

Espaces préhilbertiens réels – TD₇

Produits scalaires et bases orthonormées

Exercice 1

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f, g) \in E^2$, on note :

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .

Réponse

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g, h) \in E^3$.

On a :

$$\varphi(\lambda.f + g, h) = (\lambda.f + g)(0)h(0) + \int_0^1 (\lambda.f + g)'(t)h'(t) dt = \lambda.f(0)h(0) + g(0)h(0) + \int_0^1 \lambda.f'(t)h'(t) + g'(t)h'(t) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\varphi(\lambda.f + g, h) = \lambda \left(f(0)h(0) + \int_0^1 f'(t)h'(t) dt \right) + g(0)h(0) + \int_0^1 g'(t)h'(t) dt = \lambda\varphi(f, h) + \varphi(g, h).$$

Donc, φ est linéaire à gauche.

De plus,

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt = g(0)f(0) + \int_0^1 g'(t)f'(t) dt = \varphi(g, f).$$

Donc, φ est symétrique.

On en déduit que φ est bilinéaire.

De plus, $\varphi(f, f) = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt$.

Or, f est à valeurs réelles, donc, $(f(0))^2 \geq 0$ et $(f'(t))^2 \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale, $\varphi(f, f) \geq 0$. Donc, φ est positive.

On suppose que $\varphi(f, f) = 0$. On a :

$$(f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0.$$

Il s'agit d'une somme de termes positifs, donc $f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$.

Comme $(f')^2$ est **continue** et positive, on en déduit que, pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t) = 0$.

Donc, f est constante.

Or, $f(0) = 0$, donc, f est la fonction nulle.

Ainsi,

φ est un produit scalaire sur E .

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t) \times Q(t) \times e^{-t} dt$.

1. Soit $(P, Q) \in E^2$. Montrer que l'intégrale $\varphi(P, Q)$ converge.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .
3. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
4. Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - a \times t^2 - b \times t - c)^2 \times e^{-t} dt$.

Réponse

1. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Comme $t \mapsto P(t)Q(t)$ est polynomiale, donc, par croissances comparées, $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrale en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$), donc, par théorème de comparaison, $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$.

Donc,

l'intégrale $\varphi(P, Q)$ converge.

2. Montrons le caractère défini. Soit $P \in [X]$ tel que $\varphi(P, P) = 0$ (les autres propriétés ne posent pas de problème).

La fonction $t \mapsto (P(t))^2 e^{-t}$ est positive **continu**e et d'intégrale nulle, donc, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $(P(t))^2 e^{-t} = 0$.

Or, $e^{-t} \neq 0$, donc, pour tout $t \geq 0$, $P(t) = 0$.

La polynôme P possède une infinité de racine, donc, $P = 0$.

3. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$\varphi(X^p, X^q) = \int_0^{+\infty} t^{p+q} e^{-t} dt.$$

On note $I_{p+q} = \int_0^{+\infty} t^{p+q} e^{-t} dt$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= t^{p+q} & u'(t) &= (p+q)t^{p+q-1} \\ v(t) &= -e^{-t} & v(t) &= e^{-t}. \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$. Comme l'intégrale I_{p+q} converge, on peut intégrer par parties,

$$I_{p+q} = [-t^{p+q} \times e^{-t}]_0^{+\infty} + (p+q) \int_0^{+\infty} t^{p+q-1} e^{-t} dt = (p+q)I_{p+q-1}.$$

En réitérant le procédé,

$$I_{p+q} = (p+q)! I_0.$$

Or,

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

Ainsi,

$$\varphi(X^p, X^q) = (p+q)!.$$

4. On remarque que :

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - a \times t^2 - b \times t - c)^2 \times e^{-t} dt = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2.$$

Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie, on sait que $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \|X^3 - p(X^3)\|$ où $p(X^3)$ est le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

On sait alors que $p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X]$, donc,

$$p(X^3) = a + bX + cX^2.$$

De plus, $X^3 - p(X^3) \in (\mathbb{R}_2[X])^\perp$, donc, par **Q3**,

$$\begin{cases} \langle X^3 - p(X^3), 1 \rangle = 0 \\ \langle X^3 - p(X^3), X \rangle = 0 \\ \langle X^3 - p(X^3), X^2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + 2c = 6 \\ a + 2b + 6c = 24 \\ 2a + 6b + 24c = 120 \end{cases}$$

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 6 \\ b + 4c = 18 \\ 4b + 20c = 108 \end{cases}$$

On effectue les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$:

$$\begin{cases} a - 2c &= -12 \\ b + 4c &= 18 \\ 4c &= 36 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} a &= 6 \\ b &= -18 \\ c &= 9 \end{cases}$$

Donc,

$$p(X^3) = 6 - 18X + 9X^2 \quad \text{et} \quad X^3 - p(X^3) = X^3 - 6 + 18X - 9X^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 &= \|X^3 - p(X^3)\|^2 \\ &= \langle X^3 - 6 + 18X - 9X^2, X^3 - 6 + 18X - 9X^2 \rangle \\ &= \dots \\ &= 36. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - a \times t^2 - b \times t - c)^2 \times e^{-t} dt = 36.$$

Exercice 3

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top \times B)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\text{tr}(A))^2 \leq n \text{tr}(A^\top A)$. Étudier le cas d'égalité.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormée pour le produit scalaire précédent.
4. Montrer que la norme associée à ce produit scalaire vérifie : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Réponse

1. Voir le cours.
2. On a :

$$(\text{tr}(A))^2 = \langle I_n, A \rangle^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(\text{tr}(A))^2 \leq \|I_n\|^2 \|A\|^2 \leq n \times \text{tr}(A^\top A).$$

Il y a égalité si, et seulement si, $I_n = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Comme $I_n \neq 0_n$, il y a égalité si, et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Autrement dit, si et seulement si, A est une matrice scalaire.

3. Soit $(i, j) \in [1, n]^2$ et $(k, l) \in [1, n]^2$.

On a :

$$\langle E_{i,j}, E_{k,l} \rangle = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n [E_{i,j}]_{s,t} [E_{k,l}]_{s,t}.$$

Or, $[E_{i,j}]_{s,t} = 0$ lorsque $(i, j) \neq (s, t)$ et $[E_{i,j}]_{s,t} = 1$ sinon. Donc,

$$\langle E_{i,j}, E_{k,l} \rangle = [E_{k,l}]_{i,j} = \delta_{(i,j),(k,l)}.$$

Ainsi,

la famille constituée des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormée.

4. On a :

$$\|AB\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [AB]_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2}.$$

Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ donne :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right).$$

Donc,

$$\|AB\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right]}.$$

Or, $\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2$ ne dépend pas de l'indice j , on peut le factoriser :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right] = \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right].$$

On reconnaît : $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 = \|B\|^2$. D'où,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right] = \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \times \|B\|^2 \right].$$

En factorisant par $\|B\|^2$, on reconnaît la norme de A au carré :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right] = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \times \|B\|^2 = \|A\|^2 \times \|B\|^2.$$

Donc,

$$\|AB\| \leq \sqrt{\|A\|^2 \times \|B\|^2} \leq \|A\| \|B\|.$$

Exercice 4

On note $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ et $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$.

1. Vérifier que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Est-elle orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$? Si non, l'orthonormaliser.

Réponse

1. On calcule le déterminant de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Donc,

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

2. Le vecteur u_1 n'est pas normé, donc la famille n'est pas orthonormée.

A l'aide de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on trouve :

$$\blacktriangleright \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

$$\blacktriangleright e'_2 = u_2 - \langle u_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = \dots = (1, -1, 1) \text{ et } \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

$$\blacktriangleright e'_3 = u_3 - \langle u_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle u_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = \cdots = \frac{1}{3}(-1, 1, 2) \text{ et } \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2).$$

Exercice 5

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E .

Réponse

On note $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

La famille finie $(e_1, \dots, e_n)$ engendre F , donc, F est de dimension finie.

Par théorème $E = F \oplus F^\perp$.

Soit $x \in F^\perp$. On a :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle^2 = 0.$$

Donc, $x = 0$. On en déduit que $F^\perp = \{0\}$ et $E = F$.

Donc,

$(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E .

Soit $i \in [1, n]$. On a :

$$\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle e_k, e_i \rangle^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \langle e_k, e_i \rangle^2.$$

Comme e_i est unitaire, $0 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \langle e_k, e_i \rangle^2$.

Or, une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes de la somme est nulle.

Donc, pour tout $i \neq k$, $\langle e_k, e_i \rangle = 0$.

On en déduit que

$(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale de E .

Comme les vecteurs e_i sont non nuls (car unitaires),

$(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre et orthonormée de E .

Ainsi, comme la famille est génératrice,

$(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E .

Exercice 6

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ et (u, v) une famille libre de E .

Pour tout $x \in E$, on note $f(x) = \langle u, x \rangle v + \langle v, x \rangle u$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u, v)^\perp$.
3. On note $g = f_{\text{Im}(f)}$ l'endomorphisme de $\text{Im}(f)$ induit par f . Déterminer les valeurs propres de g .
4. En déduire que f possède exactement 3 valeurs propres.
5. Déterminer les sous-espaces propres de f .

Exercice 7

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, et a et b deux vecteurs unitaires de E . On considère :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x - \langle a, x \rangle \cdot b. \end{aligned}$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit bijective. Exprimer f^{-1} lorsque cela est possible.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit diagonalisable.

Réponse

1. Soit $x \in \text{Ker}(f)$.

On a : $f(x) = 0$, donc, $x = \langle a, x \rangle \cdot b$.

Donc, x est colinéaire à b .

De plus, $\langle x, a \rangle = \langle \langle a, x \rangle \cdot b, a \rangle = \langle a, x \rangle \times \langle a, b \rangle$.

Cas 1 : Si $\langle a, b \rangle \neq 1$, alors $\langle x, a \rangle = 0$, donc, $x = 0_E$.

Donc, f est injective.

Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, f est bijective.

Cas 2 : on suppose que $\langle a, b \rangle = 1$. On a : $f(b) = b - \langle a, b \rangle b = 0_E$.

Comme b est unitaire, $b \neq 0_E$.

Donc, f n'est pas injective, donc n'est pas bijective.

Ainsi,

f est bijective si, et seulement si, $\langle a, b \rangle \neq 1$.

Allons plus loin en montrant que $\langle a, b \rangle = 1$ implique que $a = b$.

On a $|\langle a, b \rangle| = 1 = \|a\| \|b\|$.

On est dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, donc, a et b sont colinéaire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = \lambda \cdot b$.

D'où, $1 = \langle a, b \rangle = \lambda \|a\|^2 = \lambda$.

Donc, $a = b$.

Réciproquement, si $a = b$, on a $\langle a, b \rangle = \|a\|^2 = 1$.

f est bijective si, et seulement si, $a \neq b$.

Expression de f^{-1} . Soit $y \in E$. Comme f est bijective, il existe $x \in E$ unique tel que $y = f(x)$.

On a : $y = x - \langle a, x \rangle b$.

D'où, $\langle a, y \rangle = \langle a, x \rangle - \langle a, x \rangle \langle a, b \rangle$.

Donc, comme $\langle a, b \rangle \neq 1$,

$$\langle a, x \rangle = \frac{\langle a, y \rangle}{1 - \langle a, b \rangle}.$$

D'où,

$$x = y + \langle a, x \rangle b = y + \frac{\langle a, y \rangle}{1 - \langle a, b \rangle} \cdot b.$$

Ainsi,

$$f^{-1}(y) = y + \frac{\langle a, y \rangle}{1 - \langle a, b \rangle} \cdot b.$$

2. Déterminons les valeurs propres possibles de f . Soit λ une valeur propre de E : il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda \cdot x$.

On a $x - \langle a, x \rangle b = \lambda \cdot x$.

D'où, en prenant le produit scalaire avec a :

$$\langle a, x \rangle \times (1 - \lambda - \langle a, b \rangle) = 0 \iff \langle a, x \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 - \langle a, b \rangle.$$

Donc,

$$f(x) = x \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 - \langle a, b \rangle.$$

Comme $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$, on a :

$$\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 - \langle a, b \rangle.$$

Étutions $\lambda = 1$:

Comme $b \neq 0$, on a :

$$f(x) = x \iff \langle a, x \rangle \cdot b = 0 \iff \langle a, x \rangle = 0 \iff x \in \text{Vect}(a)^\perp.$$

Donc, $E_1(f) = \text{Vect}(a)^\perp$ et, comme E est de dimension finie n , $\dim(E_1(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Vect}(a)) = n - 1 \geq 1$.

Donc, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.

Étutions $\lambda = 1 - \langle a, b \rangle$:

On a :

$$f(b) = b - \langle a, b \rangle \cdot b = (1 - \langle a, b \rangle) \cdot b$$

Cas 1 : $\langle a, b \rangle \neq 0$. Dans ce cas, $\lambda = 1 - \langle a, b \rangle (\neq 1)$ est valeur propre de f et, par conséquent, $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$.

Donc,

$$\dim(E_1(f)) + \dim(E_\lambda(f)) \geq n.$$

Comme les sous-espaces propres de f sont en somme directe,

$$\dim(E_1(f) \oplus E_\lambda(f)) \geq n.$$

Comme $E_1(f) \oplus E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E , $E_1(f) \oplus E_\lambda(f) = E$. Donc, f est diagonalisable.

Autre rédaction du cas 1 :

On sait que $\text{Vect}(a)^\perp$ est un hyperplan de E . Comme $\langle a, b \rangle \neq 0$, on a $b \notin \text{Vect}(a)^\perp$. Donc,

$$E = \text{Vect}(a)^\perp \oplus \text{Vect}(b).$$

Dans une base de E adaptée à cette somme directe la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 - \langle a, b \rangle \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale, donc f est diagonalisable.

Cas 2 : $\langle a, b \rangle = 0$ (autrement dit a et b sont orthogonaux).

On a montré que la seule valeur propre de f possible est $\lambda = 1$.

Par l'absurde, on suppose que f est diagonalisable. Alors sa matrice dans une base de E est I_n . Donc, $f = \text{id}_E$.

En particulier $f(a) = a$, donc, $a - \|a\|^2 \cdot b = a$.

Comme a est unitaire, $b = 0$. Contradiction (en effet, b est unitaire).

Donc, f n'est pas diagonalisable.

Ainsi,

f est bijective si, et seulement si, $\langle a, b \rangle \neq 0$ (i.e. a et b ne sont pas orthogonaux).

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 8

Résoudre l'équation

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 9

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.
2. Soient $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in (\mathbb{R}_+)^{3n}$. Montrer que : $\left(\sum_{k=1}^n a_k \times b_k \times c_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \times c_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \times c_k \right)$.
3. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum_{k=1}^n a_k = 1$. Montrer que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq n^2$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 10

1. Soient $a < b$ réels. Montrer que, pour tout $f \in E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$, on a $\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq b - a$.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x)^2 \leq x \times \int_0^1 (f'(t))^2 dt$.

Exercice 11

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer que : $(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$.

Réponse

On a :

$$(x + y + z)^2 = \left\langle \left(\sqrt{2}x, y, \sqrt{3}z \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(x + y + z)^2 \leq \left\| \left(\sqrt{2}x, y, \sqrt{3}z \right) \right\|^2 \times \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\|^2 \leq (2x^2 + y^2 + 3z^2) \times \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \right) \leq 1 \times \frac{11}{6}.$$

Ainsi,

$$(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}.$$

Autre méthode : Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, on note

$$((x, y, z)|(x', y', z')) = 2xx' + yy' + 3zz'.$$

On montre que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ (je vous laisse le rédiger). On note N sa norme euclidienne associée (autrement dit, $N((x, y, z)) = \sqrt{((x, y, z)|(x, y, z))} = \sqrt{2x^2 + y^2 + 3z^2}$).

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(x + y + z)^2 = \left((x, y, z) \left| \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3} \right) \right. \right)^2 \leq N((x, y, z))^2 \times N\left(\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3} \right) \right)^2 \leq (2x^2 + y^2 + 3z^2) \times \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \right) \leq 1 \times \frac{11}{6}.$$

Orthogonal**Exercice 12**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E un espace préhilbertien. Montrer que :

1. si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$;
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
3. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

Réponse

1. On suppose que $F \subset G$. Montrons que $G^\perp \subset F^\perp$.
Soit $x \in G^\perp$. Montrons que $x \in F^\perp$.
Soit $y \in F$.

Comme $F \subset G$, on a $y \in G$.

Donc, comme $x \in G^\perp$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Ceci est vrai pour tout $y \in F$, donc, $x \in F^\perp$.

Ceci est vrai pour tout $x \in G^\perp$, donc,

$$G^\perp \subset F^\perp.$$

2. Soit $x \in (F + G)^\perp$.

Montrons que $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

- Soit $y \in F$. On a $y = y + 0 \in F + G$ (en effet, G est un sev donc contient 0). Donc, $\langle x, y \rangle = 0$. Donc, $x \in F^\perp$.
- Soit $y \in G$. On a $y = 0 + y \in F + G$ (en effet, F est un sev donc contient 0). Donc, $\langle x, y \rangle = 0$. Donc, $x \in G^\perp$.

Donc, $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Ainsi,

$$(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp.$$

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Montrons que $x \in (F + G)^\perp$.

Soit $y \in F + G$. Donc, $y = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$.

D'où, par bilinéarité du produit scalaire, $\langle x, y \rangle = \langle x, a \rangle + \langle x, b \rangle$.

Or, $x \in F^\perp$ et $a \in F$, donc, $\langle x, a \rangle = 0$. De même, $x \in G^\perp$ et $b \in G$, donc, $\langle x, b \rangle = 0$.

Donc, $\langle x, y \rangle = 0$.

Ainsi,

$$F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp.$$

3. Soit $x \in F^\perp + G^\perp$. Montrons que $x \in (F \cap G)^\perp$.

Soit $a \in F \cap G$.

On a $x = u + v$ avec $u \in F^\perp$ et $v \in G^\perp$.

Donc, $\langle a, u \rangle = \langle a, v \rangle = 0$.

Par bilinéarité, $\langle a, x \rangle = \langle a, u \rangle + \langle a, v \rangle = 0$.

Donc, $x \in (F \cap G)^\perp$.

Ainsi,

$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

Exercice 13

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\langle X, Y \rangle = X^\top \times Y$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{Im}(A^\top) = \text{Ker}(A)^\perp$.
2. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top \times A)$.
3. En déduire que $\text{Im}(A^\top) = \text{Im}(A^\top \times A)$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top \times A)$.
4. On suppose que $A^2 = 0_n$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(A^\top + A) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(A^\top)$.
 - (b) En déduire que $A^\top + A$ est inversible si, et seulement si, $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$.

Réponse

1. Montrer que $\text{Im}(A^\top) = \text{Ker}(A)^\perp$.
2. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top \times A)$.
3. En déduire que $\text{Im}(A^\top) = \text{Im}(A^\top \times A)$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top \times A)$.
4. On suppose que $A^2 = 0_n$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(A^\top + A) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(A^\top)$.

(b) ($\Rightarrow$) On suppose que $A^\top + A$ est inversible.

Montrons que $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$.

On sait que $A^2 = 0$, donc, $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A)$ (classique).

Soit $X \in \text{Ker}(A)$. Comme $A^\top + A$ est bijective, $\text{Im}(A^\top + A) = \mathbb{R}^n$.

Donc, il existe $Z \in \mathbb{R}^n$ tel que, $(A^\top + A)Z = X$.

On multiplie à gauche par A . Comme $A^2 = 0$, on a : $AA^\top Z = AX$.

Or, $X \in \text{Ker}(A)$, donc, $AA^\top Z = 0$.

Donc, $Z \in \text{Ker}(AA^\top)$.

Par **Q2** appliquée avec A remplacée par $A^\top$, on a : $\text{Ker}(AA^\top) = \text{Ker}(A^\top)$.

Donc, $A^\top Z = 0$.

Donc, $X = (A^\top + A)Z = A^\top Z + AZ = AZ \in \text{Im}(A)$.

Donc, $\text{Ker}(A) \subset \text{Im}(A)$.

Ainsi,

$$\text{Im}(A) = \text{Ker}(A).$$

On suppose que $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$. Montrons que $A + A^\top$ est inversible.

Soit $X \in \text{Ker}(A + A^\top)$. On a $AX = -A^\top X$.

En multipliant par A , on a : $0 = -AA^\top X$.

Donc, $X \in \text{Ker}(AA^\top) = \text{Ker}(A^\top)$ (**Q2**).

Donc, $AX = -A^\top X = 0$. On en déduit que $X \in \text{Ker}(A) = \text{Im}(A)$.

Donc, $X = AZ$ avec $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle X, X \rangle = X^\top X = Z^\top A^\top X.$$

Or, $X \in \text{Ker}(A^\top)$, donc, $\langle X, X \rangle = 0$.

Donc, $X = 0$.

Donc, $\text{Ker}(A + A^\top) = \{0\}$.

Comme $A + A^\top$ est une matrice carrée, $A + A^\top$ est inversible.

Exercice 14

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On considère le sous-espace vectoriel $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ de E .

1. Soit $f \in H^\perp$. On pose $h : t \mapsto tf(t)$. Justifier que $\langle f, h \rangle = 0$ et en déduire que f est la fonction nulle.
2. En déduire $H^\perp$ et $(H^\perp)^\perp$.

Réponse

1. La fonction h est continue comme produit de fonctions continues et $h(0) = 0 \times f(0) = 0$.

Donc, $h \in H$. Comme $f \in H^\perp$,

$$\langle f, h \rangle = 0.$$

On a :

$$0 = \langle f, h \rangle = \int_0^1 f(t) \times h(t) dt = \int_0^1 t \times (f(t))^2 dt.$$

La fonction $t \mapsto t \times (f(t))^2$ est continue positive et d'intégrale nulle. Donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $t \times (f(t))^2 = 0$.

Donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $f(t) = 0$.

Comme f est continue, en passant à la limite quand $t \rightarrow 0$, on a $f(0) = 0$.

Donc,

f est la fonction nulle.

2. On en déduit que $H^\perp = \{0\}$, puis $(H^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$.

Exercice 15

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

- Donner une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de E , puis déterminer $(\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^\perp$.
- Déterminer $\text{Vect}(I_n)^\perp$.

Réponse

- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a : $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$.

La famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ engendre $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

De plus, $(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ est libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc,

$(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que :

$$A \in (\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^\perp \iff \langle A, E_{1,1} \rangle = 0, \dots, \langle A, E_{n,n} \rangle = 0.$$

Or, $\langle A, E_{i,i} \rangle = a_{i,i}$.

Ainsi,

$(\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^\perp$ est l'ensemble des matrices dont la diagonale est nulle.

- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La famille (I_n) engendre $\text{Vect}(I_n)$, donc,

$$A \in \text{Vect}(I_n)^\perp \iff \langle A, I_n \rangle = 0 \iff a_{1,1} + \dots + a_{n,n} = 0 \iff \text{tr}(A) = 0.$$

Ainsi,

$$\text{Vect}(I_n)^\perp = \text{Ker}(\text{tr}).$$

Projection orthogonale et distance

Exercice 16

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Réponse

Par le calcul, on vérifie que $A^2 = A$, donc, p est un projecteur.

Pour vérifier que p est un projecteur orthogonal, on montre que $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$.

On sait que : $\text{Im}(p) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$.

Or, $C_3 = C_1 + 2C_2$. Donc, $\text{Im}(p) = \text{Vect}(C_1, C_2)$.

De plus, les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires.

Donc, (C_1, C_2) est une famille libre et génératrice de $\text{Im}(p)$. C'est donc une base de $\text{Im}(p)$. Donc, $\text{rg}(p) = 2$.

Par le théorème du rang, $\text{Ker}(p) = 3 - 2 = 1$.

Or, $C_1 + 2C_2 - C_3 = 0$, donc, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(p)$. Ce vecteur est non nul et $\text{Ker}(p)$ est de dimension 1, donc, $\text{Ker}(p) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

On remarque que :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C_1 \right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C_2 \right\rangle = 0$$

Donc, $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$.

Ainsi,

p est un projecteur orthogonal.

Remarque : On montrera dans un prochain chapitre que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $p \circ p = p$ et sa matrice dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est symétrique.

Ici, la base canonique est orthonormée et $A^\top = A$, donc, on retrouve que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 17

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Calculer la distance de $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$ à

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y - 2t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Exercice 18

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ munit de sa structure euclidienne canonique. On note $u = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $v = 2e_2 + 3e_4$ et $F = \text{Vect}(u, v)$.

1. Déterminer $F^\perp$.
2. Donner la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) de la projection orthogonale sur F .

Exercice 19

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
3. Calculer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 20

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel : pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top \times B)$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 21

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E .

Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$.

Exercice 22

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Soit $v \in E$ de norme 1. Montrer que $\varphi : x \mapsto \langle x, v \rangle v$ est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(v)$. Montrer que $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

- Soient p_F le projecteur orthogonal sur F et $x \in E$. Montrer que $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ sont orthogonaux, puis que $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.
- Soit p un projecteur tel que, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. En considérant un vecteur x orthogonal à $\text{Ker}(p)$, vérifier que x et $x - p(x)$ sont orthogonaux. En déduire que p est un projecteur orthogonal.
- Soient p et q deux projecteurs. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur si p et q commutent. La réciproque est-elle vraie?

Réponse

- Comme v est unitaire, (v) est une base orthonormée de $\text{Vect}(v)$.

D'après le cours, le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in E$ sur $\text{Vect}(v)$ est $\langle x, v \rangle v$.

Donc,

$$\varphi: x \mapsto \langle x, v \rangle v \text{ est le projecteur orthogonal sur } \text{Vect}(v).$$

Soit $x \in E$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|\varphi(x)\| = |\langle x, v \rangle| \|v\| \leq \|x\| \|v\|^2.$$

Comme v est unitaire :

$$\|\varphi(x)\| \leq \|x\|.$$

- On sait que $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$, donc

$$p_F(x) \text{ et } x - p_F(x) \text{ sont orthogonaux.}$$

Par la formule de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2.$$

Comme $\|x - p_F(x)\|^2 \geq 0$, on a $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.

Comme les normes sont positives :

$$\|p_F(x)\| \leq \|x\|.$$

- Soit $x \in (\text{Ker}(p))^\perp$.

Comme p est un projecteur, $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$. Donc, $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$.

Comme $x \in (\text{Ker}(p))^\perp$,

$$x \text{ et } x - p(x) \text{ sont orthogonaux.}$$

Pour montrer que p est un projecteur orthogonal, on montre que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p)^\perp$.

On a :

$$0 = \langle x, x - p(x) \rangle = \|x\|^2 - \langle x, p(x) \rangle.$$

D'où, $\|x\|^2 = \langle x, p(x) \rangle \geq 0$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x\|^2 = |\langle x, p(x) \rangle| \leq \|x\| \|p(x)\|.$$

Or, $\|p(x)\| \leq \|x\|$, donc,

$$\|x\|^2 = |\langle x, p(x) \rangle| \leq \|x\| \|p(x)\| \leq \|x\|^2.$$

Donc, $|\langle x, p(x) \rangle| = \|x\| \|p(x)\|$.

On est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc, $p(x)$ est colinéaire à x .

Cas 1 : $x \neq 0$. On a $p(x) = \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'où,

$$\|x\|^2 = \langle x, p(x) \rangle = \lambda \|x\|^2.$$

Comme $x \neq 0$, $\lambda = 1$. Donc, $p(x) = x$.

Cas 2 : $x = 0$. Comme p est linéaire, $p(x) = x$.

Dans les deux cas, $x \in \text{Im}(p)$, donc,

$$\text{Ker}(p)^\perp \subset \text{Im}(p).$$

Comme on est en dimension finie,

$$\dim(\text{Ker}(p)^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(p)).$$

Par théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(p)^\perp) = \dim(\text{Im}(p)).$$

Donc,

$$\text{Ker}(p)^\perp = \text{Im}(p) \text{ et } p \text{ est un projecteur orthogonal.}$$

4. Comme p et q commutent :

$$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q.$$

Comme p et q sont des projecteurs,

$$(p \circ q)^2 = p \circ q.$$

Ainsi,

$$p \circ q \text{ est un projecteur.}$$

La réciproque est fautive. On considère les projections de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \quad PQ = Q, \quad (PQ)^2 = Q^2 = Q = PQ.$$

Donc, p , q et $p \circ q$ sont des projecteurs.

Mais,

$$PQ = Q \quad \text{et} \quad QP = P \neq Q.$$

Donc, p et q ne commutent pas.

Exercice 23

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

1. Montrer, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x \rangle$.

2. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

Réponse

1. Soit $x \in E$.

On sait que $x - p(x)$ et $p(x)$ sont orthogonaux.

$$\text{D'où, } \langle p(x), x \rangle = \langle p(x), x - p(x) \rangle + \langle p(x), p(x) \rangle = 0 + \|p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2.$$

2. ► Comme p est une projection, on sait que $E = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(p)$ (*) et $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$.

D'où, la matrice de p dans une base de E adaptée à (*) est :

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc, } \text{tr}(p) = \text{tr}(A) = r.$$

► On note B la matrice de p dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

On sait alors que :

$$p(e_i) = \sum_{j=1}^n \langle p(e_i), e_j \rangle \cdot e_j,$$

et les coefficients diagonaux de p sont : $\langle p(e_1), e_1 \rangle, \dots, \langle p(e_n), e_n \rangle$.

Donc,

$$\text{tr}(p) = \text{tr}(B) = \sum_{i=1}^n \langle p(e_i), e_i \rangle.$$

Puis, par la question 1,

$$\text{tr}(p) = \sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \text{tr}(p) = r.$$

Exercice 24

On se place dans $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \times g(t) dt$.

Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(t) - a \times t - b \times t^2)^2 dt$.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 25

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \text{tr}(A \times M)$.

Réponse

En posant, pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^\top N)$, on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On définit ainsi un espace euclidien.

Donc, par théorème de représentation des formes linéaires, il existe une unique matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \text{tr}(B^\top \times M)$.

On note alors $A = B^\top$.

Exercice 26

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme A de E tel que, pour tout $P \in E$, $P(0) = \int_0^1 A(t) \times P(t) dt$.
2. Montrer que $\deg(A) = n$.

Réponse

1. La fonction $\varphi : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(0) \end{matrix}$ est une forme linéaire.

En posant, pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$, on définit un produit scalaire sur E .

On définit ainsi un espace euclidien.

Donc, par théorème de représentation des formes linéaires, il existe un unique polynôme A de E tel que, pour tout

$P \in E$, $\varphi(P) = \langle A, P \rangle$, autrement dit, $P(0) = \int_0^1 A(t) \times P(t) dt$.

2. Par l'absurde, on suppose que $\deg(A) < n$. Le polynôme $P = XA$ est de degré inférieur ou égal à n .

Donc, par la question précédente, $P(0) = \int_0^1 A(t) \times P(t) dt$.

D'où,

$$\int_0^1 t \times (A(t))^2 dt = 0.$$

Or, la fonction $t \mapsto t \times (A(t))^2$ est continue et positive, donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $t \times (A(t))^2 = 0$.

Donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $A(t) = 0$.

Donc, A possède une infinité de racines, donc, $A = 0$.

On en déduit que, pour tout $P \in E$, $P(0) = \int_0^1 A(t) \times P(t) dt = 0$. Contradiction : prendre par exemple $P = X + 1$.

Ainsi,

$$\deg(A) = n.$$