
I	Normes et boules	3
I.1	Espaces vectoriels normés	3
I.2	Distance associée à une norme	5
I.3	Boules ouvertes, boules fermées	5
I.4	Produit d'espaces vectoriels normés	6
I.5	Norme associée à un produit scalaire	7
I.6	Normes sur $\mathbb{K}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$	8
I.7	Norme infinie sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$	10
I.8	Exercice : Normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, où $a < b$ sont des réels	12
I.9	Exercice : normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$	14
I.10	Exercice : normes sur $\mathbb{K}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé	16
I.11	Caractère borné	17
I.12	Partie convexe	20
II	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	22
II.1	Suites convergentes, suites divergentes	22
II.2	Propriétés des suites convergentes	24
III	Comparaison des normes	29
III.1	Définition	29
III.2	L'équivalence des normes préserve la convergence et le caractère borné des suites	30
IV	Topologie d'un espace vectoriel	32
IV.1	Parties ouvertes, parties fermées	32
IV.2	Adhérence d'une partie	37
IV.3	Partie dense	39
IV.4	Topologie et normes équivalentes	39

Extrait du programme

- Cette section vise les objectifs suivants :
- généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;
 - fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.
Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Normes usuelles $\ \cdot \ _1$, $\ \cdot \ _2$ et $\ \cdot \ _\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\ \cdot \ _\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée. Convexité des boules.
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé	
Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie. Fermé d'un espace normé. Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque. Point adhérent à une partie, adhérence. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule ouverte est un ouvert. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés. L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $|\cdot|$ la valeur absolue (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou le module (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

I. Normes et boules

I.1. Espaces vectoriels normés



Définition 8.1 – Norme, Espace vectoriel normé

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle **norme sur E** toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- **Positivité** : $\forall x \in E, N(x) \geq 0$;
- **Séparation** : $\forall x \in E, [N(x) = 0 \implies x = 0_E]$;
- **Homogénéité** : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda.x) = |\lambda| \times N(x)$;
- **Inégalité triangulaire** : $\forall (x, y) \in E \times E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On note $\|x\|$ la norme de x au lieu de $N(x)$.

Un **espace vectoriel normé** est un couple $(E, \|\cdot\|)$ formé d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et d'une norme $\|\cdot\|$ sur E .



Exemple 8.1

1. L'application $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ (démonstration donnée plus loin).
2. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont des espaces vectoriels normés.
3. Pour tout $x \in E$, on a $\|-x\| = \|x\|$.



Remarque 8.1 – Norme induite sur un sous-espace vectoriel

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . On munit naturellement F d'une structure d'espace vectoriel normé en le munissant de la norme :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_F : F &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|_E. \end{aligned}$$



Définition 8.2 – Vecteur unitaire

On dit qu'un vecteur $u \in E$ est **unitaire** lorsque $\|u\| = 1$.



Proposition 8.1

Tout vecteur non nul $x \in E$ peut être normé en posant : $u = \frac{1}{\|x\|}.x$

Démonstration

Par homogénéité et positivité de la norme, on a : $\|u\| = \left\| \frac{1}{\|x\|}.x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \times \|x\| = 1$. □

💡 Exemple 8.2 – Parallèle avec les complexes

Dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme trigonométrique : $z = \rho \times e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

On a alors $u = \frac{1}{\rho} \times z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

🔧 Théorème 8.1 – Inégalité triangulaire généralisée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|u_k\|.$$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n . Pour tout $n \geq 1$, on note $\mathcal{H}_n$:

$$\llcorner \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|u_k\|. \gg$$

Initialisation. $n = 1$. Soit $u_1 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\left\| \sum_{k=1}^1 \lambda_k \cdot u_k \right\| = \|\lambda_1 \cdot u_1\| = |\lambda_1| \|u_1\| = \sum_{k=1}^1 |\lambda_k| \|u_k\|.$$

Donc, $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

Soient $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

On note $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k$ et $y = \lambda_{n+1} \cdot u_{n+1}$. Par inégalité triangulaire :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot u_k \right\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Or, par $\mathcal{H}_n$,

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|u_k\| \quad \text{et} \quad \|y\| = |\lambda_{n+1}| \|u_{n+1}\|.$$

Donc,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|u_k\| + |\lambda_{n+1}| \|u_{n+1}\| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |\lambda_k| \|u_k\|.$$

Donc, $\mathcal{H}_{n+1}$. Ce qui achève la récurrence. □

🔧 Proposition 8.2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

On a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{et} \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration

Soit $(x, y) \in E^2$. On sait que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. En remplaçant y par $-y$, on a : $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Par inégalité triangulaire, on a :

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \text{et} \quad \|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|.$$

Or, $\|x - y\| = \|y - x\|$.

Donc,

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Ainsi, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

En remplaçant y par $-y$, on a : $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$. □

I.2. Distance associée à une norme

Définition 8.3 – Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

La **distance associée à la norme** $\|\cdot\|$ est l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in E$ par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Proposition 8.3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$. On a :

- **Positivité** : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geq 0$.
- **Séparation** : $\forall (x, y) \in E^2, [d(x, y) = 0 \iff x = y]$.
- **Symétrie** : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$.
- **Inégalité triangulaire** : $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Démonstration

Conséquence immédiate des définitions de d et $\|\cdot\|$. □

I.3. Boules ouvertes, boules fermées

Définition 8.4 – Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

On appelle **boule ouverte de centre a et de rayon r** l'ensemble noté $B_o(a, r)$ et défini par :

$$B_o(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\} = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}.$$

On appelle **boule fermée de centre a et de rayon r** l'ensemble noté $B_f(a, r)$ et défini par :

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\} = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

On appelle **sphère de centre a et de rayon r** l'ensemble noté $S(a, r)$ et défini par :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\} = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}.$$

Remarque 8.2

Avec les notations de la définition, on a : $S(a, r) = B_f(a, r) \setminus B_o(a, r)$.

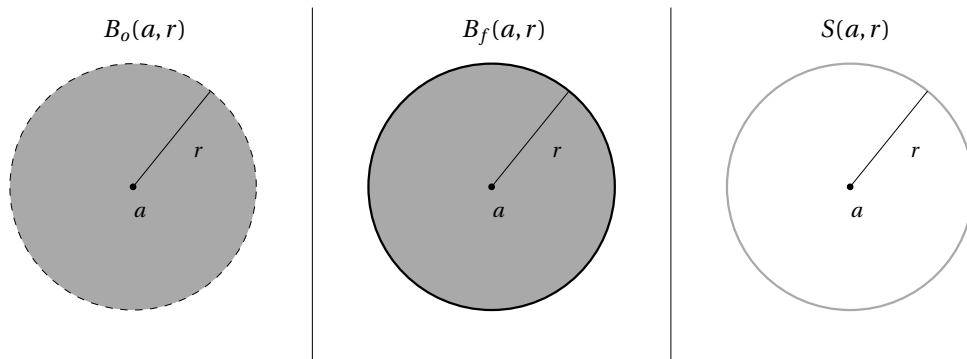
$B_o(0, 1)$ est appelée **boule unité ouverte** de E , $B_f(0, 1)$ est appelée **boule unité fermée** de E et $S(0, 1)$ est appelée **sphère unité** de E .

Exemple 8.3 – Intervalles de $\mathbb{R}$, disque de $\mathbb{C}$

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, les boules ouvertes sont les intervalles ouverts bornés et les boules fermées sont les intervalles fermés bornés (autrement dit, les segments) :

- pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a $B_o(a, r) =]a-r, a+r[$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha \leq \beta$, on a $]\alpha, \beta[= B_o\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right)$;
- pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a $B_f(a, r) = [a-r, a+r]$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha \leq \beta$, on a $[\alpha, \beta] = B_f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right)$.

Dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, les boules ouvertes sont les disques ouverts, les boules fermées sont les disques fermés et les sphères sont les cercles.



I.4. Produit d'espaces vectoriels normés



Proposition 8.4

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$ des espaces vectoriels normés.

L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E_1 \times \dots \times E_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) &\mapsto \max(\|x_1\|_1, \dots, \|x_p\|_p) \end{aligned}$$

est une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$.

Démonstration

On vérifie les points de la définition de norme en utilisant que $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_p$ sont des normes.

► Positivité. Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$. On a $\|x\| = \max(\|x_1\|_1, \dots, \|x_p\|_p) \geq 0$ (maximum de nombres positifs car $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_p$ sont des normes).

► Séparation. Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$.

On a $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $\|x_1\|_1 = 0, \dots, \|x_p\|_p = 0$ si, et seulement si, $x_1 = 0_{E_1}, \dots, x_p = 0_{E_p}$.

► Homogénéité. Soient $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\lambda.x = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_p)$.

D'où, $\|\lambda.x\| = \|(\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_p)\| = \max(\|\lambda.x_1\|_1, \dots, \|\lambda.x_p\|_p) = \max(|\lambda| \times \|x_1\|_1, \dots, |\lambda| \times \|x_p\|_p) = |\lambda| \times \max(\|x_1\|_1, \dots, \|x_p\|_p) = |\lambda| \times \|x\|$.

► Inégalité triangulaire. Soient $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ et $y = (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$.

On a : $\|x_1 + y_1\|_1 \leq \|x_1\|_1 + \|y_1\|_1 \leq \|x\| + \|y\|, \dots, \|x_p + y_p\|_p \leq \|x_p\|_p + \|y_p\|_p \leq \|x\| + \|y\|$.

Donc, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ainsi, $\|\cdot\|$ est une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$. □



Définition 8.5 – Espace produit

Avec les notations de la proposition précédente, la norme $\|\cdot\|$ est appelée **norme produit** et on dit que $(E_1 \times \dots \times E_p, \|\cdot\|)$ est l'**espace** vectoriel normé **produit** de $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$

I.5. Norme associée à un produit scalaire

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 8.6 – Produit scalaire, Espace préhilbertien, Espace euclidien

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle **produit scalaire sur E** toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est :

- **bilinéaire** : c'est-à-dire une application **linéaire à gauche**

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \varphi(\lambda.x_1 + \mu.x_2, y) = \lambda \times \varphi(x_1, y) + \mu \times \varphi(x_2, y)$$

et **linéaire à droite**

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \varphi(x, \lambda.y_1 + \mu.y_2) = \lambda \times \varphi(x, y_1) + \mu \times \varphi(x, y_2).$$

- **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- **positive** : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.
- **définie** : Si $\varphi(x, x) = 0$, alors $x = 0_E$.

Dans ce cas, le produit scalaire de deux vecteurs x et y est plutôt noté $\langle x, y \rangle$. On trouve aussi les notations $(x|y)$ ou $x \cdot y$.

On dit que le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien (réel)**.

Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

De plus, l'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur E appelée norme euclidienne associée au produit scalaire.

$$x \mapsto \| \cdot \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

En particulier, $(E, \| \cdot \|)$ est alors un **espace vectoriel normé**.

Remarque 8.3

Soit $x \in E$. L'application $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire, donc $\langle x, 0_E \rangle = 0$, puis par symétrie, $\langle 0_E, x \rangle = 0$.

Donc, pour tout $x \in E$, $\langle x, 0_E \rangle = 0$ et est linéaire, donc $\langle x, 0_E \rangle = 0$, puis par symétrie, $\langle 0_E, x \rangle = 0$.

Théorème 8.2 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors

$$\forall (x, y) \in E \times E, |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \times \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

De plus, on a l'égalité $|\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \times \sqrt{\langle y, y \rangle}$ si, et seulement si, $y = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda.y$ (c'est-à-dire, x et y sont colinéaires).

Théorème 8.3 – Inégalité triangulaire et cas d'égalité

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\| \cdot \|$ la norme associée.

► Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

► De plus, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si, $y = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda.y$ (c'est-à-dire, x et y sont colinéaires et de même sens).

I.6. Normes sur $\mathbb{K}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$

Définition 8.7 – Norme 1 sur $\mathbb{K}^n$

On définit la **norme 1** sur $\mathbb{K}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Exercice 8.1

Montrer que l'application précédente définie bien une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Résolution

► Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \geq 0$ comme somme de modules.

D'où la positivité de $\|\cdot\|_1$.

► Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = 0$. On a donc $\sum_{k=1}^n |x_k| = 0$ qui est une somme de réels positifs. Donc, $|x_1| = \dots = |x_n| = 0$.

D'où $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

D'où la séparation de $\|\cdot\|_1$.

► Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\|\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)\|_1 = \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = |\lambda| \times \sum_{k=1}^n |x_k| = |\lambda| \times \|(x_1, \dots, x_n)\|_1.$$

D'où l'homogénéité de $\|\cdot\|_1$.

► Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Par inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$, on a :

$$\|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_1 = \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 + \|(y_1, \dots, y_n)\|_1.$$

D'où, $\|\cdot\|_1$ vérifie l'inégalité triangulaire.

Définition 8.8 – Norme 2 sur $\mathbb{K}^n$

On définit la **norme 2** sur $\mathbb{K}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

Remarque 8.4

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on retrouve la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \times y_k = x_1 \times y_1 + \dots + x_n \times y_n.$$

Exercice 8.2

Montrer que l'application précédente définie bien une norme sur $\mathbb{C}^n$.

Résolution

► Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on a $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \geq 0$.

D'où la positivité de $\|\cdot\|_2$.

► Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = 0$. On a donc $\sum_{k=1}^n |x_k|^2 = 0$ qui est une somme de réels positifs. Donc, $|x_1| = \dots = |x_n| = 0$.

D'où $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

D'où la séparation de $\|\cdot\|_2$.

► Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$\|\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)\|_2 = \|(\lambda \times x_1, \dots, \lambda \times x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\lambda \times x_k|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \times \sum_{k=1}^n |x_k|^2} = |\lambda| \times \|(x_1, \dots, x_n)\|_2.$$

D'où l'homogénéité de $\|\cdot\|_2$.

► Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Par inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_2 = \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^2}.$$

Or, $(|x_1|, \dots, |x_n|) \in \mathbb{R}^n$ et $(|y_1|, \dots, |y_n|) \in \mathbb{R}^n$. Donc, en appliquant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_2 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 + \|(y_1, \dots, y_n)\|_2.$$

D'où, $\|\cdot\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire.

Théorème 8.4 – Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire dans $\mathbb{K}^n$

Pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \times y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2}.$$

Remarque 8.5

Dans ce cas, l'inégalité triangulaire s'appelle aussi l'inégalité de Minkowski.

Définition 8.9 – Norme infinie sur $\mathbb{K}^n$

On définit la **norme infinie** sur $\mathbb{K}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Exercice 8.3

Montrer que l'application précédente définit bien une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Résolution

► Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \geq 0$ comme maximum de réels positifs.

D'où la positivité de $\|\cdot\|_\infty$.

► Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = 0$. On a donc $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0$ qui est le maximum de réels positifs. Donc, $|x_1| = \dots = |x_n| = 0$.

D'où $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

D'où la séparation de $\|\cdot\|_\infty$.

► Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\|\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \|(\lambda \times x_1, \dots, \lambda \times x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda \times x_k| = \max_{1 \leq k \leq n} (|\lambda| \times |x_k|) = |\lambda| \times \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |\lambda| \times \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty.$$

D'où l'homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$.

► Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On a :

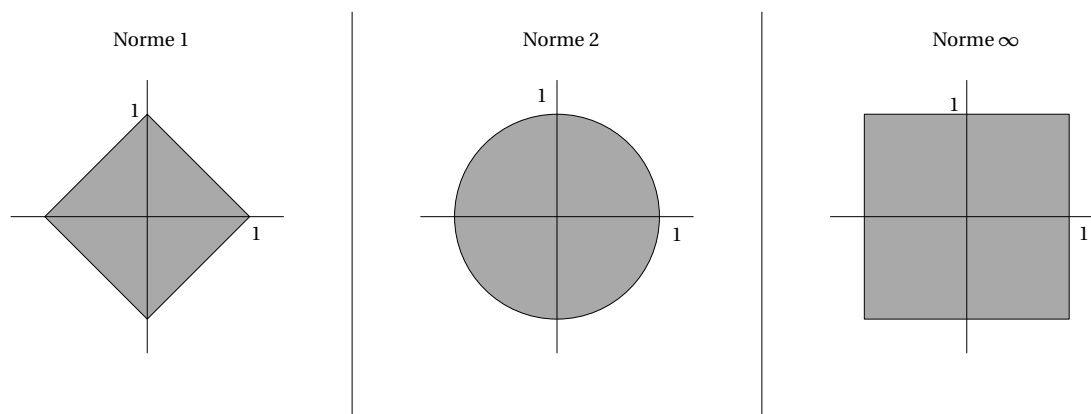
$$\|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_\infty = \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k|.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty + \|(y_1, \dots, y_n)\|_\infty$.

Donc, $\|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_\infty \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty + \|(y_1, \dots, y_n)\|_\infty$

D'où, $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité triangulaire.

Remarque 8.6 Boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ pour les normes 1, 2 et infinie



I.7. Norme infinie sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ non vide. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 8.10 – Borne supérieure, borne inférieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

► On appelle **borne supérieure de A** le plus petit des majorants de A , s'il existe. Dans ce cas, un tel élément est unique et est noté $\sup(A)$ ou $\sup A$.

► On appelle **borne inférieure de A** le plus grand des minorants de A , s'il existe. Dans ce cas, un tel élément est unique et est noté $\inf(A)$ ou $\inf A$.

Théorème 8.5 – Théorème de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Notation 8.1 – Cas d'une partie non majorée ou non minorée

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Lorsque A n'est pas majorée, on pose $\sup(A) = +\infty$.
- Lorsque A n'est pas minorée, on pose $\inf(A) = -\infty$.

Théorème 8.6 – Caractérisation de la borne supérieure

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} S = \sup(A) &\iff \begin{cases} S \text{ est un majorant de } A \\ S \text{ est le plus petit des majorants de } A \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} S \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, S - \varepsilon < x. \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que l'assertion « y n'est pas un majorant de A » est équivalent à « $\exists x \in A, y < x$ ».

□

Remarque 8.7

On a une propriété similaire pour la borne inférieure.

Proposition 8.5

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$.

On note $kA = \{k \times a \mid a \in A\}$ l'ensemble des réels obtenus en multipliant les éléments de A par k .

Alors,

$$\sup(kA) = k \times \sup(A).$$

Démonstration

Cas 1 : $k = 0$. Dans ce cas, $kA = \{0\}$. Donc, $\sup(kA) = 0$ et l'égalité est vérifiée.

Cas 2 : $k \neq 0$.

► Soit $b \in kA$, on a $b = k \times a$ où $a \in A$.

Or, $a \leq \sup A$.

Donc, $b \leq k \times \sup(A)$.

On en déduit que $k \times \sup(A)$ est un majorant de kA .

Donc,

$$\sup(kA) \leq k \times \sup(A).$$

► Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $k \times \sup(A) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de kA .

Comme $\frac{\varepsilon}{k} > 0$, $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{k}$ n'est pas un majorant de A .

Donc, il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{k} < a$.

En multipliant par $k > 0$, on a : $k \times \sup(A) - \varepsilon < k \times a$.

Comme $k \times a \in kA$, on en déduit que $k \times \sup(A) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de kA .

Ainsi, $\sup(kA) = k \times \sup(A)$.

□

Exemple 8.4

On a $2.[0, 1[= [0, 2[$.

Définition 8.11 – Norme infinie sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$

On définit alors la **norme infinie** sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in X} |f(t)| = \sup_X |f| = \sup \{|f(t)| \mid t \in X\}.$$

Exercice 8.4

Vérifier que l'application précédente est bien une norme $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

Résolution

► L'ensemble $\{|f(t)| \mid t \in X\}$ est une partie non vide et majorée (car f est bornée) de $\mathbb{R}$. Donc, par le théorème de la borne supérieure, $\sup_X |f|$ est bien définie.

► Pour tout $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, on a $\|f\|_\infty = \sup_X |f| \geq 0$ comme borne supérieure d'une partie minorée par 0.

D'où la positivité de $\|\cdot\|_\infty$.

► Soit $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ tel que $\|f\|_\infty = 0$. On a donc $\sup_X |f| = 0$. Or, $|f|$ est une fonction positive sur X . Donc, f est la fonction nulle.

D'où la séparation de $\|\cdot\|_\infty$.

► Soit $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. En utilisant la proposition 8.5 avec $A = \{|f(t)| \mid t \in X\}$ et $k = |\lambda| \geq 0$, on a :

$$kA = \{|\lambda \times f(t)| \mid t \in X\} \quad \text{et} \quad \|\lambda \cdot f\|_\infty = \sup_X |\lambda \cdot f| = \sup_X |\lambda| \times |f| = |\lambda| \times \sup_X |f| = |\lambda| \times \|f\|_\infty.$$

D'où l'homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$.

► Soient $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

Par inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$, pour tout $t \in X$, on a : $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Donc, par définition de la borne supérieure, $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

D'où, $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité triangulaire.

I.8. Exercice : Normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, où $a < b$ sont des réels

Exercice 8.5 – Norme 1 sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on note :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Vérifier que l'application précédente est bien une norme $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Résolution

► Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on a $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale ($|f|$ est une fonction positive).

D'où la positivité de $\|\cdot\|_1$.

► Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ tel que $\|f\|_1 = 0$. On a donc $\int_a^b |f(t)| dt = 0$. Or, $|f|$ est une fonction positive et continue sur $[a, b]$. Donc, f est la fonction nulle.

D'où la séparation de $\|\cdot\|_1$.

► Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|\lambda \cdot f\|_1 = \int_a^b |\lambda \times f(t)| dt = |\lambda| \times \int_a^b |f(t)| dt = |\lambda| \times \|f\|_1.$$

D'où l'homogénéité de $\|\cdot\|_1$.

► Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Par inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$, croissance et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|f + g\|_1 = \int_a^b |f(t) + g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| + |g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |g(t)| dt \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

D'où, $\|\cdot\|_1$ vérifie l'inégalité triangulaire.

Exercice 8.6 – Norme 2 sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on note :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Vérifier que l'application précédente est bien une norme $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Résolution

Cas 1 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On reconnaît la norme euclidienne associée au produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \times g(t) dt.$$

Cas 2 : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

► Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, on a $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \geq 0$ par positivité de l'intégrale ($|f|$ est une fonction positive).

D'où la positivité de $\|\cdot\|_2$.

► Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ tel que $\|f\|_2 = 0$. On a donc $\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$. Or, $|f|^2$ est une fonction positive et continue sur $[a, b]$. Donc, f est la fonction nulle.

D'où la séparation de $\|\cdot\|_2$.

► Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|\lambda \cdot f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |\lambda \times f(t)|^2 dt} = \sqrt{|\lambda|^2 \times \int_a^b |f(t)|^2 dt} = |\lambda| \times \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} = |\lambda| \times \|f\|_2.$$

D'où l'homogénéité de $\|\cdot\|_2$.

► Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. Par inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, croissance de l'intégrale et croissance de la fonction racine carrée, on a :

$$\|f + g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t) + g(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)^2 dt}.$$

Or, $|f|$ et $|g|$ sont des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs positives. Donc, en appliquant l'inégalité triangulaire dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a :

$$\|f + g\|_2 \leq \sqrt{\int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt} \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

D'où, $\|\cdot\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire.

Théorème 8.7 – Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

Pour tous $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on a :

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \times \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt} \quad \text{et} \quad \sqrt{\int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}.$$

Exercice 8.7 – Norme ∞ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on note :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Vérifier que l'application précédente est bien une norme $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Résolution

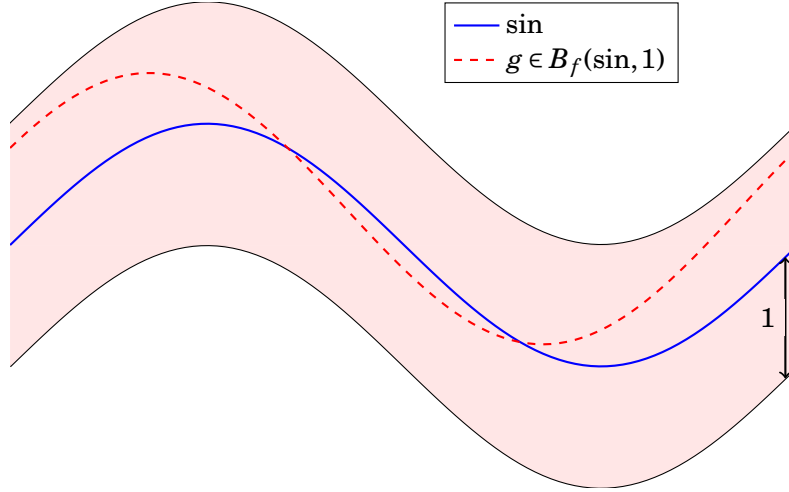
Par le théorème des bornes atteintes, toute application continue sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles est bornée (et atteint ses bornes). On peut donc définir la norme infinie sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ (Définition 11) :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

💡 **Exemple 8.5 – Boule unité fermée pour la norme infinie**

On munit $\mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a :

$$\begin{aligned} g \in B_f(\sin, 1) &\iff \|g - \sin\|_\infty \leq 1 \\ &\iff \forall x \in [0, 2\pi], |g(x) - \sin(x)| \leq 1 \\ &\iff \forall x \in [0, 2\pi], \sin(x) - 1 \leq g(x) \leq \sin(x) + 1. \end{aligned}$$



I.9. Exercice : normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$



Exercice 8.8 – Norme 1 sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note :

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|.$$

Vérifier que l'application précédente est bien une norme $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Résolution

► Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \geq 0$ comme somme de réels positifs.

D'où la positivité de $\|\cdot\|_1$.

► Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ tel que $\|A\|_1 = 0$. On a donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| = 0$ qui est une somme de réels positifs.

Donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $|a_{i,j}| = 0$. Donc, $A = 0$.

D'où la séparation de $\|\cdot\|_1$.

► Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\|\lambda \cdot A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |\lambda \times a_{i,j}| = |\lambda| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| = |\lambda| \times \|A\|_1.$$

D'où l'homogénéité de $\|\cdot\|_1$.

► Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :

$$\|A + B\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |b_{i,j}| \leq \|A\|_1 + \|B\|_1.$$

D'où, $\|\cdot\|_1$ vérifie l'inégalité triangulaire.


Exercice 8.9 – Norme 2 sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2}.$$

Vérifier que l'application précédente est bien une norme $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Résolution

Cas 1 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On reconnaît la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2, \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top \times B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} \times b_{i,j}$$

où $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Cas 2 : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. ► Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on a $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} \geq 0$ comme somme de réels positifs.

D'où la positivité de $\|\cdot\|_2$.

► Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ tel que $\|A\|_2 = 0$. On a donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 = 0$ qui est une somme de réels positifs.

Donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $|a_{i,j}| = 0$. Donc, $A = 0$.

D'où la séparation de $\|\cdot\|_2$.

► Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$\|\lambda.A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |\lambda \times a_{i,j}|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} = |\lambda| \times \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} = |\lambda| \times \|A\|_2.$$

D'où l'homogénéité de $\|\cdot\|_2$.

► Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On a :

$$\|A + B\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j} + b_{i,j}|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (|a_{i,j}| + |b_{i,j}|)^2}.$$

Or, $(|a_{i,j}|)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $(|b_{i,j}|)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ sont deux matrices à coefficients réels. Donc, en appliquant l'inégalité triangulaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|A + B\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (|a_{i,j}| + |b_{i,j}|)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |b_{i,j}|^2} \leq \|A\|_2 + \|B\|_2.$$

D'où, $\|\cdot\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire.


Exercice 8.10 – Norme ∞ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note :

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{i,j}|.$$

Vérifier que l'application précédente est bien une norme $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Résolution

► Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{i,j}| \geq 0$ comme maximum de réels positifs.

D'où la positivité de $\|\cdot\|_\infty$.

► Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ tel que $\|A\|_\infty = 0$. On a donc $\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{i,j}| = 0$ qui est le maximum de nombres réels positifs.

Donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $|a_{i,j}| = 0$. Donc, $A = 0$.

D'où la séparation de $\|\cdot\|_\infty$.

► Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\|\lambda A\|_{\infty} = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |\lambda \times a_{i,j}| = |\lambda| \times \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{i,j}| = |\lambda| \times \|A\|_{\infty}.$$

D'où l'homogénéité de $\|\cdot\|_{\infty}$.

► Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a : pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket$, $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq \|A\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}$.

Donc, $\|A + B\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}$.

D'où, $\|\cdot\|_{\infty}$ vérifie l'inégalité triangulaire.

I.10. Exercice : normes sur $\mathbb{K}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé



Exercice 8.11 – Norme 1 sur $\mathbb{K}_n[X]$

Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on note :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|.$$

Vérifier que l'application précédente est bien une norme $\mathbb{K}_n[X]$.

Résolution

À faire



Exercice 8.12 – Norme 2 sur $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \forall Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k \times b_k.$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, on note :

$$\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n |a_k|^2}.$$

Vérifier que $\|\cdot\|$ définit bien norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

Résolution

À faire



Exercice 8.13 – Norme ∞ sur $\mathbb{K}_n[X]$

Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on note :

$$\|P\|_{\infty} = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Vérifier que l'application précédente est bien une norme $\mathbb{K}_n[X]$.

Résolution

À faire

I.11. Caractère borné

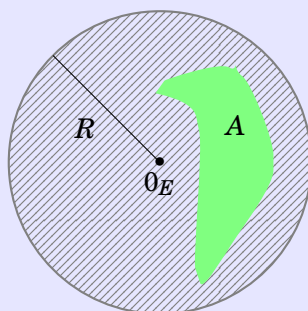


Définition 8.12 – Partie bornée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

On dit qu'une partie A de E est **bornée** lorsqu'il existe $R \geq 0$ tel que : $\forall x \in A, \|x\| \leq R$.

Autrement dit, $A \subset B_f(0_E, R)$.



Exemple 8.6

Les boules ouvertes, les boules fermées et les sphères sont bornées.



Définition 8.13 – Suite d'éléments d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- On appelle **suite d'éléments de E** toute application $u : \mathbb{N} \rightarrow E$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = u(n)$ le terme de la suite de rang n . La suite u est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (u_n) .
- On appelle **suite d'éléments de E définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$** toute application $u : [n_0, +\infty[\rightarrow E$ et on la note $(u_n)_{n \geq n_0}$.



Proposition 8.6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

L'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E muni des opérations :

$$\forall ((u_n), (v_n)) \in E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (u_n) + (v_n) = (u_n + v_n) \quad \text{et} \quad \lambda.(u_n) = (\lambda.u_n)$$

est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration

On remarque $E^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de référence. □



Remarque 8.8

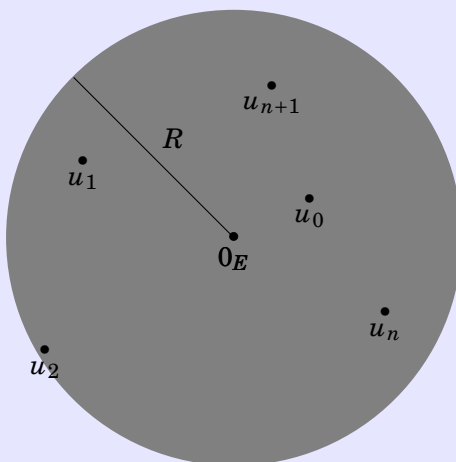
On étend cette proposition aux suites définies à partir d'un certain rang.

📖 Définition 8.14 – Suite bornée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

On dit qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsqu'il existe $R \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq R$.

Autrement dit, la partie $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ de E est bornée, ou encore, il existe $R \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in B_f(0_E, R)$.



💡 Exemple 8.7

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$ est bornée.

🔍 Remarque 8.9 – En dimension infinie, le caractère borné d'une suite dépend de la norme considérée

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|_2$ sur E .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie, pour tout $x \in [0, 1]$, par $f_n(x) = \sqrt{n} \times x^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n\|_{\infty} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 n \times x^{2n} dx} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \leq 1$. Donc, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(E, \|\cdot\|_2)$.

📖 Définition 8.15 – Fonction bornée

Soient X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

On dit qu'une fonction $f \in E^X$ est **bornée** lorsqu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$.

Autrement dit, la partie $\{f(x) | x \in X\} \subset E$ est bornée, ou encore, il existe $M \geq 0$ tel que : $\forall x \in X, f(x) \in B_f(0_E, M)$.

💡 Exemple 8.8

La fonction $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée.

$$z \mapsto \frac{z+i \times \bar{z}}{|z|}$$

🔗 Notation 8.2

Soient X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

L'ensemble des fonctions bornées de E dans X est noté $\mathcal{B}(X, E)$.



Proposition 8.7

Soient X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E est une sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E .

Démonstration

Exercice



Théorème 8.8

Soient X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

L'application $N : \mathcal{B}(X, E) \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.

$$f \mapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

Pour tout $f \in \mathcal{B}(X, E)$, on note $\|f\|_\infty = N(f) = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$.

Démonstration

Soit $f \in \mathcal{B}(X, E)$. L'ensemble $\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc possède une borne supérieure. Donc, $N(f)$ existe.

► Pour tout $f \in \mathcal{B}(X, E)$, on a $N(f) = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \geq 0$ comme borne supérieure de la partie $\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$ minorée par 0.

D'où la positivité de N .

► Soit $f \in \mathcal{B}(X, E)$ tel que $N(f) = 0$. On a donc, pour tout $x \in X$, $0 \leq \|f(x)\| \leq N(f)$. Donc, pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| = 0$, donc par séparation de la norme, $f(x) = 0_E$: f est la fonction nulle.

D'où la séparation de N .

► Soit $f \in \mathcal{B}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par homogénéité de la norme sur E , on a :

$$N(f) = \sup_{x \in X} \|\lambda \times f(x)\| = \sup_{x \in X} |\lambda| \times \|f(x)\| = |\lambda| \times \sup_{x \in X} \|f(x)\| = |\lambda| \times N(f).$$

D'où l'homogénéité de N .

► Soit $f \in \mathcal{B}(X, E)$ et $g \in \mathcal{B}(X, E)$. Par inégalité triangulaire de la norme sur E , pour tout $x \in X$, on a : $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq N(f) + N(g)$.

Donc, $N(f) + N(g)$ est un majorant de $\{\|f(x) + g(x)\| \mid x \in X\}$.

D'où, par définition de la borne supérieure, $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$.

D'où, N vérifie l'inégalité triangulaire. □

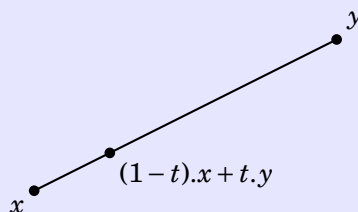
I.12. Partie convexe



Définition 8.16 – Segment

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on note

$$[x, y] = \{(1-t).x + t.y \mid t \in [0, 1]\}.$$

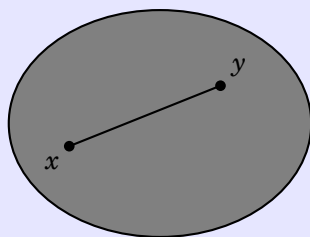


Définition 8.17 – Partie convexe

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et A une partie de E .

On dit que A est **convexe** lorsque, pour tout $(x, y) \in A^2$, $[x, y] \subset A$. Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], \quad (1-t).x + t.y \in A.$$



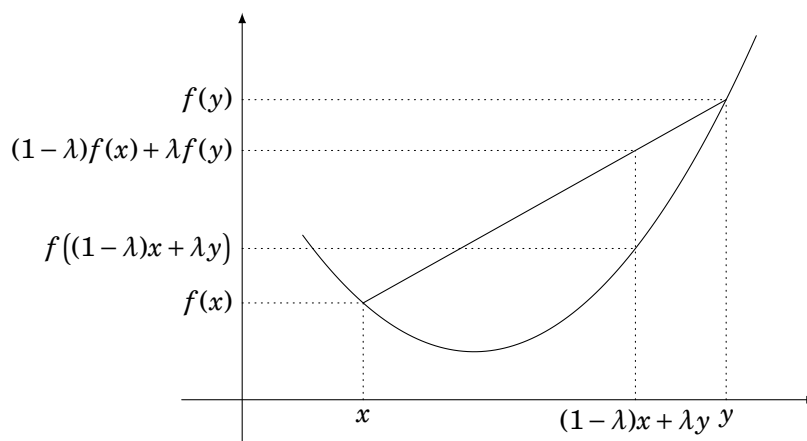
Remarque 8.10

La notion d'ensemble convexe ne fait pas intervenir la notion de norme.

Exemple 8.9

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe : pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$



L'épigraphe de f est l'ensemble des points qui se trouvent « au dessus » du graphe de $f : E_f = \{(x, y) | x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$. La partie E_f est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 8.9

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- Les boules ouvertes et les boules fermées sont convexes.
- Les sphères de rayon strictement positif ne sont pas convexes.

Démonstration

Soit $a \in E$ et $r \geq 0$.

► **Montrons que la boule ouverte $B_o(a, r)$ est convexe.**

Soient $(x, y) \in B_o(a, r) \times B_o(a, r)$ et $t \in [0, 1]$. On a : $\|(1-t)x + ty - a\| = \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\|$.

D'où, par inégalité triangulaire puis homogénéité, on a : $\|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \leq |1-t| \times \|x-a\| + |t| \times \|y-a\|$.

Or, par définitions de x, y et t , on a : $\|x-a\| < r, \|y-a\| < r, t \in [0, 1]$ et $1-t \in [0, 1]$.

Donc, $|1-t| \times \|x-a\| + |t| \times \|y-a\| < (1-t)r + tr$.

Donc, $\|(1-t)x + ty - a\| < r$. D'où, $(1-t)x + ty \in B_o(a, r)$.

Donc, $[x, y] \subset B_o(a, r)$. Ceci est vrai pour tout $(x, y) \in E^2$.

Ainsi, $B_o(a, r)$ est convexe.

► **Montrons que la boule fermée $B_f(a, r)$ est convexe.**

Soient $(x, y) \in B_f(a, r) \times B_f(a, r)$ et $t \in [0, 1]$. On a : $\|(1-t)x + ty - a\| = \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\|$.

D'où, par inégalité triangulaire puis homogénéité, on a : $\|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \leq |1-t| \times \|x-a\| + |t| \times \|y-a\|$.

Or, par définitions de x, y et t , on a : $\|x-a\| \leq r, \|y-a\| \leq r, t \in [0, 1]$ et $1-t \in [0, 1]$.

Donc, $|1-t| \times \|x-a\| + |t| \times \|y-a\| \leq (1-t)r + tr$.

Donc, $\|(1-t)x + ty - a\| \leq r$. D'où, $(1-t)x + ty \in B_f(a, r)$.

Donc, $[x, y] \subset B_f(a, r)$. Ceci est vrai pour tout $(x, y) \in E^2$.

Ainsi, $B_f(a, r)$ est convexe.

► On suppose que $r > 0$. **Montrons que la sphère $S(a, r)$ n'est pas convexe.**

Soit $x \in S(a, r)$. Alors $y = 2a - x \in S(a, r)$ car $\|y-a\| = \|2a-x-a\| = \|a-x\| = r$.

Or, $a = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in [x, y]$ mais $a \notin S(a, r)$ car $\|a-a\| = 0 \neq r$.

Donc, $S(a, r)$ n'est pas convexe. □

Exemple 8.10

- La partie $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) | y \geq 0\}$ n'est pas convexe.
- La partie $\{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1 \text{ et } |z-1| > 1\}$ n'est pas convexe.

II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

II.1. Suites convergentes, suites divergentes



Définition 8.18 – Suite convergente, Suite divergente

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

► Soit $\ell \in E$. On dit que la **suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. Un tel vecteur ℓ est appelé **limite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

► On dit que la **suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** lorsqu'il existe $\ell \in E$ tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

► On dit que la **suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge** lorsqu'elle ne converge pas.



Théorème 8.10 – Unicité de la limite lorsqu'elle existe

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On suppose qu'il existe $(\ell_1, \ell_2) \in E^2$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_1$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_2$.

Alors, $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration

Par l'absurde, on suppose $\ell_1 \neq \ell_2$.

On pose $\varepsilon = \frac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{3} > 0$ (car $\ell_1 \neq \ell_2$). Par définition de suite convergente, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N_1$,

$\|u_n - \ell_1\| \leq \varepsilon$ et pour tout $n \geq N_2$, $\|u_n - \ell_2\| \leq \varepsilon$.

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\forall n \geq N, \|\ell_1 - \ell_2\| \leq \|\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2\| \leq \|\ell_1 - u_n\| + \|u_n - \ell_2\| \leq 2\varepsilon \leq \frac{2\|\ell_1 - \ell_2\|}{3}.$$

Comme $\|\ell_1 - \ell_2\| > 0$, on aboutit à une contradiction. Donc, $\ell_1 = \ell_2$. □

Remarque 8.11

► Puisque la limite ℓ d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est unique lorsqu'elle existe, on notera dans ce cas $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

► On peut ramener l'étude de suites d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ à l'étude de suites numériques :

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple 8.11 – Suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$, on considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right), \operatorname{Arctan}(n), \frac{1}{n} \right).$$

On a :

$$\left\| u_n - \left(1, \frac{\pi}{2}, 0 \right) \right\|_\infty = \left\| \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1, \operatorname{Arctan}(n) - \frac{\pi}{2}, \frac{1}{n} \right) \right\|_\infty = \max \left(\left| \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right|, \left| \operatorname{Arctan}(n) - \frac{\pi}{2} \right|, \frac{1}{n} \right).$$

Or, $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\operatorname{Arctan}(n) - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right).$$

💡 Exemple 8.12 – Suite d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$, on considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \begin{pmatrix} n \times \sin\left(\frac{1}{n}\right) & \frac{1}{n} \\ n \times e^{-n} & n \times \tan\left(\frac{1}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\|A_n - I_2\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} n \times \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 & \frac{1}{n} \\ n \times e^{-n} & n \times \tan\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\left(\left|n \times \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right|, \frac{1}{n}, n \times e^{-n}, \left|n \times \tan\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right|\right).$$

Or, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par croissances comparées, $n \times e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et par les équivalents usuels :

$n \times \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $n \times \tan\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I_2.$$

⚙️ Théorème 8.11

Soient E un espace vectoriel normé de **dimension finie** $p \geq 1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^1.e_1 + \dots + u_n^p.e_p$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les **suites coordonnées** $(u_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, ..., $(u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{B}$ convergent.

En cas de convergence, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^1\right).e_1 + \dots + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^p\right).e_p.$$

Démonstration

Admis (pour l'instant).

📖 Remarque 8.12

► On admet aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si les suites coordonnées $(u_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, ..., $(u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont bornées.

► On peut reformuler le théorème :

Une suite converge si, et seulement si, ses suites coordonnées dans une base de E convergent.

Par conséquent, en utilisant la base canonique de $\mathbb{K}^N$:

Pour étudier la convergence d'une suite de N -uplet, il suffit d'étudier la convergence de chacune des suites définies par ses coefficients.

Par conséquent, en utilisant la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

Pour étudier la convergence d'une suite de matrices, il suffit d'étudier la convergence de chacune des suites définies par ses coefficients.

De même, en utilisant la base canonique de $\mathbb{K}_N[X]$ (où $N \in \mathbb{N}$) :

Pour étudier la convergence d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à N il suffit d'étudier la convergence de chacune des suites définies par ses coefficients.

💡 Exemple 8.13 – Lorsque l'espace est de dimension infinie, une suite peut être convergente pour une norme et divergente pour une autre norme

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur E .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sqrt{n} \times x^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n - \tilde{0}\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_0^1 \sqrt{n} \times x^n dx = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. D'où, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Une question se pose : Y a-t-il convergence vers une autre fonction pour cette norme ? Le théorème 8.12 page 24 ci-dessous montre que la réponse est Non !

II.2. Propriétés des suites convergentes

🔗 Théorème 8.12

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Démonstration

On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in E$.

Par définition de la limite : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|u_n - \ell\| \leq 1$.

D'où, par inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$, $\|u_n\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \leq 1 + \|\ell\|$.

On note $M = \max(\|u_0\|, \dots, \|u_{N-1}\|, \|\ell\|)$ (quantité indépendante de n). On a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq M$.

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée. □

👁 Remarque 8.13 – Prudence !

La réciproque est fausse. La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ mais ne converge pas.

👁 Remarque 8.14 – Suite de l'exemple 8.13 page 24

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, donc ne converge pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 8.8

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .
Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors la suite numérique $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$.

Démonstration

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|\|u_n\| - \|\ell\|\| \leq \|u_n - \ell\|.$$

Par théorème d'encadrement, on a : $\|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\ell\|$. □

Remarque 8.15 – Prudence !

La réciproque est fausse. La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas mais $|(-1)^n| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Théorème 8.13 – Opérations algébriques

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

► Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 \in E$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_2 \in E$.

Alors, $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

► Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors, $(\lambda_n \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \cdot \ell$.

Démonstration

► Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de limites, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N_1$, $\|u_n - \ell_1\| \leq \varepsilon$ et, pour tout $n \geq N_2$, $\|u_n - \ell_2\| \leq \varepsilon$.

On pose $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire, on a : pour tout $n \geq N$,

$$\|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)\| \leq \|u_n - \ell_1\| + \|u_n - \ell_2\| \leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Donc, $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

► Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lambda_n \cdot u_n - \lambda \cdot \ell = \lambda_n \cdot (u_n - \ell) + (\lambda_n - \lambda) \cdot \ell.$$

La suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge, donc elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n| \leq M$.

De plus, par définition de limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N_1$, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ et, pour tout $n \geq N_2$, $|\lambda_n - \lambda| \leq \varepsilon$.

On pose $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire et homogénéité, on a : pour tout $n \geq N$,

$$\|\lambda_n \cdot u_n - \lambda \cdot \ell\| \leq \|\lambda_n \cdot (u_n - \ell)\| + \|(\lambda_n - \lambda) \cdot \ell\| \leq |\lambda_n| \times \|u_n - \ell\| + |\lambda_n - \lambda| \times \|\ell\| \leq M \times \varepsilon + \|\ell\| \times \varepsilon \leq (M + \|\ell\|) \times \varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ ($M + \|\ell\|$ ne dépend pas de n). Donc, $(\lambda_n \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \cdot \ell$.

Corollaire 8.1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

L'ensemble $\mathcal{G}$ des suites convergentes d'éléments de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application

$\mathcal{G} \rightarrow E$ est linéaire.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Démonstration

► Montrons que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

- On a $\mathcal{G} \subset E^{\mathbb{N}}$.

- La suite nulle est convergente (elle converge vers 0_E).
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 \in E$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_2 \in E$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
D'après la seconde partie de la proposition précédente, $\lambda \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \cdot \ell_1$ et $\mu \cdot v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu \cdot \ell_2$.
D'où, en utilisant la première partie de la proposition précédente, $\lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \cdot \ell_1 + \mu \cdot \ell_2$.
Alors, $(\lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers $\lambda \cdot \ell_1 + \mu \cdot \ell_2$).

Ainsi, $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

► Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 \in E$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_2 \in E$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
D'après ce qui précède, $(\lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \cdot \ell_1 + \mu \cdot \ell_2$.

Donc, l'application $\mathcal{G} \rightarrow E$ est linéaire.

$$(u_n) \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

□



Définition 8.19 – Suite extraite

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On dit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, lorsqu'il existe $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}.$$

💡 Exemple 8.14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$

- Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ (suite des termes d'indices pairs) et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ (suite des termes d'indices impairs) sont des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
- Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite extraite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'écrit $(v_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (u_{\phi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$



Théorème 8.14

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Démonstration

► Montrons que si $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$

Par récurrence sur n . On note $H_n : \langle \phi(n) \geq n \rangle$ où $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. ϕ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $\phi(0) \geq 0$. D'où, H_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n vraie et on montre H_{n+1} . Par stricte croissance de ϕ , on a $\phi(n+1) > \phi(n)$ et, par hypothèse de récurrence, on a $\phi(n) \geq n$.

D'où, $\phi(n+1) > n$. Or, $\phi(n+1) \in \mathbb{N}$. Donc, $\phi(n+1) \geq n+1$. Donc, H_{n+1} est vraie.

Ce qui achève la récurrence.

► Soit $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

Par le résultat du premier point, pour tout $n \geq N$, on a $\phi(n) \geq n \geq N$, donc, $\|u_{\phi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$.

Ainsi, $u_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

□

🔍 Remarque 8.16 – Prudence

Si **une** suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas nécessairement.

Contre-exemple : la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge mais sa suite extraite des termes d'indice pair est constante donc converge.

Théorème 8.15

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On suppose que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $\ell \in E$. Alors, la suite (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration

Montrons que,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ , donc,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|u_{2n} - \ell\| \leq \varepsilon. \quad (\text{II.1})$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \|u_{2n+1} - \ell\| \leq \varepsilon. \quad (\text{II.2})$$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1) \in \mathbb{N}$. Soit $n \geq N$. Il y a deux cas :

- **Cas 1** : n est pair et s'écrit donc $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}$. Or, $n \geq N \geq 2N_1$, donc $p \geq N_1$.
D'où, d'après (II.1), $\|u_n - \ell\| = \|u_{2p} - \ell\| \leq \varepsilon$.
- **Cas 2** : n est impair et s'écrit donc $n = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. Or, $n \geq N \geq 2N_2 + 1$, donc $p \geq N_2$.
D'où, d'après (II.2), $\|u_n - \ell\| = \|u_{2p+1} - \ell\| \leq \varepsilon$.

Donc, dans tous les cas, pour tout $n \geq N$, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.

Ainsi,

La suite (u_n) converge vers ℓ .

Remarque 8.17

On pourra adapter la démonstration précédente pour montrer que : si les suites extraites (u_{3n}) , (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers la même limite $\ell \in E$, alors la suite (u_n) converge vers ℓ .

Remarque 8.18

On en déduit que la réciproque du théorème 8.14 est vraie.

Théorème 8.16

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$ des espaces vectoriels normés. On munit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ de $\|\cdot\|$ la norme produit.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E_1 \times \dots \times E_p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n s'écrit $(u_n^1, \dots, u_n^p)$, ce qui définit des suites $(u_n^1)_{n \in \mathbb{N}} \in E_1^{\mathbb{N}}$, $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}} \in E_2^{\mathbb{N}}$, ..., $(u_n^p)_{n \in \mathbb{N}} \in E_p^{\mathbb{N}}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E$ si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_k \in E_k$.

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$.

Par définition de la norme sur E , on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|u_n^k - \ell_k\|_k \leq \|u_n - \ell\|.$$

Or, $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc, par théorème d'encadrement, $\|u_n^k - \ell_k\|_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k .

($\Leftarrow$) On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_k \in E_k$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N_k$, $\|u_n^k - \ell_k\|_k \leq \varepsilon$.

On note $N = \max(N_1, \dots, N_p)$. On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$\|u_n - (\ell_1.e_1 + \dots + \ell_p.e_p)\| = \max(\|u_n^1 - \ell_1\|_1, \dots, \|u_n^p - \ell_p\|_p) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$.

□

III. Comparaison des normes

III.1. Définition



Définition 8.20 – Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel. On considère $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes sur E .

On dit que les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes lorsqu'il existe $C > 0$ et $D > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad C \times \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq D \times \|x\|_a$$

Remarque 8.19

Si les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes, on a l'existence de C' et D' des réels strictement positifs tels que :

$$\forall x \in E, \quad C' \times \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq D' \times \|x\|_b$$

Exemple 8.15 – Illustration dans le cas où $E = \mathbb{K}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$

Dans $\mathbb{K}^p$, on considère les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on a :

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty \leq \|(x_1, \dots, x_p)\|_1 \quad \text{et} \quad \|(x_1, \dots, x_p)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p |x_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^p \|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty^2} \leq \sqrt{p} \times \|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty.$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_1 = \sum_{k=1}^p |x_k| = \left\langle (|x_1|, \dots, |x_p|), (1, \dots, 1) \right\rangle \leq \|(|x_1|, \dots, |x_p|)\|_2 \times \|(1, \dots, 1)\|_2 \leq \sqrt{p} \times \|(x_1, \dots, x_p)\|_2.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^p$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{K}^p$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{p} \times \|x\|_2 \leq p \times \|x\|_\infty.$$

On en déduit que :

- Pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq p \times \|x\|_\infty$. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
- Pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, $\frac{1}{\sqrt{p}} \times \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{p} \times \|x\|_2$. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.
- Pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, $\frac{1}{\sqrt{p}} \times \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{p} \times \|x\|_\infty$. Les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.



Exercice 8.14 – Exemple de normes non équivalentes

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur E .

1. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.

Dans la suite, on montre que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall f \in E, \quad C \|f\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sqrt{n} \times x^n.$$

2. Calculer $\|f\|_1$ et $\|f\|_\infty$.

3. Conclure que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Résolution

1. Soit $f \in E$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$.

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty.$$

Donc,

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty.$$

2. On a :

$$\|f_n\|_\infty = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_0^1 \sqrt{n} \times x^n dx = \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$C\|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_1.$$

Donc,

$$\underbrace{C \times \sqrt{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}.$$

Contradiction. Donc, les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

III.2. L'équivalence des normes préserve la convergence et le caractère borné des suites

Théorème 8.17

Soit E un espace vectoriel. On considère $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes équivalentes sur E .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_a$ si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_b$.

Dans ce cas, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la même.

Démonstration

Les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes, donc, il existe $C > 0$ et $D > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad C \times \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq D \times \|x\|_a$$

($\Rightarrow$) On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_a$. Autrement dit, il existe $\ell_a \in E$ tel que $\|u_n - \ell_a\|_a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a :

$$0 \leq \|u_n - \ell_a\|_b \leq D \times \|u_n - \ell_a\|_a.$$

Donc, par théorème d'encadrement,

$$\|u_n - \ell_a\|_b \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_b$ vers ℓ_a .

($\Leftarrow$) On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_b$. Autrement dit, il existe $\ell_b \in E$ tel que $\|u_n - \ell_b\|_b \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme $C > 0$, on a :

$$0 \leq \|u_n - \ell_b\|_a \leq \frac{1}{C} \times \|u_n - \ell_b\|_b.$$

Donc, par théorème d'encadrement,

$$\|u_n - \ell_b\|_a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_a$ vers ℓ_b . □

Théorème 8.18

Soit E un espace vectoriel. On considère $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes équivalentes sur E .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_a$ si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_b$.

Démonstration

Les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes, donc, il existe $C > 0$ et $D > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad C \times \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq D \times \|x\|_a$$

($\Rightarrow$) On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_a$. Il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_a \leq M$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_b \leq D \times \|u_n\|_a \leq D \times M.$$

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_b$.

($\Leftarrow$) On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_b$. Il existe $M' \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_b \leq M'$.

Comme $C > 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|u_n\|_a \leq \frac{1}{C} \times \|u_n\|_b \leq \frac{M'}{C}.$$

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_a$. □

IV. Topologie d'un espace vectoriel

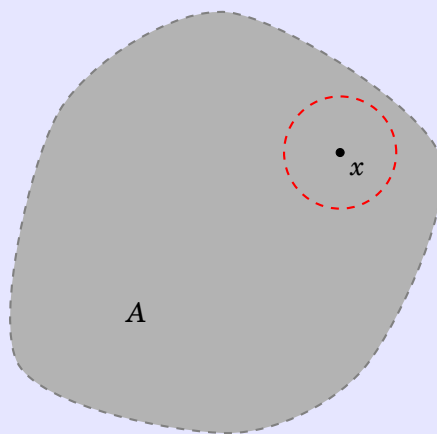
IV.1. Parties ouvertes, parties fermées



Définition 8.21 – Point intérieur à une partie

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un **point intérieur** à A lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset A$.



Exemple 8.16

On se place dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

- Le point 2 est intérieur à $[1, +\infty[$. En effet $B_o\left(2, \frac{1}{2}\right) \subset [1, +\infty[$. Plus généralement, tout point $x \in]1, +\infty[$ est intérieur à $[1, +\infty[$.
- Le point 1 n'est pas intérieur à $[1, +\infty[$. En effet, pour tout $r > 0$ il existe $y \in]1-r, 1[$ tel que $y \in B_o(1, r)$ et $y \notin [1, +\infty[$, donc $B_o(1, r) \not\subset [1, +\infty[$.



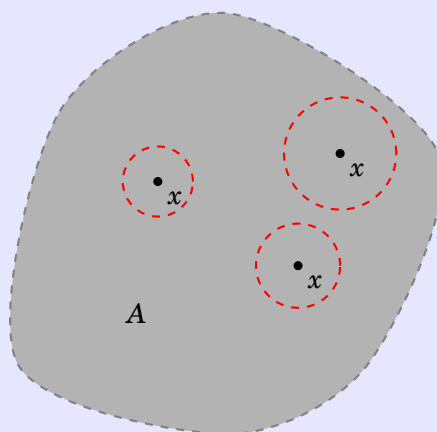
Définition 8.22 – Ouvert

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E .

On dit que A est **ouvert** (ou une **partie ouverte**) de E lorsque :

$$\forall x \in A, \exists r > 0, B_o(x, r) \subset A.$$

Autrement dit, A est ouvert si, et seulement si, tous les points de A sont intérieurs à A .



💡 Exemple 8.17

► Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'intervalle $]1, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

En effet, pour tout $x \in]1, +\infty[$, il existe $r = \frac{x-1}{2} > 0$ tel que $B_o\left(x, \frac{x-1}{2}\right) \subset]1, +\infty[$.

Plus généralement les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, ceux de la forme $]a, b[$) sont des ouverts.

► Les ensembles E et $\emptyset$ sont des ouverts de E .

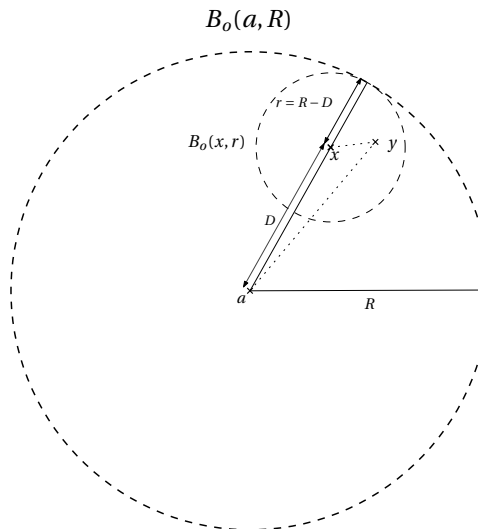
🔧 Théorème 8.19

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Toute boule ouverte est un ouvert de E .

Démonstration

Soit $a \in E$ et $R > 0$. Montrons que la boule ouverte $B_o(a, R)$ est un ouvert de E . Soit $x \in B_o(a, R)$. On cherche $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset B_o(a, R)$.

La démonstration est résumée par le dessin suivant.



Soit $x \in E$. On note $D = \|x - a\| = d(x, a)$ et $r = R - D$. Notons que $x \in B_o(a, R)$, donc $D < R$ et $r = R - D > 0$.
Soit $y \in B_o(x, r)$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < r + D.$$

Or, $r + D = R - D + D = R$. Donc, $\|y - a\| < R$. Autrement dit, $y \in B_o(a, R)$. Ceci est vrai pour tout $y \in B_o(x, r)$.
On en déduit que $B_o(x, r) \subset B_o(a, R)$. Ceci est vrai pour tout $x \in B_o(a, R)$.
Ainsi, $B_o(a, R)$ est un ouvert de E . □

🔧 Théorème 8.20

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E .
2. Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E .

Démonstration

1. Soit I une famille d'indices et, pour tout $i \in I$, O_i un ouvert de E . On note $A = \bigcup_{i \in I} O_i$.

Soit $x \in A$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Or, O_i est un ouvert de E . Donc, il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset O_i$. D'où, $B_o(x, r) \subset A$. Ceci est vrai pour tout $x \in A$. Donc A est un ouvert de E .

2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $O_1, \dots, O_p$ des ouverts de E . On note $A = \bigcap_{i=1}^p O_i$.

Soit $x \in A$. Alors, pour tout $i \in [1, p]$, il existe $r_i > 0$ tel que $B_o(x, r_i) \subset O_i$. On note $r = \min(r_1, \dots, r_p) > 0$.

Pour tout $i \in [1, p]$, on a $B_o(x, r) \subset B_o(x, r_i)$. Donc, $B_o(x, r) \subset A$. Ceci est vrai pour tout $x \in A$. Donc A est un ouvert de E . $\square$

Remarque 8.20

Donnons un exemple d'intersection quelconque d'ouverts de E qui n'est pas un ouvert de E .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $O_n = \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, O_n est un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n = \{0\}$ n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Définition 8.23 – Fermé

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E .

On dit que A est un **fermé** (ou une **partie fermée**) de E lorsque la partie $E \setminus A$ est un ouvert.

Remarque 8.21

Une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un ouvert de E si, et seulement si, $E \setminus A$ est un fermé de E .

Exemple 8.18

- Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, les intervalles $]-\infty, 1]$ et $[1, 2]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
- Les ensembles E et $\emptyset$ sont des fermés de E .
- Pour tout $a \in E$, $\{a\}$ est un fermé de E .

Remarque 8.22

Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées.

Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$: en effet, pour tout $r > 0$, $-\frac{r}{2} \in B_o(0, r)$ et $-\frac{r}{2} \notin [0, 1[$. Donc $B_o(0, r) \not\subset [0, 1[$.

Le complémentaire de $[0, 1[$ est $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$: pour tout $r > 0$, il existe $y \in]0, 1[$ tel que $y \in B_o(1, r)$ et $y \notin]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

Ainsi, $[0, 1[$ n'est ni un ouvert de $\mathbb{R}$ ni un fermé de $\mathbb{R}$.

Théorème 8.21

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Une réunion finie de fermés de E est un fermé de E .
2. Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E .

Démonstration

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $F_1, \dots, F_p$ des fermés de E . On note $A = \bigcup_{i=1}^p F_i$.

Alors, $E \setminus A = \bigcap_{i=1}^p (E \setminus F_i)$. Or, $E \setminus F_1, \dots, E \setminus F_p$ sont des ouverts de E . On déduit du théorème précédent que $E \setminus A$ est un ouvert de

E . Donc, A est un fermé de E

2. Soit I une famille d'indices et, pour tout $i \in I$, F_i un fermé de E . On note $A = \bigcap_{i \in I} F_i$.

On a $E \setminus A = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i)$. Or, pour tout $i \in I$, $E \setminus F_i$ est un ouvert de E . On déduit du théorème précédent que $E \setminus A$ est un ouvert de E . Donc, A est un fermé de E

Remarque 8.23

Donnons un exemple de réunion quelconque de fermés de E qui n'est pas un fermé de E .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = [0, 1[$ n'est pas un fermé de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

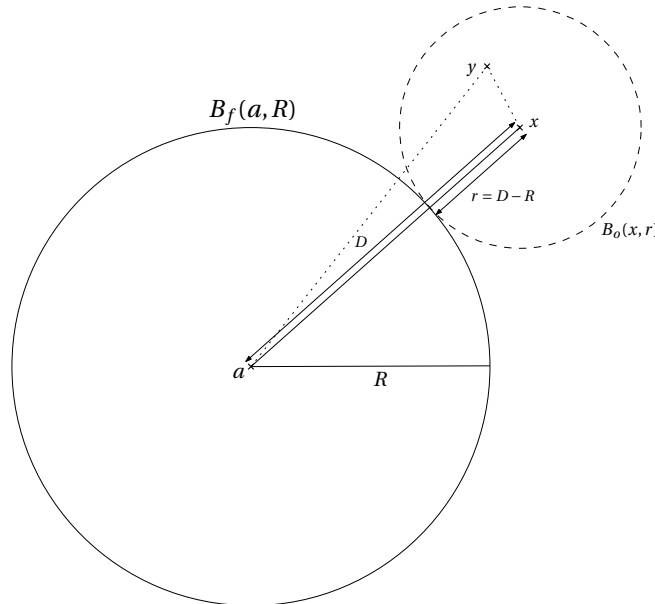
Théorème 8.22

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Toute boule fermée est un fermé de E .

Démonstration

Soit $a \in E$ et $R > 0$. Montrons que la boule fermée $B_f(a, R)$ est un fermé de E . Par définition, on montre que $E \setminus B_f(a, R)$ est un ouvert de E . Soit $x \in E \setminus B_f(a, R)$. On cherche $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset E \setminus B_f(a, R)$.

Encore une fois, la démonstration est résumée par un dessin.



Soit $x \in E$. On note $D = \|x - a\| = d(x, a)$ et $r = D - R$. Notons que $x \notin B_f(a, R)$, donc $D > R$ et $r = D - R > 0$.
Soit $y \in B_o(x, r)$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

D'où, $\|y - a\| \geq \|x - a\| - \|x - y\| > D - r$. Or, $D - r = r + R - r = R$. Donc, $\|y - a\| > R$. Autrement dit, $y \in E \setminus B_f(a, R)$. Ceci est vrai pour tout $y \in B_o(x, r)$.

On en déduit que $B_o(x, r) \subset E \setminus B_f(a, R)$. Ceci est vrai pour tout $x \in E \setminus B_f(a, R)$.

Donc, $E \setminus B_f(a, R)$ est un ouvert de E . Ainsi, $B_f(a, R)$ est un fermé de E . □

🔗 Théorème 8.23 – Caractérisation séquentielle d'un fermé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Une partie A de E est un fermé si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de A converge vers un élément de A .

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que A est un fermé de E .

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell \in E$. Montrons que $\ell \in A$.

Par l'absurde, on suppose que $\ell \in E \setminus A$.

Comme A est un fermé de E , $E \setminus A$ est un ouvert de E . Donc, il existe $r > 0$ tel que $B_o(\ell, r) \subset E \setminus A$.

Or, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $\|a_n - \ell\| \leq \frac{r}{2}$.

En particulier $a_N \in B_f\left(\ell, \frac{r}{2}\right) \subset B_o(\ell, r) \subset E \setminus A$. Contradiction avec $a_N \in A$.

Ainsi, $\ell \in A$.

($\Leftarrow$) On suppose que toute suite convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers un élément de A .

On montre que A est un fermé de E . C'est-à-dire que $E \setminus A$ est un ouvert de E . Soit $x \in E \setminus A$.

Supposons par l'absurde que :

$$\forall r > 0, B_o(x, r) \not\subset E \setminus A.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $B_o\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \not\subset E \setminus A$. C'est-à-dire, il existe $a_n \in B_o\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$ et $a_n \notin E \setminus A$ (autrement dit, $a_n \in A$).

On construit ainsi une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|a_n - x\| \leq \frac{1}{n+1}$. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

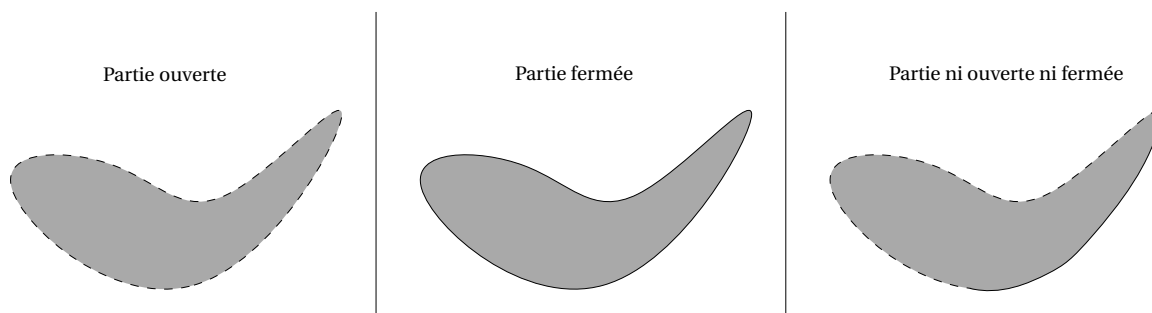
Or, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge, donc sa limite x appartient à A . Contradiction avec $x \in E \setminus A$.

Donc, il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset E \setminus A$. Ceci est vrai pour tout $x \in E \setminus A$.

Donc, $E \setminus A$ est un ouvert de E . Ainsi, A est un fermé de E . □

💡 Exemple 8.19

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ n'est pas fermé. En effet, la suite $\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de A mais sa limite 0 n'appartient pas à A .



📋 Méthode 8.1 – Montrer qu'une partie est un fermé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et A une partie de E .

Pour montrer que A est un fermé de E en utilisant la caractérisation séquentielle, la rédaction est la suivante :

« Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in E$. Montrons que $x \in A$. »

Théorème 8.24

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Toute sphère de E est un fermé.

Démonstration

Soit $a \in E$ et $r \geq 0$. Montrons que la sphère $S(a, r)$ est un fermé de E .

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $S(a, r)$ qui converge vers $\ell \in E$. Montrons que $\ell \in S(a, r)$.

Par définition de sphère, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|a_n - a\| = r$. On en déduit que, $\|a_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$.

De plus, par inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|a_n - a\| - \|a - \ell\| \leq \|a_n - \ell\|$$

Or, $\|a_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc, par théorème d'encadrement, $\|a_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|a - \ell\|$.

Par unicité de la limite lorsqu'elle existe, on en déduit que $\|a - \ell\| = r$. Donc, $\ell \in S(a, r)$.

Par caractérisation séquentielle des fermés, $S(a, r)$ est un fermé de E . □

Remarque 8.24 – Autres démonstrations

- On pouvait démontrer le résultat précédent en revenant à la définition de fermé : pour cela, on montre que $E \setminus S(a, r)$ est un ouvert de E .
- On pouvait aussi remarquer que $S(a, r) = B_f(a, r) \setminus B_o(a, r) = B_f(a, r) \cap (E \setminus B_o(a, r))$. Or, une boule ouverte est un ouvert de E et une boule fermée est un fermé de E .
Donc, $B_f(a, r)$ et $E \setminus B_o(a, r)$ sont des fermés de E .
Donc, $S(a, r) = B_f(a, r) \cap (E \setminus B_o(a, r))$ est un fermé comme intersection de fermés.

IV.2. Adhérence d'une partie

Définition 8.24 – Point adhérent

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x \in E$.

On dit que x est un **point adhérent à la partie A** lorsque, pour tout $r > 0$, $B_o(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Exemple 8.20

On se place dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

- Le point 1 est adhérent à $]1, +\infty[$. En effet, pour tout $r > 0$, il existe $\frac{1+r}{2} \in B_o(1, r) \cap]1, +\infty[$. Plus généralement, tout point $x \in]1, +\infty[$ est adhérent à $]1, +\infty[$.
- Le point 0 n'est pas adhérent à $]1, +\infty[$. En effet, $B_o(0, \frac{1}{2}) \cap]1, +\infty[= \emptyset$.

Définition 8.25 – Adhérence d'une partie

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E .

L'**adhérence** de A est l'ensemble $\overline{A}$ des points adhérents à A . L'adhérence de A est parfois notée $\text{Adh}(A)$.

Exemple 8.21

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'adhérence de $]1, +\infty[$ est $[1, +\infty[$.

Théorème 8.25 – Caractérisation séquentielle des points adhérents

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x \in E$.

Le point x est adhérent à A si, et seulement si, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que x est adhérent à A . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, On sait que $B_o\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A \neq \emptyset$. C'est-à-dire, il existe $a_n \in B_o\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$ et $a_n \in A$.

On construit ainsi une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|a_n - x\| \leq \frac{1}{n+1}$. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Soit $r > 0$. Par définition de limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|a_n - x\| \leq \frac{r}{2}$.

Donc, $a_N \in B_f\left(x, \frac{r}{2}\right) \subset B_o(x, r)$. Or, par hypothèse $a_N \in A$. Donc, $B_o(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Ainsi, $x \in \bar{A}$. □

Remarque 8.25 – Reformulation de la définition d'adhérence

L'adhérence d'une partie est l'ensemble des points de E qui sont limites d'une suite de points de A .

Exemple 8.22

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est adhérente à l'ensemble des matrices inversibles. En effet, elle est limite de la suite de matrices

(M_n) avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$.

Proposition 8.9

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E .

- On a $A \subset \bar{A}$. L'inclusion peut être stricte.
- On a $A = \bar{A}$ si, et seulement si, A est un fermé de E .
- Si B est une partie de E telle que $B \subset A$, alors $\bar{B} \subset \bar{A}$.
- L'adhérence de A est un fermé de E .

Démonstration

► Soit $x \in A$. On a, pour tout $r > 0$, $x \in B_o(x, r) \cap A$. Donc, pour tout $r > 0$, $B_o(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Donc, $x \in \bar{A}$. Ainsi, $A \subset \bar{A}$. Dans l'exemple 8.21 ci-dessus l'inclusion est stricte.

► ($\Rightarrow$) Supposons que $A = \bar{A}$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge. On note ℓ sa limite. Par la proposition précédente, $\ell \in \bar{A}$. Or, $A = \bar{A}$. Donc, $\ell \in A$. Par caractérisation séquentielle des fermés, A est un fermé de E .

($\Leftarrow$) Réciproquement, on suppose que A est un fermé de E . On a déjà l'inclusion $A \subset \bar{A}$. Il reste à montrer l'inclusion $\bar{A} \subset A$.

Soit $x \in \bar{A}$. Par la proposition précédente, il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x . Comme A est un fermé, par caractérisation séquentielle des fermés, on a $x \in A$.

Donc, $A = \bar{A}$.

► Soit $x \in \bar{B}$. Pour tout $r > 0$, on a $B_o(x, r) \cap B \neq \emptyset$. Or, $B \subset A$. Donc, pour tout $r > 0$, $B_o(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Donc, $x \in \bar{A}$. Ceci est vrai pour tout $x \in \bar{B}$. Donc, $\bar{B} \subset \bar{A}$.

► Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\bar{A}$ qui converge vers $x \in E$. Montrons que $x \in \bar{A}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_o\left(x_n, \frac{1}{n+1}\right) \cap A \neq \emptyset$.

Donc, il existe $y_n \in A$ tel que $0 \leq \|y_n - x_n\| < \frac{1}{n+1}$.

Donc, par encadrement, $\|y_n - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'autre part, par inégalité triangulaire,

$$0 \leq \|y_n - x\| \leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x\|.$$

Or, par hypothèse, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Donc, par encadrement, $\|y_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, x est limite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A .

Par le théorème 8.25 page 38, $x \in A$.

Ainsi, $\overline{A}$ est un fermé de E . □

IV.3. Partie dense



Définition 8.26 – Partie dense

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E .

On dit que A est **dense** dans E lorsque $\overline{A} = E$.



Théorème 8.26

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E .

La partie A est dense dans E si, et seulement si, tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A .

Démonstration

Il suffit d'appliquer la caractérisation séquentielle des points adhérents : $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, x est limite d'une suite d'éléments de A . □



Exemple 8.23

Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \frac{\lfloor 10^n \times x \rfloor}{10^n}$.

Par définition de la partie entière, $x_n \in \mathbb{Q}$ et

$$x - \frac{1}{10^n} \leq x_n \leq x.$$

Donc, par théorème d'encadrement, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Ainsi, tout réel est limite d'une suite de rationnels, donc, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

IV.4. Topologie et normes équivalentes



Théorème 8.27

Soit E un espace vectoriel. On considère $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes équivalentes sur E . Soit $x \in E$.

On a l'équivalence : x est intérieur à A pour la norme $\|\cdot\|_a$ si, et seulement si, x est intérieur à A pour la norme $\|\cdot\|_b$.

Par conséquent :

- A est ouverte pour $\|\cdot\|_a$ si, et seulement si, A est ouverte pour $\|\cdot\|_b$.
- A est fermée pour $\|\cdot\|_a$ si, et seulement si, A est fermée pour $\|\cdot\|_b$.
- A est dense dans E pour $\|\cdot\|_a$ si, et seulement si, A est dense dans E pour $\|\cdot\|_b$.

Démonstration

Soient $r_a > 0$ et $r_b > 0$. On note $B_{o,a}(x, r_a)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r_a pour $\|\cdot\|_a$ et $B_{o,b}(x, r_b)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r_b pour $\|\cdot\|_b$.

Les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes, donc, il existe $C > 0$ et $D > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad C \times \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq D \times \|x\|_a.$$

($\Rightarrow$) On suppose que x est intérieur à A pour la norme $\|\cdot\|_a$. Il existe $r > 0$ tel que $B_{o,a}(x, r) \subset A$.

Pour tout $y \in B_{o,b}(x, Cr)$,

$$\|x - y\|_a \leq \frac{1}{C} \times \|x - y\|_b < \frac{1}{C} \times Cr.$$

Donc, $y \in B_{o,a}(x, r) \subset A$.

Donc, $B_{o,b}(x, Cr) \subset A$.

D'où, x est intérieur à A pour la norme $\|\cdot\|_b$.

($\Leftarrow$) On suppose que x est intérieur à A pour la norme $\|\cdot\|_b$. Il existe $r' > 0$ tel que $B_{o,b}(x, r') \subset A$.

Pour tout $y \in B_{o,a}\left(x, \frac{r'}{D}\right)$,

$$\|x - y\|_b \leq D \times \|x - y\|_a < D \times \frac{r'}{D}.$$

Donc, $y \in B_{o,b}(x, r') \subset A$.

Donc, $B_{o,a}\left(x, \frac{r'}{D}\right) \subset A$.

D'où, x est intérieur à A pour la norme $\|\cdot\|_a$. □

Théorème 8.28

Soit E un espace vectoriel. On considère $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes équivalentes sur E . Soit $x \in E$.

- x est adhérent à A pour $\|\cdot\|_a$ si, et seulement si, x est adhérent à A pour $\|\cdot\|_b$.
- L'adhérence de A est la même pour les deux normes.

Démonstration

Les définitions de points adhérents et d'adhérence repose la notion de convergence de suite.

Or, comme les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes, une suite converge pour $\|\cdot\|_a$ si, et seulement si, elle converge pour $\|\cdot\|_b$. □