.

Démonstration :

Cette démonstration est à refaire à chaque fois que vous utiliserez cette propriété.

Démontrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PM'^kP^{-1}$ est vraie.

Au rang 0 : on a d'une part $M^0 = I$ et d'autre part $PM'^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$. Donc c'est bien vraie au rang 0.

Soit k un entier naturel fixé. Supposons $M^k = PM'^kP^{-1}$ vraie.

Hérédité : Alors on a $M^{k+1} = M^k \times M = PM'^kP^{-1} \times PM'P^{-1} = PM'^{k+1}P^{-1}$. Donc c'est vraie au rang $n + 1$.

Ainsi on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PM'^kP^{-1}$.

Ainsi si on sait bien calculer M'^k on peut en déduire la valeur de M^k . Les matrices dont les puissances sont les plus facile à calculer sont les matrices diagonales (cf cours de première année).

Le but maintenant va donc être lorsqu'on se donne un endomorphisme de trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. C'est ce que l'on va voir dans le chapitre réduction des endomorphismes.

• 📌 Résumé

Montrer que f est une applications linéaire de E dans F et déterminer la matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Définition : Définie sur E à valeurs dans F . ($f(u)$ calculable et $f(u) \in F$)
Pour tout u et v de E et α réel, $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$
Il faut ici choisir l'écriture de u et v en fonction de la définition de E et de f .
- Définition : On calcule les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, puis leurs coordonnées, puis on met ces coordonnées en colonne.

Liens avec les matrices :

- $f(u)$ se calcule via les coordonnées de u par : $\text{coord}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ d'où l'image. **N.B.** attention au choix de la base!
- Formule de changement de base pour $f \in \mathcal{L}(E)$.
Utilisation : on a déterminé la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ et dans une base $\mathcal{B}'$ de E et on en déduit $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ (matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, formule : $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$)
- Si f est bijective, la matrice de sa réciproque est $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$ l'inverse de sa matrice.
- La matrice associée à une combinaison d'applications linéaires est la combinaison des matrices.
- La matrice associée à une composée est le produit de leurs matrices. (C'est l'origine de la formule de changement de base)

Bijektivité de $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

Il est équivalents de dire :

f injective; f surjective; f bijective; $\ker(f) = \{0\}$ (si $f(u) = 0$ alors $u = 0$);
 $\text{Im}(f) = E$; $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ inversible; colonnes de $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ libres.

Déterminer le noyau de $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- u appartient au noyau si et seulement si $f(u) = 0$
- On détermine une base du noyau en résolvant $f(u) = 0$ (écriture de u à adapter à la définition de f et de E) et en paramétrant.
- C'est un sous espace vectoriel de E .

Déterminer l'image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- On montre que v est dans l'image en cherchant et en trouvant $u \in E$ tel que $f(u) = v$ (écriture de u à adapter à la définition de f et de E)
- On a la dimension de $\text{Im}(f)$ par le théorème du rang.
- On a $\text{Im}(f)$ en calculant $\text{vect}(f(e_1) \cdots f(e_n))$. Ne pas oublier d'en donner une base en prouvant que la famille $f(e_1) \cdots f(e_n)$ est libre
- C'est un sous espace vectoriel de F .

Feuille d'exercices n°3

APPLICATIONS LINEAIRES.

Exercice 1. [Montrer qu'une application est linéaire]

1. Montrer que l'application $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto \begin{pmatrix} 2x - t & y + t \\ 3x + z & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est une application linéaire.
2. Soit $M = (M_{i,j})_{(i,j) \in [|1,n|]^2}$, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que l'application " trace " Tr de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est une application linéaire. $Tr(M) = \sum_{i=1}^n M_{i,i}$.
3. Montrer que l'application f définie pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, par $f(P(X)) = XP'(X) - 2P(X+1)$ est linéaire.
4. Soit g l'application de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, définie par $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$. Montrer que g est une application linéaire.

Exercice 2.

Montrer qu'une application est un endomorphisme

1. Montrer que l'application f définie pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, par $f(P(X)) = X^2P'(X) - 2XP(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'application Φ , définie pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par $\Phi(X) = AX - XB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par ; $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = AMA$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de f si A est inversible?
4. Soient u et v les applications qui, à toute fonction polynomiale P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe les fonctions $u(P)$ et $v(P)$ définies pour tout réel x par : $u(P)(x) = -2P(x) + 2xP'(x)$ et $v(P)(x) = 2xP(x) - x^2P'(x)$. Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$.
Montrer que $u \circ v - v \circ u = 2v$ et que $\forall p \in \mathbb{N}, u \circ v^p - v^p \circ u = 2pv^p$.

Exercice 3. [Noyau]

1. Déterminer une base du noyau de l'application linéaire définie par : $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto \begin{pmatrix} 2x-t & y+t \\ 3x+z & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. f est-elle injective?
2. Soit l'application f définie pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, par $f(P(X)) = X^2 P'(X) + XP(X)$; montrer que f est linéaire et donner son noyau, ainsi que la dimension de $\text{Ker}(f)$. f est-elle injective?
3. Soit E un ev de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur x de E , tel que $u^2(x) \neq 0_E$ et $u^3(x) = 0_E$. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$ et donner $\dim(\text{Ker}(u))$. (FAIRE AVANT EXO 8-1)
4. Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = (P(0), P(1), P(2))$. Montrer que f est linéaire, donner son noyau et en déduire que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. [Noyau et image]

Soit E un ev et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
3. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.

Exercice 5. [Noyau et image]

Soit E un ev et f un endomorphisme de E , tel que : $f^2 - 2f = 0$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \text{Im}(f)$.
2. Si de plus $\dim(E) = n$, montrer que $\text{Im}(f - 2\text{Id}) = \text{Ker}(f)$.

Exercice 6. [Noyau et image]

Soit l'application f définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = x - 2y + z$.

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$
2. Déterminer $\text{Im}(f)$.
3. En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$ et en donner une base.

Exercice 7. [Image]

1. Soit l'application linéaire f définie pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, par $f(P(X)) = X^2 P'(X) + XP(X)$, déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
2. Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, définie par $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$.
Déterminer $\text{Im}(g)$.
3. Soit E un ev de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur x de E , tel que $u^2(x) \neq 0_E$ et $u^3(x) = 0_E$. Déterminer $\dim(\text{Im}(u))$. (Utiliser exo 3-3)
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par : $S(P(X)) = XP'(X) + P(X)$. Montrer que S est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. S est-elle surjective? S est-elle un automorphisme?

Exercice 8. [Base]

1. Soit E un ev de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur x de E , tel que $u^2(x) \neq 0_E$ et $u^3(x) = 0_E$. Montrer que la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de E .
2. Soit E un ev de dimension $n, n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tels que : $f^n = 0, f^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E, x \notin \text{Ker}(f^{n-1})$. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

Exercice 9. [Rang]

Soit l'application f définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et en déduire le rang de f .
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. Déterminer $f \circ f$.

Exercice 10. [Théorème du rang]

Soit $M = (M_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, étudier l'injectivité de l'application linéaire " trace" Tr de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, $Tr(M) = \sum_{i=1}^n M_{i,i}$.

Exercice 11. [Automorphisme-Isomorphisme]

1. Soit T l'application définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, par $\forall P \in \mathbb{R}[X], T(P(X)) = P(X+1)$. Montrer que T est un automorphisme.
2. Soit E un ev et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f \circ f = 2Id$. Montrer que f est un automorphisme.
3. Soit E l'ev formé des applications $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$. Soit $D : E \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto f'$. Démontrer que D est un isomorphisme de E vers $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. Soit E un ev de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur x de E , tel que $u^2(x) \neq 0_E$ et $u^3(x) = 0_E$. On note $v = id + 2u$. Montrer que v est un automorphisme. (Utiliser exo 8-1 et 3-3)
5. Soit $Z : \mathbb{R}^3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4, P(X) \mapsto (P(0), P(1), P(2), P(3))$. Montrer que Z est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3[X]$ vers $\mathbb{R}^4$.

Exercice 12. [Matrice d'application linéaire]

1. On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a vu à l'exo 4-3 TD2 que la famille $b = (u, v, w)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, définie par $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $Mat_b(g)$ de l'endomorphisme g dans la base b .
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), X \mapsto AX - XB$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $(E) = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit E un ev de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur x de E , tel que $u^2(x) \neq 0_E$ et $u^3(x) = 0_E$. Déterminer N , la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{C} = (x, u(x), u^2(x))$. (utiliser 8-1 et 3-3)
 Déterminer la matrice de l'endomorphisme $3u^2 - 2u + id$ dans la base $\mathcal{C}$.
 On admet que $v = id + 2u$ est bijectif, déterminer la matrice de l'endomorphisme v^{-1} dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 13. [Polynôme annulateur]

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $P = X^2 - 5X + 4$ est un polynôme annulateur de A . En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .
 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x + y, x - y)$. Prouver que $P = X^2 - 2$ est un polynôme annulateur de f , en déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et donner f^{-1} .

Exercice 14. [ECRICOME 2000]

E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(P)(x) = P(x+1) + P(x)$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E .
 2) On note $\mathcal{B}$ la base usuelle de E constituée, dans cet ordre des quatre polynômes $1, X, X^2, X^3$.

Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 3) Montrer que f est bijectif.
 4) Calculer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
 5) Soit P un élément de E défini par : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.
 a : Expliciter en fonction des réels a_0, a_1, a_2, a_3 le polynôme $Q = f^{-1}(P)$.
 b : On considère pour tout entier strictement positif n la somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k P(k)$$

Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $(-1)^n, Q(n+1)$ et $Q(1)$.

- c : Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n, a_0, a_1, a_2, a_3 .

Exercice 15. [ESCP 1996]

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Dans tout l'exercice on associe à tout nombre réel a les vecteurs U_a, V_a et W_a définis par :

$$\begin{aligned} U_a &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ V_a &= -e_1 + (a-3)e_2 + (a-1)e_3 \\ W_a &= -2e_1 - 4e_2 + ae_3 \end{aligned}$$

et l'endomorphisme Φ_a de $\mathbb{R}^3$ défini par les conditions : $\Phi_a(e_1) = U_a, \Phi_a(e_2) = V_a, \Phi_a(e_3) = W_a$.

1. Montrer que Φ_0 est un automorphisme et déterminer la matrice de son automorphisme réciproque, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
2. (a) Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles Φ_a est un automorphisme.
 (b) Déterminer, pour chaque valeur du paramètre a , le noyau de Φ_a .
 (c) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ appartient à l'image de Φ_a .
3. On considère maintenant les trois vecteurs :
 $f_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$
 $f_2 = 2e_1 + 4e_2 - e_3$
 $f_3 = e_3$.
 (a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est; une base de $\mathbb{R}^3$.
 (b) Déterminer la matrice de Φ_1 dans cette base.

Exercice 16. [EML 2010]

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2.

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
 - On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.
1. Calculer les produits AFA , AGA , AHA .
 2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$.
 Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$

- (a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, u(S) \in \mathcal{S}_2$.
- (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
- (c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Exercice 17. [HEC 2012]

Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ on pose $g^0 = \text{Id}$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau $\ker(f)$ et l'image $\operatorname{im}(f)$ de l'endomorphisme f .
2. La matrice M est-elle inversible?
3. Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M .
4. Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M .

Exercice 18. [HEC 2014]

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On pose pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$s_1(A) = \sum_{j=1}^3 a_{1,j}, \quad s_2(A) = \sum_{j=1}^3 a_{2,j}, \quad s_3(A) = \sum_{j=1}^3 a_{3,j} \quad (\text{somme des coefficients des lignes})$$

$$s_4(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,1}, \quad s_5(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,2}, \quad s_6(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,3} \quad (\text{somme des coefficients des colonnes})$$

$$s_7(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,i}, \quad s_8(A) = \sum_{i=1}^3 a_{i,4-i}, \quad (\text{somme des coefficients des diagonales})$$

Pour tout couple $(k, l) \in [[1, 3]]^2$, on note $E_{k,l}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui situé à l'intersection de la k -ième ligne et de la l -ième colonne qui vaut 1.

On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note $\mathcal{B}$ cette base.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.

- (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Soit f l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui à toute matrice A fait correspondre le vecteur $f(A) = (s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A))$ de $\mathbb{R}^8$

2.
 - (a) Montrer que f est une application linéaire.
 - (b) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$. Écrire la matrice F de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A)$
 - (a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - (b) On note $\operatorname{Ker}(f)$ le noyau de l'application linéaire f . Montrer que $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \operatorname{Ker}(f)$.
 - (c) On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de $\operatorname{Ker}(f)$ et d'une matrice de $\operatorname{Vect}(J)$.
 - (d) Quel est le rang de l'application f ?
 - (e) Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 19. [HEC 2002]

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M , dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4

$$\text{sont les matrices définies par : } U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E , qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E , l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

- Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E , associe la matrice $AM - MB$.
 - Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E .
 - Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) . Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.
- Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

- Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E . Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.
- En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

Exercice 20. [EDHEC 2011]

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E , où pour tout réel x , on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.

On considère l'application, notée f , qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E , associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

- Montrer que f est une application linéaire.
 - En écrivant, pour tout réel x , $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $(f(P))(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E .
 - Ecrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0 , e_1 et e_2 , puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
- Vérifier que $\text{Im } f = \text{vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\text{Im } f$.
 - Déterminer $\text{Ker } f$.

Exercice 21. [EDHEC 2006]

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

- Montrer que $\text{ker } f = \text{vect}(u)$.
 - La matrice A est-elle inversible ?
- Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la 2ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

- (b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la 2ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.
- (c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
- 3. (a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
- (b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1} , puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = 0$.
- 4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).
- (a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{vect}(I, N, N^2)$. On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Établir que : $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$. En déduire que $C_A = \text{vect}(I, A, A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?