Les primitives – Fiche de cours

1. Primitive d'une fonction sur un intervalle

On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I avec F'=f

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle (à une constante d'intégration près)

2. Primitive de fonctions de référence

f est une fonction définie sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I.

$f(x)$	$F(x)$	I
$a, a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$ax^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$A\sin(\omega x+\varphi), \omega \neq 0$ $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$-\frac{A}{\omega}\cos(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$
$A\cos(\omega x+\varphi), \omega \neq 0$ $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$\frac{A}{\omega}\sin(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$

3. Opérations sur les primitives

Propriétés Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et k une constante réelle.

(i) Si F est une primitive de f sur I, alors kF est une primitive de kf sur I.
(ii) Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

Les primitives – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = 4x^3$ c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ e) $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$ f) $f(t) = -3\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 2

Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f vérifiant la condition donnée :

$f(x) = x^5 - 3x + 1$ et $F(-3) = -2$.

Exercice 3

1. Montrer que $F(x) = \frac{x^2-3}{x}$ est une primitive de $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive F de f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{x^2}$ telle que $F(1) = -1$
3. Déterminer la primitive G de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 3\cos(2t)$ telle que $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
4. Déterminer **toutes** les primitives de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{(5x-2)^4}$

Exercice 4

Déterminer dans chaque cas les primitives des fonctions suivnates : a) $f(x) = 15x^2 - \frac{1}{3}x + 2$

b) $f(x) = -3x + \frac{1}{4}x^3$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3x$ d) $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{x^2}$ e) $f(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$

f) $f(x) = \frac{3}{(2x-3)^2}$ g) $f(x) = \frac{5}{(-2x+1)^2} + 3$ h) $f(x) = 2x(x^2+3)$ i) $f(x) = (x+2)^3$

j) $f(x) = (3x-2)^4$ k) $f(x) = x^2(x^3+5)^3$ l) $f(x) = \cos(x)$ m) $f(x) = \sin(x)$

o) $f(x) = \cos(3x)$ p) $f(x) = 1 - \cos(2x)$ q) $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ r) $f(x) = -3x + \sin\left(\frac{1}{2\pi}x\right)$

Exercice 5

Déterminer les primitives des polynômes suivants : a) $f(x) = x^8 + x^2$ b) $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$

c) $f(x) = x^9 - 3x^2 + 2$ d) $f(x) = -5x^5 + 3$ e) $f(x) = \frac{x^4}{3} - 12x^2 + \frac{3}{2}$ g) $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 6x$

Exercice 6

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de f vérifiant la condition donnée :

a) $f(x) = -2x + 4$, et $F(2) = 3$

b) $f(x) = 8x^3 - 3x$, et $F(1) = 2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} + 1$, et $F(0) = 2$

d) $f(x) = 2\cos(2x) + 2$, et $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

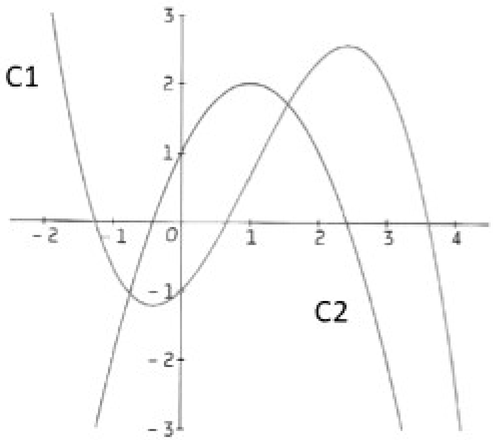
Exercice 7

Dans un repère (O, I, J), on donne la courbe représentative d'une fonction f et la courbe représentative d'une primitive F de f, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$.

a. Laquelle des deux courbes représente la fonction f ? Justifier.

b. On admet que f est un polynôme du second degré d'expression $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

c. En utilisant un élément du graphique, déterminer l'expression de F représentée par la 2[e] courbe du graphique.



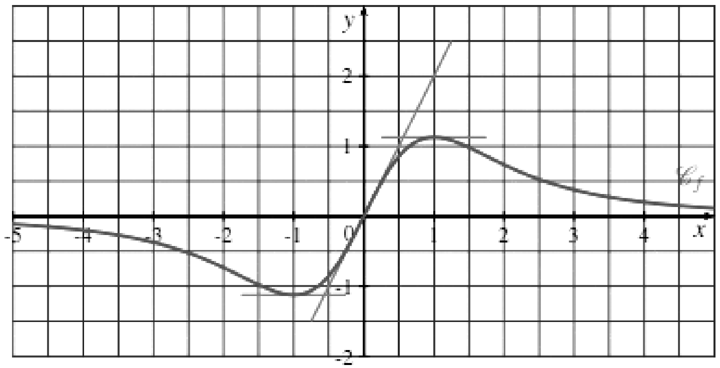
Exercice 8

1. Déterminer la primitive F de la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x^2 + 2x - \dfrac{3}{x^2}$ telle que $F(1) = -1$.
2. Déterminer la primitive G de la fonction g définie pour tout réel t de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ par $g(t) = 3\cos(2t)$ telle que $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

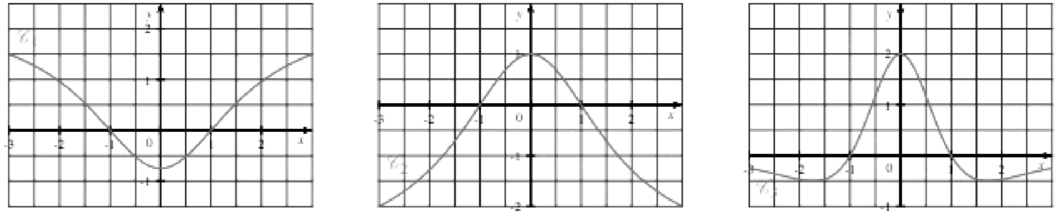
Exercice 9

PARTIE A

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. On note f' la dérivée de la fonction f.
   Par lecture graphique, déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée f' de la fonction f et une autre d'une primitive F de la fonction f.
   Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F. Justifier la réponse.



PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{18x}{(x^2+3)^2}$.

1. Soit F la primitive de la fonction f telle que $F(1) = 0$
   a) Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\dfrac{9}{x^2+3}$ est une primitive de la fonction f.
   b) En déduire une expression de $F(x)$.

Exercice 10

$a(x) = 5x^4 + 12x^2 - 6x + 1$

$b(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^4}$

$c(x) = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

$d(x) = (2x+9)^4$

$e(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x) = \dfrac{1}{3}\cos(3x+7)$

$h(x) = (x+2)(x^2+4x+1)^3$

Exercice 11

Déterminer la primitive G de la fonction g définie pour tout réel t de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ par l'expression $g(t) = 3\cos(2t)$ et telle que $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Exercice 12

Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $G(x) = \dfrac{9}{x^2+3}$

est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{18x}{(x^2+3)^2}$.

En déduire l'expression de la fonction F, primitive de f, telle que $F(1) = 0$.

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + \dfrac{1}{2}$ et $F(1) = 0$.
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ et $F(1) = 0$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin(2t)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

Exercice 14

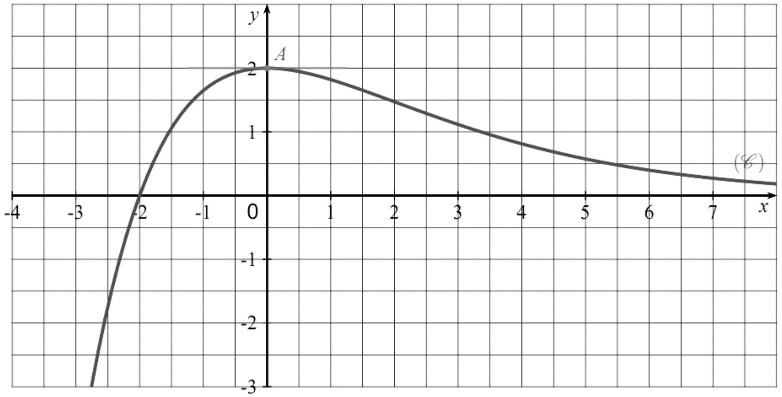
Déterminer les fonctions primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x + 3$ 2. $f(x) = x - e^{-x}$ 3. $f(x) = 1 + 2xe^{x^2}$

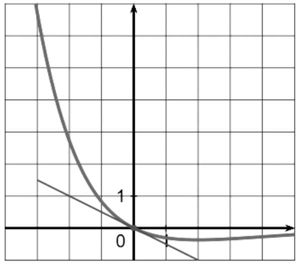
Exercice 15

PARTIE A

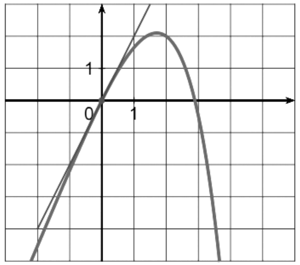
La courbe $(\mathscr{C})$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



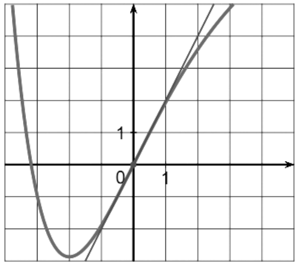
1. Au point $A(0;2)$, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction f' dérivée de la fonction f et une autre une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.