

CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

Exercice 1

1.a. Les calculs donnent :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$A + 6I = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi a-t-on montré que :

$$A^2 = A + 6I$$

b. En notant 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le résultat de la question précédente peut s'écrire :

$$A^2 - A - 6I = 0$$

Donc un polynôme annulateur de la matrice A est le polynôme $P(X) = X^2 - X - 6$.

c. Les racines de $P(X)$ sont les seules valeurs propres possibles de A ; puisque le discriminant de $P(X)$ est $\Delta = 1 - 4(-6) = 25$, les racines de $P(X)$ sont :

$$X_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

Donc les seules valeurs propres possibles de A sont -2 et 3.

2.a. Les calculs donnent :

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3U \text{ et } AV = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2V$$

Puisque $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, U et V sont des vecteurs propres de la matrice A

respectivement associés aux valeurs propres 3 et -2.

b. Les calculs donnent :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } PD = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi a-t-on montré que :

$$AP = PD$$

Le polynôme $P(X)$ est scindé, ses deux racines sont valeurs propres de A, et la matrice P est obtenue à partir des vecteurs propres U et V de A, donc l'égalité $AP = PD$ assure que la matrice A est diagonalisable.

3.a. Rappelons que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et que,

dans ce cas, sa matrice inverse est $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Ici, pour la matrice P, on a :

$$ad - bc = 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 5$$

Puisque $ad - bc \neq 0$, P est inversible et l'application du rappel donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

BSB

CORRIGÉ

TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

b. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$A^n P = P D^n$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0 P = I P = P \text{ et } P D^0 = P I = P$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$A^n P = P D^n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} P = P D^{n+1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.b :

$$A^{n+1} P = A A^n P = A P D^n = P D D^n = P D^{n+1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$A^n P = P D^n$$

c. L'égalité de la question précédente peut s'écrire, puisque P est inversible :

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

Puisque D est une matrice diagonale, on a, pour tout entier naturel n :

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\begin{aligned} A^n &= P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (-2)^{n+1} \\ 3^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. En prenant $n = 0$, puis $n = 1$, la relation de récurrence définissant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne :

$$u_2 = u_1 + 6u_0 + 3 = 1 - 3 + 3 = 1 \text{ et } u_3 = u_2 + 6u_1 + 3 = 1 + 6 + 3 = 10$$

5. L'instruction à ajouter à la ligne 5 pour que le programme calcule et affiche la valeur de u_n , l'entier n non nul étant donné par l'utilisateur, est :

$$u = a + 6 \cdot v + 3$$

6.a. On a, **pour tout entier naturel n** :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + 6u_n + 3 \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A X_n + B$$

b. On a :

$$A L + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} + \frac{6}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = L$$

c. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n , par :

$$X_n = A^n (X_0 - L) + L$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0 (X_0 - L) + L = I (X_0 - L) + L = X_0 - L + L = X_0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n , c'est-à-dire :

$$X_n = A^n (X_0 - L) + L$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^{n+1} (X_0 - L) + L$$

On a, d'après la question 6.a, l'hypothèse de récurrence et la question 6.b :

$$X_{n+1} = AX_n + B = A(A^n (X_0 - L) + L) + B = A^{n+1} (X_0 - L) + AL + B = A^{n+1} (X_0 - L) + L$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n** , on a :

$$X_n = A^n (X_0 - L) + L$$

d. D'après les questions 6.c et 3.c, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = X_n = A^n (X_0 - L) + L = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La deuxième ligne de cette matrice donne u_n ; il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$u_n = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} (3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2} = \frac{3}{10} (3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}$$

7. L'instruction à compléter à la ligne 5 pour que le programme calcule et affiche la valeur de u_n , l'entier n non nul étant donné par l'utilisateur, est :

$$X = A * X + B$$

Exercice 2

1.a. On a, puisque $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = e^x + 1 > 0$$

Donc **g est croissante sur $\mathbb{R}$** .

b. On a :

$$g(0) = e^0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0$$

Puisque g est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g(0) = 0$, le signe de $g(x)$ est donné par le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

2.a. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{x}{e^x} \right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (croissance comparée)}$$

b. On a, comme cette limite vient d'être rappelée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{x}{e^x} - x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$$

Donc la droite **D** d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

c. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) + 1 \right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = -\infty$$

3.a. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{(e^x)^2 - e^x + xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(e^x - 1 + x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

b. Puisque $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$; d'après la question 1.b, le tableau des variations de f , avec les limites calculées à la question 2, est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

4. On a :

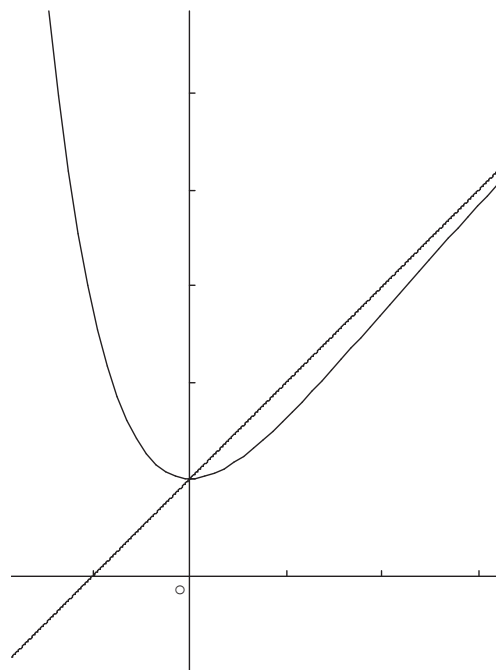
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{g'(x)e^x - e^x g(x)}{(e^x)^2} = \frac{g'(x) - g(x)}{e^x} = \frac{e^x + 1 - (e^x - 1 + x)}{e^x} = \frac{2 - x}{e^x}$$

Puisque $e^x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $2 - x$ sur $\mathbb{R}$; le signe de $f''(x)$ est donc donné par le tableau :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	+	0	-

Donc **f** est convexe sur $]-\infty, 2]$ et concave sur $[2, +\infty[$.

5. L'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm, est la suivante :



Exercice 3

1.a. Le joueur marque un point au deuxième tirage si la boule obtenue au deuxième tirage est de couleur différente de celle obtenue au premier tirage, c'est-à-dire s'il a obtenu une boule blanche au premier tirage et une boule rouge au deuxième tirage, ou le contraire ; on a donc bien :

$$(X_2 = 1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$$

Par incompatibilité des événements $B_1 \cap R_2$ et $R_1 \cap B_2$, il vient :

$$P(X_2 = 1) = P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2)$$

Les tirages s'effectuant avec remise, les événements B_1 et R_2 d'une part, R_1 et B_2 d'autre part, sont indépendants, donc on a :

$$P(X_2 = 1) = P(B_1)P(R_2) + P(R_1)P(B_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

b. Puisque X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_2 = 1) = \frac{4}{9}$, on a :

$$E(X_2) = p = \frac{4}{9} \text{ et } V(X_2) = p(1-p) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$$

2.a. L'urne et la règle du jeu étant analogues lors des deux premiers tirages et lors des deux suivants, X_3 suit la même loi que X_2 .

b. G étant la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages,

on a :

$$G = X_2 + X_3$$

Par linéarité de l'espérance, et puisque X_3 suit la même loi que X_2 , il vient, d'après la question 1.b :

$$E(G) = E(X_2 + X_3) = E(X_2) + E(X_3) = 2E(X_2) = 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

3.a. L'événement $(X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)$ est réalisé s'il y a deux changements de couleurs consécutifs, c'est-à-dire si l'on tire dans cet ordre une rouge, une blanche, une rouge, ou une blanche, une rouge, une blanche ; on a donc :

$$(X_2 = 1) \cap (X_3 = 1) = (R_1 \cap B_2 \cap R_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap B_3)$$

Par incompatibilité, puis indépendance, il vient bien :

$$\begin{aligned} P((X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)) &= P((R_1 \cap B_2 \cap R_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap B_3)) \\ &= P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) \\ &= P(R_1)P(B_2)P(R_3) + P(B_1)P(R_2)P(B_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27} + \frac{4}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

b. On trouve de même :

$$\begin{aligned} P((X_2 = 0) \cap (X_3 = 0)) &= P((R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)) \\ &= P(R_1)P(R_2)P(R_3) + P(B_1)P(B_2)P(B_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P((X_2 = 0) \cap (X_3 = 1)) &= P((R_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap R_3)) \\ &= P(R_1)P(R_2)P(B_3) + P(B_1)P(B_2)P(R_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27} + \frac{4}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P((X_2 = 1) \cap (X_3 = 0)) &= P((R_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap R_3)) \\ &= P(R_1)P(B_2)P(B_3) + P(B_1)P(R_2)P(R_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Le tableau donnant la loi conjointe du couple (X_2, X_3) est donc le suivant :

$X_2 \backslash X_3$	0	1
0	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

On a :

$$\text{cov}(X_2, X_3) = E(X_2 X_3) - E(X_2)E(X_3)$$

On a déjà vu que :

$$E(X_2) = E(X_3) = \frac{4}{9}$$

On a :

$$E(X_2 X_3) = \sum_{\substack{x \in X_2(\Omega) \\ y \in X_3(\Omega)}} xy P((X_2 = x) \cap (X_3 = y)) = 0 \cdot 0 \cdot \frac{3}{9} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$$

Il vient bien :

$$\text{cov}(X_2, X_3) = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{18 - 16}{81} = \frac{2}{81}$$

4. D'après la question 2.b, on a :

$$V(G) = V(X_2 + X_3) = V(X_2) + V(X_3) + 2 \text{cov}(X_2, X_3)$$

D'après les questions 1.b et 2.a, on a :

$$V(X_2) = V(X_3) = \frac{20}{81}$$

Il résulte de la question précédente que :

$$V(G) = \frac{20}{81} + \frac{20}{81} + 2 \cdot \frac{2}{81} = \frac{44}{81}$$

5.a. L'instruction $X = \text{grand}(1, n, \text{'bin'}, 1/3)$ simule n lois binomiales indépendantes de paramètres 1 et $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire n lois de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{3}$; chaque

tirage dans l'urne suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$, puisque la probabilité d'obtenir une boule blanche est $\frac{1}{3}$, et les tirages sont indépendants, donc **cette instruction permet de**

simuler n tirages dans l'urne.

b. Pour que le programme simule n tirages successifs dans l'urne et qu'il affiche le nombre de points marqués par le joueur, il faut ajouter à la ligne 6 l'instruction :

$$G = G + 1$$

En effet, au départ, le gain est $G = 0$; pour chacun des tirages, du deuxième au n -ième, lorsque l'instruction $X(i) <> X(i-1)$ est vérifiée, les boules obtenues au i -ème et au $(i+1)$ -ième tirage sont de couleurs différentes et donc le gain augmente d'un point.

Exercice 4

1. On a :

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \int_a^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_a^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{a}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a}$$

Ceci assure que l'intégrale **I** converge et que :

$$I = \frac{1}{a}$$

On a de même :

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \int_a^x \frac{1}{t^3} dt = \int_a^x t^{-3} dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_a^x = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_a^x = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2a^2}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1}{t^3} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2a^2} \right) = \frac{1}{2a^2}$$

Ceci assure que l'intégrale **J** converge et que :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2a^2}$$

On a enfin de même :

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \int_a^x \frac{1}{t^4} dt = \int_a^x t^{-4} dt = \left[\frac{t^{-3}}{-3} \right]_a^x = \left[-\frac{1}{3t^3} \right]_a^x = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3a^3}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1}{t^4} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3a^3} \right) = \frac{1}{3a^3}$$

Ceci assure que l'intégrale **K** converge et que :

$$\mathbf{K} = \frac{1}{3a^3}$$

2. f est continue sur $] -\infty, a[$ comme fonction nulle, et sur $[a, +\infty[$ comme fonction rationnelle de dénominateur non nul, puisque a est un réel strictement positif ; de plus f a des limites finies à gauche et à droite en a , puisque :

$$\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{3a^3}{t^4} = \frac{3a^3}{a^4} = \frac{3}{a}$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec un nombre fini (un) de points de discontinuité.

Pour tout réel t appartenant à $] -\infty, a[$, on a :

$$f(t) = 0 \geq 0$$

Pour tout réel t appartenant à $[a, +\infty[$, on a, puisque a est un réel strictement positif :

$$f(t) = \frac{3a^3}{t^4} > 0$$

Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Puisque f est nulle sur $] -\infty, a[$, $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt = 0$$

D'après la question 1, et par linéarité de l'intégrale, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^4} dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt = 3a^3 K = 3a^3 \cdot \frac{1}{3a^3} = 1$$

Il en résulte que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt = 0 + 1 = 1$$

Donc **f est bien une densité de probabilité.**

3. Sous réserve de convergence, l'espérance de X est, par définition :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty, a[$, $\int_{-\infty}^a tf(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^a tf(t)dt = \int_{-\infty}^a 0dt = 0$$

D'après la question 1, et par linéarité de l'intégrale, $\int_a^{+\infty} tf(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_a^{+\infty} tf(t)dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^3} dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = 3a^3 J = 3a^3 \cdot \frac{1}{2a^2} = \frac{3a}{2}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge, ce qui prouve que X admet une espérance et on a, grâce à la relation de Chasles :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^a tf(t)dt + \int_a^{+\infty} tf(t)dt = 0 + \frac{3a}{2} = \frac{3a}{2}$$

De même, sous réserve de convergence, l'espérance de X^2 est, par définition :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty, a[$, $\int_{-\infty}^a t^2 f(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^a t^2 f(t)dt = \int_{-\infty}^a 0dt = 0$$

D'après la question 1, et par linéarité de l'intégrale, $\int_a^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_a^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2} dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 3a^3 I = 3a^3 \cdot \frac{1}{a} = 3a^2$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge, ce qui prouve que X^2 admet une espérance et on a, grâce à la relation de Chasles :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_{-\infty}^a t^2 f(t)dt + \int_a^{+\infty} t^2 f(t)dt = 0 + 3a^2 = 3a^2$$

Puisque X^2 admet une espérance, X admet une variance, et on a, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 3a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{12a^2 - 9a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

4.a. On sait que, pour tout réel x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Il vient donc, lorsque $x < a$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

b. En utilisant la question 1, on obtient, lorsque $x \geq a$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt = \int_{-\infty}^a 0dt + \int_a^x \frac{3a^3}{t^4} dt = 3a^3 \int_a^x \frac{1}{t^4} dt \\ &= 3a^3 \left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3a^3} \right) = -\frac{a^3}{x^3} + 1 = 1 - \left(\frac{a}{x} \right)^3 \end{aligned}$$

c. On a :

$$P(2a \leq X \leq 4a) = F(4a) - F(2a)$$

Puisque, a étant strictement positif, $2a \geq a$ et $4a \geq a$, il vient :

$$P(2a \leq X \leq 4a) = 1 - \left(\frac{a}{4a}\right)^3 - \left(1 - \left(\frac{a}{2a}\right)^3\right) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{64} + \frac{1}{8} = \frac{-1+8}{64} = \frac{7}{64}$$

Et, de même :

$$P(X \geq 2a) = 1 - P(X < 2a) = 1 - F(2a) = 1 - \left(1 - \left(\frac{a}{2a}\right)^3\right) = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Il résulte de ces deux calculs que :

$$P_{(X \geq 2a)}(X \leq 4a) = \frac{P((X \leq 4a) \cap (X \geq 2a))}{P(X \geq 2a)} = \frac{P(2a \leq X \leq 4a)}{P(X \geq 2a)} = \frac{\frac{7}{64}}{\frac{1}{8}} = \frac{7}{64} \cdot 8 = \frac{7}{8}$$

5.a. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(M_n) = E\left(\frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

Puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent la même loi que X , il vient, d'après la question 3 :

$$E(M_n) = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n E(X) = \frac{2}{3n} \cdot nE(X) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{2} = a$$

Par propriété de la variance, et puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a :

$$V(M_n) = V\left(\frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{4}{9n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{4}{9n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent la même loi que X , il vient, d'après la question 3 :

$$V(M_n) = \frac{4}{9n^2} \sum_{i=1}^n V(X) = \frac{4}{9n^2} \cdot nV(X) = \frac{4}{9n} \cdot \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{3n}$$

b. Puisque $E(M_n) = a$ d'après la question précédente, M_n est un estimateur sans biais de a .

Puisque M_n est un estimateur sans biais de a , son risque quadratique est, d'après la question précédente :

$$r(M_n) = V(M_n) = \frac{a^2}{3n}$$

c. ε un réel strictement positif, l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, appliquée à la variable aléatoire M_n , donne :

$$P(|M_n - E(M_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}$$

Compte-tenu du calcul de la variance de M_n à la question 5, on a bien :

$$P(|M_n - a| > \varepsilon) \leq \frac{a^2}{3n\varepsilon^2}$$

d. Par définition, $[M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance $1 - \alpha$ si $P(M_n - \varepsilon \leq a \leq M_n + \varepsilon) \geq 1 - \alpha$.

On a :

$$P(M_n - \varepsilon \leq a \leq M_n + \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq M_n - a \leq \varepsilon) = P(|M_n - a| \leq \varepsilon) = 1 - P(|M_n - a| > \varepsilon)$$

Il vient donc, d'après la question précédente et compte-tenu de la valeur de ε :

$$P(M_n - \varepsilon \leq a \leq M_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{a^2}{3n\varepsilon^2} = 1 - \frac{a^2}{3n\left(\frac{a}{\sqrt{3\alpha n}}\right)^2} = 1 - \frac{a^2}{3n \cdot \frac{a^2}{3\alpha n}} = 1 - \alpha$$

Ainsi, pour α réel de $]0,1[$ et $\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{3\alpha n}}$, $[M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance

de a au niveau de confiance $1 - \alpha$.

e. On a, par définition de M_n :

$$M_{100} = \frac{2}{3 \cdot 100} \sum_{i=1}^{100} X_i = \frac{2}{3 \cdot 100} \cdot 603 = \frac{2 \cdot 201}{100} = 4,02$$

Le fabricant peut donc estimer que a vaut 4.

BSB

CORRIGÉ

TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES