MATHÉMATIQUES

21

Représentation de l'espace

BTS | Mathématiques | Groupement B1

Objectifs du chapitre

- Maîtriser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques dans l'espace.
- Représenter et étudier les droites et plans dans l'espace à l'aide de leurs équations.
- Calculer des distances (point-droite, point-plan) et des angles (dièdre, droite-plan).
- Reconnaître et équationner les surfaces courantes (sphère, cylindre, cône, quadriques).
- Effectuer des projections orthogonales et faire le lien avec le dessin technique.
- Appliquer les matrices de transformation (rotation, symétrie, homothétie) en coordonnées homogènes.
- Découvrir, en complément hors-programme (culture / poursuite d'études), les notions de courbure et torsion d'une courbe gauche.
- Résoudre des problèmes d'intersection de surfaces et de sections planes.

Situation professionnelle

Mathieu est technicien supérieur en bureau d'études mécaniques dans une société qui fabrique des équipements industriels. Son logiciel de CAO génère des pièces en 3D, mais les collègues de l'atelier ont besoin de plans en 2D avec vues de face, de dessus et de côté, ainsi que de sections transversales.

Pour valider les assemblages, Mathieu doit aussi vérifier que certaines surfaces ne se croisent pas, calculer des distances minimales entre pièces mobiles et déterminer les angles entre plans de coupe. Toutes ces opérations reposent sur la **géométrie analytique de l'espace**.

Axelle, architecte en bureau d'études bâtiment, utilise les mêmes outils pour modéliser des charpentes métalliques complexes, calculer des volumes de terrassement et concevoir des façades courbes.

1. Repères dans l'espace

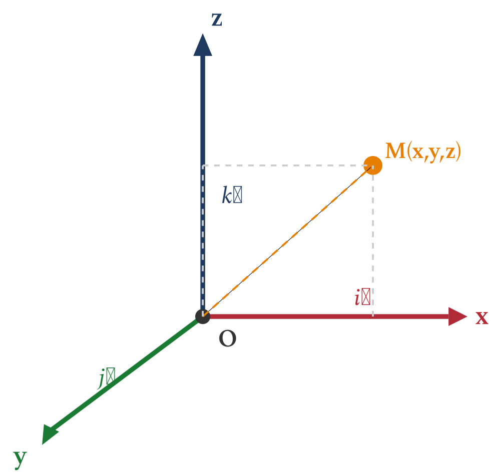
1.1 Repère cartésien

Définition Un repère cartésien de l'espace est un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est l'origine et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont trois vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux formant une base directe :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}.$$

Tout point M de l'espace est repéré par ses coordonnées (x, y, z) telles que :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$



Repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.2 Distance entre deux points

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple $A(1, 2, 3)$ et $B(4, -1, 7)$. $AB = \sqrt{9 + 9 + 16} = \sqrt{34} \approx 5.83$.

1.3 Repère cylindrique

Définition Un point M est repéré en coordonnées cylindriques par (r, θ, z) où :

- $r \geq 0$: distance à l'axe (Oz).
- $\theta \in [0, 2\pi[$: angle dans le plan xOy par rapport à $\vec{i}$.
- z : côte (même qu'en cartésien).

Relations cylindriques ↔ cartésiennes :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z \qquad \longleftrightarrow \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{atan}2(y, x), \quad z = z$$

Ce repère est naturel pour les pièces à symétrie de révolution (arbres, roulements, tuyaux).

1.4 Repère sphérique

Définition Un point M est repéré par (ρ, θ, φ) où :

- $\rho = OM \geq 0$: distance à l'origine.
- $\theta \in [0, 2\pi[$: angle azimutal (longitude).
- $\varphi \in [0, \pi]$: angle polaire (colatitude), mesuré depuis (Oz).

Relations sphériques ↔ cartésiennes :

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right), \quad \theta = \operatorname{atan}2(y, x)$$

Utile en acoustique, en antennes, en géodésie (latitude/longitude) et en physique.

Exemple Convertir $M(3, 4, 5)$ en coordonnées sphériques :
$\rho = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7.07$
$\varphi = \arccos(5/5\sqrt{2}) = \arccos(1/\sqrt{2}) = 45^\circ$
$\theta = \arctan(4/3) \approx 53.1^\circ$

2. Droites dans l'espace

2.1 Représentation paramétrique

Définition Une droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (a, b, c)$ est définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ou de manière compacte : $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{u}$.

Exemple Droite passant par $A(1, -2, 3)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2, 1, -1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

2.2 Équations cartésiennes

Si $a, b, c \neq 0$, on peut écrire les équations cartésiennes :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Si l'un des coefficients est nul (ex. $c = 0$), la droite est dans un plan parallèle à xOy et les équations s'adaptent en conséquence.

2.3 Positions relatives de deux droites

Sécantes : elles se croisent en un point commun ; leurs directions ne sont pas colinéaires.

Parallèles : $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ et elles n'ont pas de point commun.

Confondues : $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ et elles partagent tous leurs points.

Gauches (non coplanaires) : elles ne sont ni sécantes ni parallèles ; elles ne sont pas dans un même plan.

Pour tester si deux droites D_1, D_2 sont coplanaires, on vérifie que le déterminant du triplet $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{A_1A_2})$ est nul (critère du produit mixte).

Critère droites gauches Les droites D_1 (passant par A_1, directrice $\vec{u}_1$) et D_2 (passant par A_2, directrice $\vec{u}_2$) sont **gauches** si et seulement si :

$$(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{A_1A_2} \neq 0$$

La **distance minimale** entre droites gauches est :

$$d(D_1, D_2) = \frac{|(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{A_1A_2}\,|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|}$$

2.4 Distance d'un point à une droite

Si H est le projeté orthogonal du point P sur la droite D :

$$d(P, D) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \qquad \text{(A point quelconque de D)}$$

Exemple Distance de $P(2,1,4)$ à la droite passant par $A(0,0,0)$ de direction $\vec{u}(1,1,0)$:
$\overrightarrow{AP} = (2,1,4)$, $\vec{u} = (1,1,0)$, $|\vec{u}| = \sqrt{2}$.
$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0-4)\vec{i} - (0-4)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = (-4, 4, 1)$.
$d = \sqrt{16+16+1}/\sqrt{2} = \sqrt{33}/\sqrt{2} = \sqrt{33/2} \approx 4.06$.

3. Plans dans l'espace

3.1 Équation générale d'un plan

Définition L'équation générale d'un plan est :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (a, b, c) \neq (0,0,0)$$

Le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ est le **vecteur normal** au plan.

3.2 Déterminer l'équation d'un plan

Cas usuels

- **Plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ de normale $\vec{n} = (a, b, c)$:**

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

- **Plan passant par A, B, C non alignés** : on calcule $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ puis l'équation.
- **Plan contenant deux droites sécantes** : on prend les deux vecteurs directeurs et leur produit vectoriel donne $\vec{n}$.

Exemple Plan passant par $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$.
$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$.
$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6 - 0)\vec{i} - ((-3) - 0)\vec{j} + (0 - (-2))\vec{k} = (6, 3, 2)$.
Équation : $6(x - 1) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
Vérification : $B(0, 2, 0) : 0 + 6 + 0 - 6 = 0$. $C(0, 0, 3) : 0 + 0 + 6 - 6 = 0$. ✓

3.3 Distance d'un point à un plan

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{avec } P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Exemple Distance de $P_0(1, 1, 1)$ au plan $2x - y + 2z - 5 = 0$.
$d = |2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 5|/\sqrt{4 + 1 + 4} = |2 - 1 + 2 - 5|/3 = |-2|/3 = 2/3 \approx 0.67$.

3.4 Positions relatives

Deux plans π_1, π_2 :

- **Parallèles** : $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ et $d_1/a_1 \neq d_2/a_2$.
- **Confondus** : équations proportionnelles.
- **Sécants** : droite d'intersection, angle dièdre $\theta = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$.

Plan et droite :

- **Droite dans le plan** : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $A \in \pi$.
- **Droite parallèle** : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $A \notin \pi$.
- **Droite sécante** : $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$; angle : $\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.

4. Solides et surfaces dans l'espace

4.1 Sphère

Définition La sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon r a pour équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Développée : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2 - r^2) = 0$.

L'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle (ou un point, ou vide). Si le plan est à distance d du centre, le cercle a pour rayon $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$.

4.2 Cylindre

Définition Le **cylindre de révolution** d'axe (Oz) et de rayon R a pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Pour un cylindre d'axe Δ de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A :

$$|\overrightarrow{AM} \times \vec{u}|^2 = R^2 |\vec{u}|^2$$

En CAO, les cylindres apparaissent dans les alésages, arbres, tuyauteries. En coordonnées cylindriques, l'équation s'écrit simplement $r = R$.

4.3 Cône

Définition Le **cône de révolution** de sommet O, d'axe (Oz) et de demi-angle α :

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\alpha \qquad \text{(ou } r = |z| \tan\alpha \text{ en cylindrique)}$$

4.4 Surfaces quadratiques (quadriques)

Les surfaces du second degré (quadriques) sont les surfaces les plus courantes en géométrie analytique de l'espace :

Ellipsoïde : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Hyperboloïde à une nappe : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Paraboloïde elliptique : $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Paraboloïde hyperbolique : $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ (selle)

4.5 Volumes et aires

Sphère (rayon r)	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$
Cylindre (R, h)	$V = \pi R^2 h$, $A_{\text{lat}} = 2\pi R h$
Cône (R, h)	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, $A_{\text{lat}} = \pi R \ell$ avec $\ell = \sqrt{R^2 + h^2}$
Tore (R, r)	$V = 2\pi^2 R r^2$, $A = 4\pi^2 R r$

5. Projections

5.1 Projection orthogonale sur un plan

Définition Le **projeté orthogonal** de $P(x_0, y_0, z_0)$ sur le plan $\pi : ax + by + cz + d = 0$ est :

$$H = P - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\,(a, b, c)$$

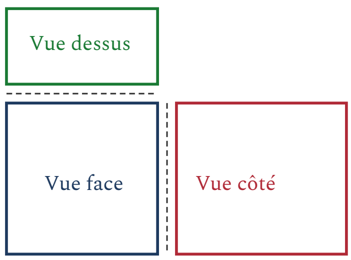
La droite PH est perpendiculaire à π (direction $\vec{n}$) et $H \in \pi$.

Exemple Projeter $P(3, 1, 2)$ sur le plan $\pi : x + y + z = 6$. Ici $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $d = -6$, $|\vec{n}|^2 = 3$. $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 3 + 1 + 2 - 6 = 0 \Rightarrow P \in \pi$! Prenons $P(3, 2, 2) : 3 + 2 + 2 - 6 = 1$. $H = (3, 2, 2) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) = (8/3,\ 5/3,\ 5/3)$.

5.2 Vues en coupe et dessin technique

Les trois vues standard du dessin technique correspondent aux projections orthogonales :

- **Vue de face** : projection sur le plan xOz ($y = 0$), conserve x et z.
- **Vue de dessus** : projection sur le plan xOy ($z = 0$), conserve x et y.
- **Vue de côté (gauche)** : projection sur le plan yOz ($x = 0$), conserve y et z.



5.3 Perspective isométrique

En perspective isométrique, les trois axes x, y, z sont représentés à 120° l'un de l'autre et conservent tous la même échelle. La matrice de projection isométrique est :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

6. Transformations dans l'espace

6.1 Représentation matricielle en coordonnées homogènes

En CAO 3D, les transformations géométriques sont représentées par des matrices 4×4 opérant sur les coordonnées **homogènes** $(x, y, z, 1)^\top$. Cette représentation unifie les rotations, translations, changements d'échelle et projections en un seul formalisme.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} R_{3\times3} & \mathbf{t} \\ 0\,0\,0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $R_{3\times3}$ est la matrice de rotation et $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)^\top$ le vecteur de translation.

6.2 Translation

$$\mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.3 Rotations autour des axes

Rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz) :

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même pour $\mathbf{R}_x(\theta)$ (autour de Ox) et $\mathbf{R}_y(\theta)$ (autour de Oy).

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Attention L'ordre des rotations est important : en général, $\mathbf{R}_x\mathbf{R}_y \neq \mathbf{R}_y\mathbf{R}_x$. Les matrices de rotation ne commutent pas. Pour composer des transformations successives, on multiplie les matrices de **droite à gauche** : $\mathbf{M}_{\text{total}} = \mathbf{M}_n \cdots \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$.

6.4 Rotation autour d'un axe quelconque

Complément hors-programme La **formule de Rodrigues** ci-dessous dépasse le programme du BTS (culture / poursuite d'études). Le programme demande de connaître les rotations autour des axes Ox, Oy, Oz (paragraphe 6.3) ; la rotation autour d'un axe quelconque n'est pas exigible.

Pour une rotation d'angle θ autour d'un axe unitaire $\hat{u} = (u_x, u_y, u_z)$, la **formule de Rodrigues** donne :

$$\mathbf{R}(\hat{u}, \theta) = \cos\theta\,\mathbf{I} + (1 - \cos\theta)\,\hat{u}\hat{u}^\top + \sin\theta\,[\hat{u}]_\times$$

où $[\hat{u}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice antisymétrique de $\hat{u}$.

6.5 Symétrie par rapport à un plan

La symétrie par rapport au plan $\pi : \vec{n} \cdot \vec{x} = d$ (avec $|\vec{n}| = 1$) est :

$$\mathbf{S}_\pi = \mathbf{I} - 2\vec{n}\vec{n}^\top \qquad \text{(en coordonnées centrées)}$$

Exemple : symétrie par rapport au plan xOy ($\vec{n} = \vec{k}$) : $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$.

6.6 Homothétie

$$\mathbf{H}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Homothétie uniforme de rapport k : $s_x = s_y = s_z = k$. Changement d'échelle non uniforme (déformation) si les rapports diffèrent.

7. Introduction à la géométrie différentielle

> Complément hors-programme Cette section relève de la **culture mathématique / poursuite d'études** (écoles d'ingénieurs, licence). Le **trièdre de Frenet, la courbure et la torsion ne figurent pas au programme de mathématiques du BTS** : ils ne sont pas exigibles à l'examen. Le module « Représentations de l'espace » se limite à la perspective, au repérage, au produit scalaire et à l'équation d'un plan ; les courbes paramétrées du programme se restreignent aux fonctions polynomiales (degré ≤ 2) avec le seul vecteur tangent. Vous pouvez ignorer cette section sans incidence sur votre préparation.

7.1 Courbes gauches

Une **courbe gauche** (ou courbe dans l'espace) est une courbe qui ne peut pas être tracée dans un plan. Elle est paramétrée par $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Trièdre de Frenet Le repère mobile le long d'une courbe est constitué de trois vecteurs unitaires :

- **Vecteur tangent** : $\vec{T} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$
- **Vecteur normal principal** : $\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$
- **Vecteur binormal** : $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

7.2 Courbure et torsion

Courbure :

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

Le rayon de courbure est $\rho = 1/\kappa$.

Torsion : mesure le degré de vrillage de la courbe hors de son plan osculateur.

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$$

Une droite a $\kappa = 0$. Un cercle a $\kappa = 1/R = \text{const}$ et $\tau = 0$. Une hélice a κ et τ constants.

Exemple — Hélice $\mathbf{r}(t) = (R\cos t,\ R\sin t,\ ht)$. $\mathbf{r}' = (-R\sin t, R\cos t, h)$, $|\mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + h^2}$. Courbure : $\kappa = R/(R^2 + h^2)$. Torsion : $\tau = h/(R^2 + h^2)$.

8. Applications — sections et intersections

8.1 Section d'un solide par un plan

La section d'un cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ par un plan oblique $ax + by + cz + d = 0$ est une ellipse (si le plan n'est pas parallèle à l'axe). Les dimensions de l'ellipse dépendent de l'angle d'inclinaison du plan par rapport à l'axe.

Exemple professionnel Un tuyau circulaire de rayon $R = 50\,\text{mm}$ est coupé en biais à 45°. La coupe a la forme d'une ellipse de demi-axes $R = 50\,\text{mm}$ et $R/\cos 45^\circ = 50\sqrt{2} \approx 70.7\,\text{mm}$. Le technicien doit préparer un gabarit de découpe en traçant cette ellipse.

8.2 Intersection de deux plans

L'intersection de deux plans non parallèles est une droite. Pour $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$:

- Le vecteur directeur de la droite d'intersection est $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.
- On trouve un point en fixant une coordonnée et en résolvant le système 2×2.

Exemple $\pi_1 : x + y + z = 6$ et $\pi_2 : 2x - y + z = 3$.
$\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$.
$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1),\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1,\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = (2, 1, -3)$.
Point (fixer $z = 0$) : $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3, y = 3$.
Droite : $(x, y, z) = (3, 3, 0) + t(2, 1, -3)$.

8.3 Intersection d'une droite et d'une sphère

Pour trouver les points d'intersection de la droite $\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} + t\,\vec{u}$ et de la sphère $|\mathbf{r} - \mathbf{C}|^2 = R^2$:

1. Substituer : $|\mathbf{A} + t\vec{u} - \mathbf{C}|^2 = R^2$.
2. Poser $\mathbf{m} = \mathbf{A} - \mathbf{C}$. Développer : $|\vec{u}|^2 t^2 + 2(\mathbf{m} \cdot \vec{u})t + |\mathbf{m}|^2 - R^2 = 0$.
3. Discriminant : $\Delta = (\mathbf{m} \cdot \vec{u})^2 - |\vec{u}|^2(|\mathbf{m}|^2 - R^2)$.
4. Si $\Delta > 0$: 2 points. $\Delta = 0$: tangence. $\Delta < 0$: pas d'intersection.

Méthode — Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan

1. **Écrire la droite** sous forme paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$
2. **Substituer** dans l'équation du plan $ax + by + cz + d = 0$.
3. **Résoudre** en t (équation du premier degré en t).
4. **Calculer** les coordonnées du point d'intersection en remplaçant t dans les équations paramétriques.
5. **Vérifier** en substituant le point obtenu dans l'équation du plan.

Cas particuliers : si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ (i.e. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$), la droite est parallèle au plan (ou incluse si le point appartient au plan).

Application de la méthode Droite $D : (x, y, z) = (1, 2, -1) + t(1, -1, 2)$; Plan $\pi : 2x + y - z = 7$.

1. Paramétrique : $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$.
2. Substitution : $2(1 + t) + (2 - t) - (-1 + 2t) = 7$.
3. Développement : $2 + 2t + 2 - t + 1 - 2t = 7 \Rightarrow 5 - t = 7 \Rightarrow t = -2$.
4. Point : $x = 1 + (-2) = -1$, $y = 2 - (-2) = 4$, $z = -1 + 2(-2) = -5$. Intersection en $(-1, 4, -5)$.
5. Vérification : $2(-1) + 4 - (-5) = -2 + 4 + 5 = 7$. ✓

À retenir

- Coordonnées cylindriques : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. Utiles pour les pièces à symétrie axiale.
- Coordonnées sphériques : $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$.
- Droite : $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$. La droite est caractérisée par un point et un vecteur directeur.
- Plan : $ax + by + cz + d = 0$. Le vecteur normal est $\vec{n} = (a, b, c)$.
- Distance point-plan : $d = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Droites gauches : non coplanaires, distance $d = |(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{A_1A_2}|/|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|$.
- En CAO, les transformations se représentent par des matrices 4×4 en coordonnées homogènes.
- Pour trouver l'intersection droite-plan : substituer la forme paramétrique dans l'équation du plan, résoudre en t.

Exercices

Exercice 1 — Conversions de coordonnées

1. Convertir $M(3, 3, 4)$ en coordonnées cylindriques.
2. Convertir $N(r = 5, \theta = 60^\circ, z = 2)$ en coordonnées cartésiennes.
3. Convertir $P(\rho = 6, \theta = 30^\circ, \varphi = 60^\circ)$ en coordonnées cartésiennes.

Exercice 2 — Équation d'un plan

Trouver l'équation du plan passant par $A(2, 0, 1)$, $B(0, 3, 0)$ et $C(1, 1, 2)$.

Exercice 3 — Distance point-plan

Dans une charpente métallique, deux poutres définissent un plan d'appui $\pi : 3x + 4y - 12z = 24$. Un boulon de fixation est situé au point $P(2, 1, 3)$. Calculer la distance du boulon au plan pour vérifier que le jeu de montage est supérieur à 5 mm (les coordonnées sont en décimètres).

Exercice 4 — Intersection droite-plan

La trajectoire d'un rayon lumineux en simulation optique suit la droite $D : (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 2, 1)$. Trouver le point d'intersection avec le plan miroir $\pi : x + 2y - 2z + 4 = 0$.

Exercice 5 — Rotation d'un point

On effectue une rotation de 90° autour de l'axe (Oz) sur le point $P(3, 0, 2)$. Trouver les coordonnées du point transformé P'.

Exercice 6 — Section d'un cylindre

Un tuyau de ventilation de rayon $R = 80\,\text{mm}$ d'axe (Oz) est coupé par le plan incliné $\pi : z = x\tan 30^\circ$ (coupe à 30° de l'horizontale). Montrer que la section est une ellipse et calculer ses demi-axes.

MATHÉMATIQUES

21

Représentation de l'espace

Représentation de l'espace | BTS | Mathématiques

Rappels (repère orthonormé) : $\vec{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$; $AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$; plan $ax + by + cz + d = 0$ de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Exercice 1 — Coordonnées et vecteurs

$A(1, 2, 3)$, $B(4, 0, 5)$.

1. Détermine $\vec{AB}$. **2.** Détermine les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

Exercice 2 — Distance

Calcule la distance AB pour $A(0, 1, 2)$ et $B(2, 3, 4)$.

Exercice 3 — Équation d'un plan

Détermine une équation cartésienne du plan passant par $A(1, 0, 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2, -1, 3)$.

Exercice 4 — Appartenance

Le point $M(2, 1, 1)$ appartient-il au plan $2x - y + 3z - 8 = 0$?

Exercice 5 — Représentation paramétrique (type BTS)

Donne une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2, 0, -1)$, puis vérifie si $B(5, 1, -2)$ est dessus.

MATHÉMATIQUES

21

Représentation de l'espace

Représentation de l'espace | BTS | Mathématiques

Durée : 1 heure **Calculatrice :** autorisée **Barème :** 20 points

Documents : non autorisés

Exercice 1 — Vecteurs et distance *(8 points)*

$A(2, -1, 0)$, $B(4, 1, 4)$.

1. Calcule $\vec{AB}$ et le milieu I de $[AB]$. *(4 pts)*

2. Calcule la distance AB. *(4 pts)*

Exercice 2 — Plan *(8 points)*

1. Équation cartésienne du plan passant par $A(0, 2, 1)$ et de normale $\vec{n}(1, 2, -2)$. *(4 pts)*

2. Le point $C(2, 0, 1)$ appartient-il à ce plan ? *(4 pts)*

Exercice 3 — Droite *(4 points)*

Donne une représentation paramétrique de la droite passant par $A(0, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2, 2)$.