
I	Limite et continuité en un point d'une application entre deux espaces vectoriels normés . .	3
I.1	Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition	3
I.2	Continuité en un point	6
II	Continuité sur une partie d'une application entre deux espaces vectoriels normés	8
II.1	Continuité sur une partie	8
II.2	Opérations sur les applications continues	8
II.3	Lignes de niveaux d'une fonction continue	9
II.4	Applications lipschitziennes	10
III	Espaces vectoriels normés de dimension finie	14
III.1	En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes	14
III.2	Limite et continuité des applications coordonnées	15
III.3	Théorème des bornes atteintes	19
III.4	Continuité des applications linéaires et multilinéaires	20

Extrait du programme

Cette section vise les objectifs suivants :

- généraliser au cas des espaces vectoriels sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;
- fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.

Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Limite et continuité en un point	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
g) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $|\cdot|$ la valeur absolue (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou le module (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

I. Limite et continuité en un point d'une application entre deux espaces vectoriels normés

L'objectif de cette partie est de généraliser la notion de limite et de continuité d'une fonction au cadre des espaces vectoriels normés.

I.1. Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition



Définition 11.1 – Limite en un point

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ une application, $a \in \bar{A}$ (a est un point adhérent à A) et $\ell \in F$.

On dit que f a pour limite ℓ en a (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, [\|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon].$$

On note dans ce cas $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

On dit que f admet une limite en a lorsqu'il existe $\ell \in F$ tel que f a pour limite ℓ en a .

Remarque 11.1 – Reformulation de la définition en terme de boules fermées

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ une application et $a \in \bar{A}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f admet une limite en a ;
2. $\exists \ell \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, [\|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon]$.
3. $\exists \ell \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \cap B_f(a, \eta), \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$.
4. $\exists \ell \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(A \cap B_f(a, \eta)) \subset B_f(\ell, \varepsilon)$.

Remarque 11.2 – Lien avec la première année

On retrouve la définition donnée en première année pour les fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (muni de la norme $|\cdot|$) et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (muni de la norme $|\cdot|$)



Théorème 11.1 – Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ une application, $a \in \bar{A}$ (a est un point adhérent à A) et $\ell \in F$.

On a l'équivalence :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \text{pour toute suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A : \text{si } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a, \text{ alors } f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que f a pour limite ℓ en a .

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers a .

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant $\|x - a\|_E \leq \eta$, on a : $\|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$.

De plus, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a : $\|a_n - a\|_E \leq \eta$.

D'où, pour tout $n \geq N$, on a : $\|f(a_n) - \ell\|_F \leq \varepsilon$.

Ainsi, $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

($\Leftarrow$) On suppose que pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a , on a : $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Montrons par l'absurde que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. On suppose donc que :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in A, [\|x - a\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(x) - \ell\|_F > \varepsilon].$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (prendre $\eta = \frac{1}{n+1}$), il existe un point $a_n \in A$ tel que $\|a_n - a\|_E \leq \frac{1}{n+1}$ et $\|f(a_n) - \ell\|_F > \varepsilon$.

On a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|a_n - a\|_E \leq \frac{1}{n+1}$, donc par théorème d'encadrement, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

D'où, par hypothèse, $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Contradiction avec : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f(a_n) - \ell\|_F > \varepsilon$.

Ainsi, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. □

💡 Exemple 11.1

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$.

$$(x,y) \mapsto \frac{x \times y}{x^2 + y^2}$$

On a : $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$ et $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

On a : $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$ et $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \neq \frac{1}{2}$.

Donc, f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

On peut déduire les propriétés des limites d'une fonction à partir des propriétés des limites de suites.

🔗 Théorème 11.2 – Unicité de la limite lorsqu'elle existe

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application, $a \in \overline{A}$ (a est un point adhérent à A).

Si f possède une limite finie en a , alors elle est unique. On la note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_a f$.

Démonstration

Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite. □

🔧 Proposition 11.1 – Opérations algébriques sur les limites

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ et $g : A \rightarrow F$ deux applications, $\lambda : A \rightarrow \mathbb{K}$ une application, $a \in \overline{A}$ (a est un point adhérent à A), $(\ell_1, \ell_2) \in F^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

► Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$, alors $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 + \ell_2$.

► Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1$ et $\lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha$, alors $\lambda(x).f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha.\ell_1$.

► Si $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{K}^2$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$, alors $\mu_1.f(x) + \mu_2.g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \mu_1.\ell_1 + \mu_2.\ell_2$.

Démonstration

Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite. □


Proposition 11.2 – Composition des limites

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , B une partie non vide de F , $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ deux applications et $a \in \overline{A}$ tels que $f(A) \subset B$.
On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \in F$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} c \in G$. Alors, $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.

Démonstration

► **Montrons que b est adhérent à B .**

Le point a est adhérent à A , donc il existe (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a .

Or, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$, donc par caractérisation séquentielle de la limite, $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \in f(A) \subset B$.

Donc, par caractérisation séquentielle des points adhérents, $b \in \overline{B}$.

► **Montrons que $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.**

Soit (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a . Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$, par caractérisation de la limite, on a $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$.

D'où, $(f(a_n))$ est une suite d'éléments de B qui converge vers b .

Comme $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} c$, par caractérisation séquentielle de la limite, on a : $(g \circ f)(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$. Ceci est vrai pour toute suite d'éléments de A qui converge vers a .

Par caractérisation séquentielle de la limite, on a : $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$. □

Remarque 11.3 – Extension de la notion de limite

Extension 1 : cas où f est une application à valeurs réelles. Dans ce cas, on peut définir la notion de limite égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.

- Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \overline{A}$.
On dit que f **a pour limite $+\infty$ en a** (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a) lorsque :

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, [\|x - a\|_E \leq \eta \implies f(x) \geq M].$$

On note dans ce cas $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_a f = +\infty$.

- Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \overline{A}$.
On dit que f **a pour limite $-\infty$ en a** (ou que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a) lorsque :

$$\forall M < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, [\|x - a\|_E \leq \eta \implies f(x) \leq M].$$

On note dans ce cas $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_a f = -\infty$.

Extension 2 : cas où f est une application de la variable réelle. Dans ce cas, on peut définir la notion de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

- Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f :]x_0, +\infty[\rightarrow F$ une application et $\ell \in F$.
On dit que f **a pour limite ℓ en $+\infty$** (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in]x_0, +\infty[, [x \geq A \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon].$$

On note dans ce cas $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

- Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f :]-\infty, x_0[\rightarrow F$ une application et $\ell \in F$.
On dit que f **a pour limite ℓ en $-\infty$** (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in]-\infty, x_0[, [x \leq -A \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon].$$

On note dans ce cas $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$.

I.2. Continuité en un point



Définition 11.2 – Continuité en un point

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ une application et $a \in A$.

On dit que f est **continue en** a lorsque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

Remarque 11.4 – Lien avec la première année

On retrouve la définition donnée en première année pour les fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (muni de la norme $|\cdot|$) et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (muni de la norme $|\cdot|$)

Exemple 11.2

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne usuelle (i.e. $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$) et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $(0, 0)$.

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$.

On a :

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \frac{|x^3| + |y^3|}{\|(x, y)\|_2^2} \leq \frac{\|(x, y)\|_2^3 + \|(x, y)\|_2^3}{\|(x, y)\|_2^2} \leq 2 \|(x, y)\|_2 \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

Donc, $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, 0)$.

Autrement dit, f est continue en $(0, 0)$.



Définition 11.3 – Prolongement par continuité

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ une application et $a \in \overline{A} \setminus A$ (a est un point adhérent à A).

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in F$, alors on dit que f est **prolongeable par continuité en** a .

Cela permet de définir une nouvelle fonction :

$$g : A \cup \{a\} \rightarrow F$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

Remarque 11.5

En pratique, on note encore la fonction prolongée f et on dit qu'on a posé $f(a) = \ell$.



Théorème 11.3 – Caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ une application et $a \in A$.

On a l'équivalence :

f est continue en $a \iff$ pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A : si $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, alors $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Démonstration

Conséquence directe de la caractérisation séquentielle des limites et de la définition de continuité. $\square$

Remarque 11.6

La proposition précédente est souvent utilisée sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \\ f \text{ est continue en } a \end{array} \right. \implies f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a).$$

ou sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \\ (f(a_n)) \text{ ne tend vers } f(a) \end{array} \right. \implies f \text{ n'est pas continue en } a.$$

Exemple 11.3

1. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x \times y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En effet, en prenant pour tout entier $n \geq 1$, $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, on a :

- $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$.
- $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$, donc, $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$.

2. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^2 \end{cases}$$

En effet, en prenant pour tout entier $n \geq 2$, $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right)$, on a :

- $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$.
- $0 < y_n < x_n^2$, donc, $f(x_n, y_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq f(0, 0)$.

II. Continuité sur une partie d'une application entre deux espaces vectoriels normés

II.1. Continuité sur une partie



Définition 11.4 – Continuité sur une partie

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

On dit que f est **continue sur** A lorsque f est continue en tout point de A .

Remarque 11.7 – Lien avec la première année

On retrouve la définition donnée en première année pour les fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (muni de la norme $|\cdot|$) et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (muni de la norme $|\cdot|$)

Exemple 11.4 – Continuité des applications coordonnées

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On munit E de la norme :

$$\forall x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n \in E, \quad \|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty,$$

où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme infinie sur $\mathbb{K}^n$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On considère l'application $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{K}$ où on munit $\mathbb{K}$ de la norme $|\cdot|$. Montrons que φ_i est

$$x \mapsto x_i$$

continue sur E .

Soit $a = a_1.e_1 + \dots + a_n.e_n \in E$, alors : pour tout $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, on a $|\varphi_i(x) - \varphi_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \|x - a\|$. D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \varepsilon > 0, \forall x \in E, [\|x - a\| \leq \eta \implies |\varphi_i(x) - \varphi_i(a)| \leq \varepsilon].$$

Ainsi, φ_i est continue en a . Ceci est vrai pour tout $a \in E$. Donc, φ_i est continue sur E .

L'application qui à un vecteur associe une de ses coordonnées dans une base est continue.

II.2. Opérations sur les applications continues



Proposition 11.3 – Restriction d'une application continue

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ une application et $A_1 \subset A$.

Si f est continue sur A , alors $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow F$ (restriction de f à A_1) est continue sur A_1 .

$$x \mapsto f(x)$$

Démonstration

Conséquence directe de la définition de continuité.

□


Proposition 11.4 – Opérations algébriques

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ et $g : A \rightarrow F$ deux applications et $\lambda : A \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

- Si f et g sont continues sur A , alors $f + g$ est continue sur A .
- Si f et λ sont continues sur A , alors $\lambda.f$ est continue sur A .
- Si $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{K}^2$ et f et g sont continues sur A , alors $\mu_1.f + \mu_2.g$ est continue sur A .

Démonstration

Conséquence des opérations algébriques sur les limites. □


Proposition 11.5 – Composition des applications continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , B une partie non vide de F , $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ deux applications tels que $f(A) \subset B$.

On suppose que f est continue sur A et g est continue sur B . Alors $g \circ f$ est continue sur A .

Démonstration

Conséquence de la composition des limites. □

II.3. Lignes de niveaux d'une fonction continue


Théorème 11.4

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et $f : E \rightarrow F$ une application continue sur E .

1. Pour tout ouvert A de F , $f^{-1}(A)$ est un ouvert de E .

L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.

2. Pour tout fermé A de F , $f^{-1}(A)$ est un fermé de E .

L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Démonstration

1. Soit A un ouvert de F .

Soit $a \in f^{-1}(A)$.

D'où, $f(a) \in A$. Or, A est un ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B_o(f(a), r) \subset A$.

Or, f est continue en a . Donc, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, si $\|x - a\|_E \leq \eta$, alors $\|f(x) - f(a)\|_F \leq \frac{r}{2}$.

D'où, pour tout $x \in B_o(a, \eta)$, on a $\|f(x) - f(a)\|_F \leq \frac{r}{2}$, donc $f(x) \in B_o(f(a), r) \subset A$. Donc, $B_o(a, \eta) \subset f^{-1}(A)$.

Ceci est vrai pour tout $a \in f^{-1}(A)$. Donc $f^{-1}(A)$ est un ouvert de E .

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f^{-1}(A)$ qui converge vers $\ell \in E$. Montrons que $\ell \in f^{-1}(A)$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \in A$. Par continuité de f , $f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(\ell) \in F$. Or, A est un fermé de F , donc $f(\ell) \in A$. D'où, $\ell \in f^{-1}(A)$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle des fermés, $f^{-1}(A)$ est un fermé de E .

Corollaire 11.1

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et f une application continue sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni de la norme $|\cdot|$). Alors,

- L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .
- L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E .
- L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un fermé de E .

Démonstration

On a : $\{x \in E \mid f(x) > 0\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$, $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\} = f^{-1}([0, +\infty[)$ et $\{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$.
De plus, $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et, $[0, +\infty[$ et $\{0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$. □

 Exemple 11.5

Montrons que l'ensemble $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble O est l'image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par l'application continue $f : (x, y) \mapsto y - x$ (voir plus loin : Théorème 11.10 page 17).

Donc, O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

II.4. Applications lipschitziennes**Définition 11.5 – Application lipschitzienne**

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

On dit que f est **lipschitzienne sur A** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, y) \in A \times A, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \times \|x - y\|_E.$$

Dans ce cas, on dit que k est un **rapport de Lipschitz** ou que f est **k -lipschitzienne**.

 Exemple 11.6

1. Les applications φ_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ de l'exemple 11.4 sont 1-lipschitziennes.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \|x\|, \end{aligned}$$

est 1-lipschitzienne (où $\mathbb{K}$ est muni de la norme $|\cdot|$). En effet, par inégalité triangulaire, on a :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

L'application

$$\begin{aligned} d : E^2 &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y), \end{aligned}$$

est 2-lipschitzienne où $\mathbb{K}$ est muni de la norme $|\cdot|$ et E^2 est muni de la norme définie par : $\forall (x, y) \in E^2$, $N(x, y) = \max(\|x\|, \|y\|)$.

Soit $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in E^2 \times E^2$. On a : $|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| = |\|x_1 - y_1\| - \|x_2 - y_2\||$.

D'où, par inégalité triangulaire, on a :

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq \|(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)\| \leq \|(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|_E + \|y_1 - y_2\| \leq 2N((x_1, y_1) - (x_2, y_2)).$$

4. La fonction

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \sqrt{x}, \end{aligned}$$

est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.

En effet, f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$. D'où, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (x, y) \in [1, +\infty[^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} \times |x - y|.$$

5. La fonction

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \sqrt{x}, \end{aligned}$$

n'est pas lipschitzienne.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

En prenant $y = 0$ et $x > 0$, il vient $\sqrt{x} \leq kx$.

En divisant par $x \neq 0$, on obtient : $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$. En faisant tendre x vers 0^+ , on aboutit à une contradiction.

Remarque 11.8 – Caractère lipschitzien et inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application dérivable sur I (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). En vertu de l'inégalité des accroissements finis, pour montrer que f est lipschitzienne, il suffit de montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leq k$ sur I .

Exemple 11.7

La fonction sin est 1-lipschitzienne.

Exercice 11.1 – Distance à une partie non vide

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . On note d la distance associée à $\|\cdot\|$. Pour tout $x \in E$, on appelle **distance de x à A** la quantité : $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

1. Soit $x \in E$. Justifier que la distance de x à A est bien définie.
2. Montrer que l'application $\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, A) \end{aligned}$ est lipschitzienne.

Résolution

1. L'ensemble $\{d(x, a) | a \in A\}$ est non vide (car A est non vide) et est minoré par 0 (car la distance entre deux vecteurs est positive). Donc, sa borne inférieure existe. Donc, la distance de x à A est bien définie.
2. Soit $(x, y) \in E^2$. Pour tout $a \in A$, par inégalité triangulaire, on a : $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Or, pour tout $a \in A$, $d(x, A) \leq d(x, a)$, donc, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$. D'où, pour tout $a \in A$, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$. Donc, $d(x, A) - d(x, y)$ (ne dépend pas de a) est un minorant de $\{d(y, a) | a \in A\}$. D'où, par définition de borne inférieure, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$. D'où, $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. En échangeant les rôles de x et y , on a : $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x)$. Or, par symétrie de la distance, $d(y, x) = d(x, y)$. Donc,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \leq \|x - y\|_E.$$

Donc, l'application $E \rightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.
 $x \mapsto d(x, A)$

Proposition 11.6 – Opérations algébriques

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ et $g : A \rightarrow F$ deux applications.

- Si f et g sont lipschitziennes sur A , alors $f + g$ est lipschitzienne sur A .
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et f est lipschitzienne, alors $\lambda.f$ est lipschitzienne.

Démonstration

Il existe $k_1 \geq 0$ et $k_2 \geq 0$ tels que :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k_1 \times \|x - y\|_E \quad \text{et} \quad \|g(x) - g(y)\|_F \leq k_2 \times \|x - y\|_E$$

D'où, par inégalité triangulaire,

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|(f + g)(x) - (f + g)(y)\|_F \leq \|f(x) - f(y)\|_F + \|g(x) - g(y)\|_F \leq (k_1 + k_2) \times \|x - y\|_E.$$

Donc, $k_1 + k_2$ est un rapport de Lipschitz de $f + g$ et $f + g$ est lipschitzienne.

De même, par homogénéité, on a :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|(\lambda.f)(x) - (\lambda.f)(y)\|_F = |\lambda| \times \|f(x) - f(y)\|_F \leq (\lambda \times k_1) \times \|x - y\|_E.$$

Donc, $\lambda \times k_1$ est un rapport de Lipschitz de $\lambda.f$ et $\lambda.f$ est lipschitzienne. □

Remarque 11.9

L'ensemble des fonctions lipschitziennes est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Proposition 11.7 – Composition des applications lipschitzienne

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , B une partie non vide de F , $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ deux applications tels que $f(A) \subset B$.

On suppose que f est lipschitzienne sur A et g est lipschitzienne sur B . Alors $g \circ f$ est lipschitzienne sur A .

Démonstration

Il existe $k_1 \geq 0$ et $k_2 \geq 0$ tel que f est k_1 -lipschitzienne et g est k_2 -lipschitzienne. D'où,

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad \|(g \circ f)(x_1) - (g \circ f)(x_2)\|_G = \|g(f(x_1)) - g(f(x_2))\|_G \leq k_2 \times \|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leq k_2 \times k_1 \times \|x_1 - x_2\|_E.$$

Donc, $g \circ f$ est $k_1 \times k_2$ -lipschitzienne. □

Théorème 11.5

Toute application lipschitzienne est continue.

La réciproque est fausse.

Démonstration

- Soit $f : A \rightarrow F$ une application lipschitzienne. Il existe alors $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \times \|x - y\|_E.$$

Soit $a \in A$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in A$, on a :

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq k \times \|x - a\|_E.$$

On note $\eta = \frac{\varepsilon}{k+1} > 0$. On a alors : pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leq \eta$

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq k \times \|x - a\|_E \leq k \times \frac{\varepsilon}{k+1} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, f est continue en a . Ceci est vrai pour tout $a \in A$, donc f est continue sur A .

► Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.

Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel que, pour tout réels x et y , $|f(x) - f(y)| \leq k \times |x - y|$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x) - f(y)| = |x - y| \times |x + y|$. D'où, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$, on a $|x + y| \leq k$. En particulier ($y = 0$), pour tout $x > 0$, $x \leq k$. Absurde (prendre $x = k + 1$ par exemple).

Ainsi f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, par contre f est bien continue sur $\mathbb{R}$. □

💡 Exemple 11.8

La fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$ (mais est continue sur $[0, +\infty[$).

III. Espaces vectoriels normés de dimension finie

III.1. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Théorème 11.6 – Équivalence des normes

Soit E un espace vectoriel de **dimension finie**.

Toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration

Hors-programme

Théorème 11.7

Soient E un espace vectoriel normé de **dimension finie** $p \geq 1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^1.e_1 + \dots + u_n^p.e_p$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les **suites coordonnées** $(u_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{B}$ convergent.

En cas de convergence, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^1 \right).e_1 + \dots + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^p \right).e_p.$$

Démonstration

On munit E de la norme définie par : $\forall x = x_1.e_1 + \dots + x_p.e_p \in E$, $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_p)\|_{\infty}$ où $\|\cdot\|_{\infty}$ désigne la norme infinie sur $\mathbb{K}^p$ (voir le paragraphe sur les exemples d'espaces vectoriels normés).

($\Rightarrow$) On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On note $\ell = \ell_1.e_1 + \dots + \ell_p.e_p$ la limite de (u_n) . Par définition de la norme choisie sur E , on a :

$$\forall k \in [1, p], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n^k - \ell_k| \leq \|u_n - \ell\|.$$

Or, $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc, par théorème de comparaison, $u_n^k - \ell_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, pour tout $k \in [1, p]$, la suite $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k .

($\Leftarrow$) On suppose que, pour tout $k \in [1, p]$, la suite $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_k \in \mathbb{K}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in [1, p]$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N_k$, $|u_n^k - \ell_k| \leq \varepsilon$.

On note $N = \max(N_1, \dots, N_p)$ et $\ell = \ell_1.e_1 + \dots + \ell_p.e_p$. On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$\|u_n - (\ell_1.e_1 + \dots + \ell_p.e_p)\| = \max(|u_n^1 - \ell_1|, \dots, |u_n^p - \ell_p|) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = \ell_1.e_1 + \dots + \ell_p.e_p$. □

Remarque 11.10

En adaptant la démonstration précédente, on montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si les suites coordonnées $(u_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont bornées.

Remarque 11.11

Étant donné qu'en dimension finie, le choix de la norme sur E n'a pas d'influence sur la convergence, on ne précisera pas la norme utilisée dans les exercices.

On peut reformuler le théorème :

Une suite converge si, et seulement si, ses suites coordonnées dans une base de E convergent.

Par conséquent, en utilisant la base canonique de $\mathbb{K}^N$:

Pour étudier la convergence d'une suite de N -uplet, il suffit d'étudier la convergence de chacune des suites définies par ses coefficients.

Par conséquent, en utilisant la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

Pour étudier la convergence d'une suite de matrices, il suffit d'étudier la convergence de chacune des suites définies par ses coefficients.

De même, en utilisant la base canonique de $\mathbb{K}_N[X]$ (où $N \in \mathbb{N}$) :

Pour étudier la convergence d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à N il suffit d'étudier la convergence de chacune des suites définies par ses coefficients.

III.2. Limite et continuité des applications coordonnées

Théorème 11.8

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de **dimension finie**, A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

Le fait que f possède une limite finie en un point adhérent à A ou que f est continue en un point de A ne dépend pas des normes sur E et F choisies.

Démonstration

C'est une conséquence de la caractérisation séquentielle de la limite et du fait qu'en dimension finie, la convergence et la limite éventuelle d'une suite ne dépendent pas la norme choisie. $\square$

Remarque 11.12

Étant donné qu'en dimension finie, le choix des normes sur E et F n'a pas d'influence sur la continuité, on ne précisera pas la norme utilisée dans les exercices.

Proposition 11.8

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie (on note $n \geq 1$ la dimension de F), A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

On note $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F , et pour tout $x \in A$, $f(x) = f_1(x).\varepsilon_1 + \dots + f_n(x).\varepsilon_n$.

On définit ainsi $f_1 : A \rightarrow \mathbb{K}$, ..., $f_n : A \rightarrow \mathbb{K}$ des applications appelées **applications coordonnées**.

► Soit $a \in \overline{A}$. La fonction f a pour limite $\ell = \ell_1.\varepsilon_1 + \dots + \ell_n.\varepsilon_n$ en a si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_k a pour limite ℓ_k en a .

Dans ce cas :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \right) . \varepsilon_1 + \dots + \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) . \varepsilon_n.$$

► Soit $a \in A$. La fonction f est continue en a si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_k est continue en a .

Démonstration

Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et la propriété de convergence des suites coordonnées. $\square$

 Exemple 11.9

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue en 0.

$$x \mapsto (x^2, \ln(1 + |x|))$$

En effet, les applications $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(1 + |x|)$ sont continues en 0.

 Théorème 11.9 – Continuité sur une partie en dimension finie

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de **dimension finie**, A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

Le fait que f est continue sur A ne dépend pas des normes sur E et F choisies.

Démonstration

C'est une conséquence du fait qu'en dimension finie, la continuité d'une fonction en un point ne dépend pas la norme choisie. $\square$

 Proposition 11.9

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie (on note $n \geq 1$ la dimension de F), A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow F$ une application.

On note $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F , et pour tout $x \in A$, $f(x) = f_1(x) \cdot \varepsilon_1 + \dots + f_n(x) \cdot \varepsilon_n$.

La fonction f est continue sur A si, et seulement si, les **applications coordonnées** $f_1, \dots, f_n$ sont continues sur A .

Démonstration

Utiliser la propriété de continuité des applications coordonnées. $\square$

 Définition 11.6 – Fonctions polynomiales de $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

On dit que f **est polynomiale** lorsque f est une combinaison linéaire d'applications de la forme :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \times \dots \times x_n^{\alpha_n}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des entiers naturels (éventuellement nuls).

 Exemple 11.10

L'application $f : (x, y) \mapsto 2x \times y + y^2 \times x + x^3$ est polynomiale.

 Définition 11.7 – Fonction polynomiale en les coordonnées de sa variable

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On dit que qu'une application $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ **est polynomiale en les coordonnées** $(x_1, \dots, x_n)$ **dans la base $\mathcal{B}$ de sa variable x** si, f est une combinaison linéaire d'applications de la forme :

$$x \mapsto x_1^{\alpha_1} \times \dots \times x_n^{\alpha_n}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des entiers naturels (éventuellement nuls).

Remarque 11.13 – Effet d'un changement de base

Par les formules de changement de bases si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E . Alors, f est polynomiale en les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ de sa variable x si, et seulement si, f est polynomiale en les coordonnées $(x'_1, \dots, x'_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$ de sa variable x .

Théorème 11.10

Une application polynomiale est continue.

Démonstration

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ une application polynomiale. On note $\mathcal{B}$ une base de E . D'après l'exercice 11.4, les applications $x \mapsto x_1, \dots, x \mapsto x_n$ sont continues sur E . Donc, par opérations sur les applications continues, les applications

$$x \mapsto x_1^{\alpha_1} \times \dots \times x_n^{\alpha_n}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des entiers naturels, sont continues sur E .

Ainsi, f est continue sur E , comme combinaison linéaire d'applications continues sur E . □

Exemple 11.11

Montrons que l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ (munit d'une norme).
 $(x, y, z) \mapsto e^{x \times y} \times \text{sh}(y - z) \times \sin(z)$

(i) Les applications $(x, y, z) \mapsto x \times y$, $(x, y, z) \mapsto y - z$ et $(x, y, z) \mapsto z$ sont polynomiales, donc, continues sur $\mathbb{R}^3$.

(ii) De plus, les applications $t \mapsto e^t$, $t \mapsto \text{sh}(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Donc, par composition, les applications $(x, y, z) \mapsto e^{x \times y}$, $(x, y, z) \mapsto \text{sh}(y - z)$ et $(x, y, z) \mapsto \sin(z)$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$.

Ainsi, par opérations algébriques, f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple 11.12

L'application tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(A) = a_{1,1} + \dots + a_{n,n}$ est polynomiale en les coefficients de A (autrement dit, en les coordonnées de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Exemple 11.13

L'application $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3$ est continue sur $\mathbb{K}^2$ car chacune des applications coordonnées de f
 $(x, y) \mapsto (x \times y, x - 2y^3, x^2)$

dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$ est polynomiale en les coefficients de (x, y) .

Exemple 11.14

Montrons que l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.
 $(x, y, z) \mapsto (e^{x-y}, \ln(1 + x^2 \times z^4 + y^2))$

Les applications $(x, y, z) \mapsto x - y$ et $(x, y, z) \mapsto 1 + x^2 \times z^4 + y^2$ sont polynomiales, donc, continues sur $\mathbb{R}^3$.

De plus, $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $(x, y, z) \mapsto 1 + x^2 \times z^4 + y^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc, par composition, les applications $(x, y, z) \mapsto e^{x-y}$ et $(x, y, z) \mapsto \ln(1 + x^2 \times z^4 + y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$.

Les applications coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$) de f sont continues sur $\mathbb{R}^3$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

💡 Exemple 11.15

L'application

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto M_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est continue sur $\mathbb{K}^n$ car chacune des applications coordonnées de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est polynomiale.

💡 Exemple 11.16

L'application $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
 $A \mapsto A^2$

En effet, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient en position (i, j) de A^2 est $\sum_{k=1}^n a_{i,k} \times a_{k,j}$. D'où, l'application coordonnée $A \mapsto \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times a_{k,j}$, dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est polynomiale en les coefficients de A , donc est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

🔧 Exercice 11.2

1. Montrer que l'ensemble $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \times y^2 + e^x - \sin(y) > 30\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x \times y} - \cos(x) \times \operatorname{ch}(y) \leq -1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résolution

1. L'application $f: (x, y) \mapsto x \times y^2 + e^x - \sin(y) - 30$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car :

- $(x, y) \mapsto x \times y^2$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^2$;
- $(x, y) \mapsto e^x$ est la composée de l'application polynomiale $(x, y) \mapsto x$ et de l'application continue $t \mapsto e^t$;
- $(x, y) \mapsto \sin(y)$ est la composée de l'application polynomiale $(x, y) \mapsto y$ et de l'application continue $t \mapsto \sin(t)$.

Donc, $O = f^{-1}(]-\infty, 0[)$ est l'image réciproque de l'ouvert $] -\infty, 0[$ par l'application continue.

Par théorème,

O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. L'application $(x, y) \mapsto -1 - e^{x \times y} + \cos(x) \times \operatorname{ch}(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car :

- $(x, y) \mapsto e^{x \times y}$ est la composée de l'application polynomiale $(x, y) \mapsto x \times y$ et de l'application continue $t \mapsto e^t$.
- $(x, y) \mapsto \cos(x)$ est la composée de l'application polynomiale $(x, y) \mapsto x$ et de l'application continue $t \mapsto \cos(t)$.
- $(x, y) \mapsto \operatorname{ch}(y)$ est la composée de l'application polynomiale $(x, y) \mapsto y$ et de l'application continue $t \mapsto \operatorname{ch}(t)$.

3. En effet, $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et l'application $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

4. **Rédaction 1.** Le complémentaire de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

De plus, l'application $A \mapsto \operatorname{tr}(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car polynomiale en les coefficients de A .

Donc, l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc, $\mathcal{T}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rédaction 2. On a : $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) > 0\} \cup \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) < 0\}$.

De plus, l'application $A \mapsto \text{tr}(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car polynomiale en les coefficients de A .
 Donc, les ensembles $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) > 0\}$ et $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) < 0\}$ sont des ouverts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 D'où, $\mathcal{F}$ est un ouvert comme réunion d'ouverts.

III.3. Théorème des bornes atteintes

Théorème 11.11

Soient $\mathcal{K}$ une partie non vide fermée bornée de $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et f une application continue sur $\mathcal{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors, f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration

Admis (démonstration hors-programme)

□

Remarque 11.14

On peut utiliser la proposition précédente sous l'une des formes suivantes :

1. il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{K}$, $|f(x)| \leq M$ (on utilise que **f est bornée**);
2. il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathcal{K}$, $m \leq f(x) \leq M$ (on utilise que **f est bornée**);
3. il existe $a \in \mathcal{K}$ et $b \in \mathcal{K}$ tels que, pour tout $x \in \mathcal{K}$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ (on utilise que **f est bornée et atteint ses bornes**);
4. il existe $a \in \mathcal{K}$ et $b \in \mathcal{K}$ tels que $f(a) = \inf_{x \in \mathcal{K}} f(x) (= \min_{x \in \mathcal{K}} f(x))$ et $f(b) = \sup_{x \in \mathcal{K}} f(x) (= \max_{x \in \mathcal{K}} f(x))$ (on utilise que **f est bornée et atteint ses bornes**).

Exemple 11.17 – Distance à une partie non vide fermée et bornée

Soient $\mathcal{K}$ une partie non vide fermée bornée de $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $x \in E$.
 Considérons $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$

$$a \mapsto d(x, a).$$

Pour tout $(a_1, a_2) \in \mathcal{K}^2$, par inégalité triangulaire, on a :

$$|f(a_1) - f(a_2)| = |\|x - a_1\| - \|x - a_2\|| \leq \|a_2 - a_1\| \leq \|a_1 - a_2\|.$$

D'où, f est lipschitzienne, donc est continue sur $\mathcal{K}$.

Par le théorème des bornes atteintes, il existe $a \in \mathcal{K}$ tel que, pour tout $b \in \mathcal{K}$, $f(a) \leq f(b)$, c'est-à-dire, $d(x, a) \leq d(x, b)$.

D'où, $d(x, a) \leq d(x, \mathcal{K})$. Or, par définition de borne inférieure, $d(x, a) \geq d(x, \mathcal{K})$.

Donc, $d(x, a) = d(x, \mathcal{K})$.

On a montré que : **la distance d'un point à une partie non vide fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie est atteinte.**

III.4. Continuité des applications linéaires et multilinéaires



Proposition 11.10

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $k \in \mathbb{R}_+$.

L'application linéaire f est k -lipschitzienne si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k \times \|x\|_E$.

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que f est k -lipschitzienne.

Par linéarité de f , on a : $f(0_E) = 0_F$. D'où, pour tout $x \in E$, on a : $\|f(x)\|_F = \|f(x) - 0_F\|_F = \|f(x) - f(0_E)\|_F \leq k \times \|x - 0_E\|_E \leq k \times \|x\|_E$.

($\Leftarrow$) On suppose que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k \times \|x\|_E$.

Soit $(x, y) \in E^2$. Comme f est linéaire, on a : $f(x) - f(y) = f(x - y)$. D'où, $\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq k \times \|x - y\|_E$. $\square$



Théorème 11.12

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimensions finies**.

Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est lipschitzienne sur E .

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E (on a noté p la dimension de E).

On munit E de la norme : pour tout $x = x_1.e_1 + \dots + x_p.e_p \in E$, $\|x\|_E = \max(|x_1|, \dots, |x_p|)$. On munit F d'une norme $\|\cdot\|_F$.

Soit $x = x_1.e_1 + \dots + x_p.e_p \in E$.

Par linéarité de f , on a : $\|f(x)\|_F = \|x_1.f(e_1) + \dots + x_p.f(e_p)\|_F$.

D'où, par inégalité triangulaire et homogénéité, $\|f(x)\|_F \leq \sum_{k=1}^p |x_k| \times \|f(e_k)\|_F$.

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_k| \leq \|x\|_E$.

Donc, $\|f(x)\|_F \leq \left(\sum_{k=1}^p \|f(e_k)\|_F \right) \times \|x\|_E$.

On note $k = \sum_{k=1}^p \|f(e_k)\|_F$ (quantité positive qui ne dépend pas de x !).

On a montré que : pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k \times \|x\|_E$. Par la proposition précédente, on déduit que la fonction f est k -lipschitzienne. $\square$

Corollaire 11.2

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimensions finies**.

Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue sur E .

Démonstration

Une application lipschitzienne est continue. $\square$



Exemple 11.18

► L'application trace $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire (et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$ sont de dimensions finies). Donc, l'application trace tr est lipschitzienne et donc est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

► Soit $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$. L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_l(\mathbb{R})$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (espace vectoriel de dimension finie), donc est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$M \mapsto P \times A \times Q$$

Remarque 11.15

Si on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|M\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$ où $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), |\text{tr}(M)| \leq \sum_{k=1}^n m_{k,k} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \leq \|M\|_1.$$

Donc, la trace est 1-lipschitzienne dans ce cas.

Si on munit maintenant $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$ où $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), |\text{tr}(M)| \leq \sum_{k=1}^n |m_{k,k}| \leq n \times \|M\|_\infty.$$

Donc, la trace est n -lipschitzienne dans ce cas.

Un changement de norme peut entraîner un changement de rapport de Lipschitz mais le caractère lipschitzien est conservé.

Définition 11.8

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application.

On dit que f **est multilinéaire (ou p -linéaire)** lorsque :

pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_p$, pour tout $(x_i, y_i) \in E_i \times E_i$,
pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \dots, x_p) = \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p) + \mu f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_p).$$

Exemple 11.19

- Toute application linéaire est 1-linéaire.
- Tout produit scalaire est 2-linéaire.
- Le déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est n -linéaire en les colonnes de sa variable.
- L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est 2-linéaire.
 $(A, B) \mapsto A \times B$

Théorème 11.13

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimensions finies**.

Toute application p -linéaire de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F est continue sur $E_1 \times \dots \times E_p$.

Démonstration

Pour alléger les notations, on donne la démonstration lorsque $p = 2$. Soit $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application 2-linéaire.

Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ une base de E_2 .

Soient $x = \sum_{k=1}^p x_k \cdot e_k \in E_1$ et $y = \sum_{j=1}^q y_j \cdot \varepsilon_j \in E_2$. On a :

$$f(x, y) = f\left(\sum_{k=1}^p x_k \cdot e_k, \sum_{j=1}^q y_j \cdot \varepsilon_j\right) = \sum_{k=1}^p \left(x_k \cdot f\left(e_k, \sum_{j=1}^q y_j \cdot \varepsilon_j\right)\right) = \sum_{k=1}^p \left(x_k \cdot \sum_{j=1}^q y_j \cdot f(e_k, \varepsilon_j)\right) = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q (x_k \times y_j) \cdot \underbrace{f(e_k, \varepsilon_j)}_{\text{constante}}.$$

Ainsi, f est polynomiale en les coordonnées de (x, y) . Donc f est continue. □

💡 **Exemple 11.20**

- Tout produit scalaire sur E (espace vectoriel de dimension finie) est continu sur $E \times E$.
- L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies).

$$(A, B) \mapsto A \times B$$
- Le déterminant est une application multilinéaire par rapport aux colonnes de sa variable et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$ sont de dimensions finies, donc le déterminant est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.



Exercice 11.3

Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Résolution

On a $GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) \neq 0\} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 0\}$.

De plus, l'application $\det$ est multilinéaire par rapport aux colonnes de sa variable, donc est une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Donc, $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi, son complémentaire $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.