

Compléments sur les espaces vectoriels – TD₁

Familles de vecteurs

Exercice 1 :

On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x - i|$$

1. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
2. Quel résultat peut-on en déduire sur E ?

Réponse

1. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i = 0$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par l'absurde, on suppose que $\lambda_k \neq 0$. On a :

$$f_k = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \cdot f_i.$$

Or, f_k n'est pas dérivable en k (l'expression dans la valeur absolue est nulle en $x = k$) et $-\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \cdot f_i$ est dérivable en

k . Contradiction.

Donc, $\lambda_k = 0$. Ceci est vrai pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Donc,

$(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

2. Il existe des familles libres composées de n vecteurs pour tout entier $n \geq 1$. Donc,

E est de dimension finie.

Exercice 2 : CCINP 2024

1. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X + k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X + k)^n = 0$.

2. Montrer que, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X + k)^p = 0$.

3. Montrer que, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$. Conclure.

Réponse

1. Voir le cours
2. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La dérivée $n - p$ -ième de $(X + k)^n$ est :

$$\frac{n!}{p!} (X + k)^p.$$

Donc, en dérivant la relation de l'énoncé, on a :

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \times \frac{n!}{p!} \times (X+k)^p = 0.$$

Donc, en simplifiant par $\frac{n!}{p!} \neq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \times (X+k)^p = 0.$$

3. En évaluant en 0 l'expression de la question précédente en 0 :

$$\text{pour tout } p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0.$$

On obtient alors un système linéaire d'équations dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0^1 & 1^1 & 2^1 & \dots & n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0^n & 1^n & 2^n & \dots & n^n \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $\det(M)$ est le déterminant de Vandermonde associé aux scalaires deux à deux distincts $0, 1, 2, \dots, n$.

Par théorème, $\det(M) \neq 0$. Donc, (S) possède une unique solution. Le $n+1$ -uplet nul est clairement solution de (S) , donc, $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Donc,

$$(X+k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une famille libre.}$$

Exercice 3 : CCINP 2023

- Montrer, sans les calculer, que le polynôme $P = X^3 + X + 1$ admet 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$. On les note α, β, γ .
- Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z & = 0. \end{cases}$$

Réponse

- La fonction $x \mapsto P(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

De plus, $P' = X^2 + 1$ ne possède pas de racines réelles. On en déduit que α est racine simple de P .

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = x^2 + 1 > 0$.

Donc, $x \mapsto P(x)$ est strictement croissante. On en déduit que α est la seule racine réelle de P .

Dans $\mathbb{C}$ tout polynôme est scindé, donc, il existe β et γ deux racines complexes dans $\mathbb{C}$.

Comme α est la seule racine réelle de P , β et γ ne sont pas réels.

D'autre part, comme P est à coefficients **réels**, $\beta = \bar{\gamma}$ (si cela n'est pas clair pour vous, vous savez où me trouver).

Donc,

$$P \text{ possède 3 racines distinctes dans } \mathbb{C}.$$

2. La matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est un déterminant de Vandermonde associé à α , β et γ . Comme ces nombres sont distincts, $\det(A) \neq 0$.

Donc, le système possède une unique solution.

Or, $(0, 0, 0)$ est clairement solution du système. Ainsi,

L'ensemble des solutions est $\{(0, 0, 0)\}$.

Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 4 :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cap G = F + G$ si, et seulement si, $F = G$.

Réponse

$(\Leftarrow)$ On suppose que $F = G$.

On a alors $F \cap G = F$ et $F + G = F$. Donc, $F \cap G = F + G$.

$(\Rightarrow)$ On suppose que $F \cap G = F + G$.

► Soit $x \in F$. Comme G est un sous-espace vectoriel de E , on a $0_E \in G$ et $x = x + 0_E \in F + G$.

Donc, par hypothèse, $x \in F \cap G$. D'où, $x \in G$.

Donc, $F \subset G$.

► De même, si $x \in G$, alors $x = 0_E + x \in F + G$, puis $x \in F$.

Donc, $G \subset F$.

$$F = G.$$

Espaces vectoriels de polynômes

Exercice 5 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que si $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ alors $(P_k(X+a))_{0 \leq k \leq n}$ aussi.

2. Soit $a \neq b$. Montrer que $((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

3. Dans cette question, on suppose que $a = 0$ et $b = 1$.

Décomposer $Q = \frac{d^n}{dX^n}(X^n \times (X-1)^n)$ dans la base $(X^k(X-1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ et en déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Réponse

1. Soit $Q \in \mathbb{C}_n[X]$.

Comme $Q(X-a) \in \mathbb{C}_n[X]$ et $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$Q(X-a) = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(X).$$

Donc, en substituant $X+a$ à X , on a : $Q(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(X+a)$.

Donc, $(P_k(X+a))_{0 \leq k \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$ composée de $n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$.

Par théorème,

$$(P_k(X+a))_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].$$

2. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k}$.

On évalue en a : $\lambda_0 \times (a-b)^n = 0$. Comme $a \neq b$, on a $\lambda_0 = 0$.

On a alors :

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} = (X-a) \times \sum_{k=1}^n \lambda_k (X-a)^{k-1} (X-b)^{n-k} = 0.$$

On simplifie par $X-a$, puis on évalue en a . Il vient : $\lambda_1 \times (a-b)^{n-1} = 0$. Comme $a \neq b$, on a $\lambda_1 = 0$.

En itérant le procédé (factoriser et simplifier par $X-a$ puis évaluer en a), on a $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Donc, $((X-a)^k (X-b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$ composée de $n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$.

Ainsi,

$$((X-a)^k (X-b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].$$

3. Par la formule de Leibniz :

$$Q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} \times \frac{n!}{(n-k)!} X^k (X-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 X^k (X-1)^{n-k}.$$

D'autre part, par la formule du binôme de Newton.

$$X^n \times (X-1)^n = (X^2 - X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{2k} \times (-1)^{n-k} X^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (-1)^{n-k} X^{n+k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (-1)^{n-k} X^{n+k}.$$

D'où,

$$Q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (-1)^{n-k} \times \frac{(n+k)!}{k!} X^k.$$

On obtient deux expressions de Q . En identifiant les coefficients de X^n :

$$n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 6 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathbb{K}_n[X]$ non nul. On note $p = \deg(B)$ et on pose $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid B \text{ divise } P\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Exprimer la dimension de F en fonction de p .
3. Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{K}_n[X]$ et donner une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Réponse

1. On a $F \subset \mathbb{K}_n[X]$. De plus, B divise 0, donc, $0 \in F$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(P_1, P_2) \in F^2$.

On a alors $P_1 = BQ_1$ et $P_2 = BQ_2$ où $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$. D'où, $\lambda.P_1 + P_2 = B \times (\lambda.Q_1 + Q_2)$.

Donc, B divise $\lambda.P_1 + P_2$. Donc, $\lambda.P_1 + P_2 \in F$.

Ainsi,

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

On a l'équivalence : $P \in F$ si, et seulement si, il existe $Q \in \mathbb{K}_{n-p}[X]$ tel que $P = BQ$ (on sait que $Q \in \mathbb{K}_{n-p}[X]$ car B est de degré p).

Donc, $P \in F$ si, et seulement si, il existe $(a_0, \dots, a_{n-p}) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n-p} a_k.X^k.B$.

Donc, $F = \text{Vect}(B, XB, \dots, X^{n-p}B)$.

La famille $(B, XB, \dots, X^{n-p}B)$ engendre F . De plus, comme $B \neq 0$, la famille de polynômes non nuls $(B, XB, \dots, X^{n-p}B)$ est échelonnée en degrés. Donc, $(B, XB, \dots, X^{n-p}B)$ est une famille libre.

Ainsi,

$(B, XB, \dots, X^{n-p}B)$ est une base de F et $\dim(F) = n - p + 1$.

3. Considérons la famille de polynômes non nuls $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{p-1}, B, XB, \dots, X^{n-p}B)$ échelonnée en degrés. La famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de $n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$.

Par théorème, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. De plus, en posant $G = \text{Vect}(1, X, \dots, X^{p-1})$, on a $\mathbb{K}_n[X] = G \oplus F$.

Ainsi,

G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}_n[X]$ et une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$ est $\mathcal{B}$.

Applications linéaires**Exercice 7 : Résultats à retenir**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On considère f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
2. Donner les inclusions qui sont vraies entre les sous-espaces vectoriels de E suivants :
 - (a) $\text{Im}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g)$.
 - (b) $\text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Ker}(f)$.
 - (c) $\text{Im}(f + g)$ et $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
 - (d) $\text{Ker}(f + g)$ et $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.
3. Que peut-on en déduire pour les suites de sous-espaces vectoriels de E : $(\text{Im}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Ker}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$?
4. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que : $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

Réponse

- ($\Rightarrow$) On suppose que $g \circ f = 0$.
 Soit $y \in \text{Im}(f)$. On a alors $y = f(x)$ où $x \in E$.
 D'où, $g(y) = g \circ f(x)$.
 Or, $g \circ f = 0$, donc, $g(y) = 0$. Autrement dit, $y \in \text{Ker}(g)$.
 Ainsi, $\boxed{\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)}$.
 ($\Leftarrow$) On suppose que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
 Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \text{Im}(f)$. Donc, $f(x) \in \text{Ker}(g)$.
 Donc, $g(f(x)) = 0$.
 Ainsi, $\boxed{g \circ f = 0}$.
- $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
 - $\text{Ker}(g \circ f) \supset \text{Ker}(f)$.
 - $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
 - $\text{Ker}(f + g) \supset \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.
- On a : $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$. C'est une suite décroissante pour l'inclusion.
 On a : $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$. C'est une suite croissante pour l'inclusion.
- On a $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
 Donc, $\boxed{\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)}$.
 On note $r = \text{rg}(f)$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(f)$.
 Soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$. On a alors $y = g(f(x))$ où $x \in E$.
 On sait que $f(x) = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_r \cdot e_r$.
 D'où, $y = \lambda_1 \cdot g(e_1) + \dots + \lambda_r \cdot g(e_r) \in \text{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_r))$.
 Réciproquement, si $y = \lambda_1 \cdot g(e_1) + \dots + \lambda_r \cdot g(e_r) \in \text{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_r))$, alors $y = g(\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_r \cdot e_r)$.
 De plus, $\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_r \cdot e_r \in \text{Im}(f)$, donc, $y \in \text{Im}(g \circ f)$.
 D'où,

$$\text{Im}(g \circ f) = \text{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_r))$$
 On en déduit que $(g(e_1), \dots, g(e_r))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(g \circ f)$, donc,
 Donc, $\boxed{\text{rg}(g \circ f) \leq r}$.
 Ainsi,

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)).$$

Exercice 8 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On suppose que f est surjective. Montrer que f^2 est surjective.
- On suppose que $f^3 = f$. Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Réponse

- Rédaction 1 : on sait qu'une composée de surjections est une surjection, donc f^2 sur surjective.
 Rédaction 2 : Soit $y \in E$. On cherche $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$.
 Comme f est surjective, il existe $a \in E$ tel que $y = f(a)$, et de même, il existe $x \in E$ tel que $a = f(x)$.
 Donc, $y = f^2(x)$. Donc, f est surjective.
- ($\Rightarrow$) On suppose que f est injective.
 Soit $y \in E$. On cherche $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
 On sait que $f^3(y) = f(y)$.
 Par injectivité, $f^2(y) = y$.
 En notant $x = f(y) \in E$, on a $y = f(x)$.
 Donc, $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

($\Leftarrow$) On suppose que f est surjective. Montrons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$.

Comme f est surjective, f^2 est aussi surjective (Q1).

Donc, il existe $a \in E$ tel que $x = f^2(a)$.

D'où, $0 = f(x) = f^3(a)$.

Donc, par hypothèse, $f(a) = f^3(a) = 0$.

Donc, $x = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, puis, $\boxed{f \text{ est injective}}$.

Exercice 9 : Noyaux et images itérés

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \text{Ker}(f^k)$ et $I_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante pour l'inclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subset N_{k+1}$.
2. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$. Montrer que, pour tout $q \geq r$, $N_q = N_r$.
3. Montrer que la suite (I_k) est décroissante pour l'inclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, I_k \supset I_{k+1}$.
4. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_r = I_{r+1}$. Montrer que, pour tout $q \geq r$, $I_q = I_r$.

Dans la suite, on suppose que E est de dimension finie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = \dim(N_k)$.

5. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$.
Indication : on pourra montrer que la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.
6. Montrer que $I_r = I_{r+1}$.
7. Montrer que $E = N_r \oplus I_r$.
8. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{k+2} - d_{k+1} \geq d_{k+1} - d_k.$$

Réponse

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in N_k$. On a $f^k(x) = 0$.

Donc, comme f est linéaire, $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$.

Donc,

$$N_k \subset N_{k+1}.$$

2. Soit $q \geq r$. Soit $x \in N_r$.

On a $f^r(x) = 0$.

D'où, $f^q(x) = f^{q-r}(f^r(x)) = f^{q-r}(0) = 0$.

Attention!!! Il faut prendre garde à ne pas écrire d'expressions de la forme f^m avec $m < 0$. En effet, f n'est pas nécessairement bijective.

Donc, $\boxed{N_r \subset N_q}$.

Montrons par récurrence que, pour tout $q \geq r$, $N_q \subset N_r$.

Initialisation. Pour $q = r$, il n'y a rien à faire.

Hérédité. Soit $q \geq r$. On suppose que $N_q \subset N_r$. Montrons que $N_{q+1} \subset N_r$.

Soit $x \in N_{q+1}$. On a $f^{q+1}(x) = 0$.

D'où, $f^{r+1}(f^{q-r}(x)) = 0$.

Donc, $f^{q-r}(x) \in N_{r+1} = N_r$.

D'où, $0 = f^r(f^{q-r}(x)) = f^q(x)$.

Donc, $x \in N_q$.

D'où, par hypothèse de récurrence, $x \in N_r$.

Donc, $\boxed{N_q \subset N_r}$.

Ce qui achève la récurrence.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

On suppose que $y \in I_{k+1}$. On a $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \in I_k$.

Donc,

$$I_{k+1} \subset I_k.$$

4. Soit $q \geq r$.

Soit $y \in I_q$. On $y = f^q(x) = f^r(f^{q-r}(x)) \in I_r$.

Donc, $I_q \subset I_r$.

Montrons par récurrence que, pour tout $q \geq r$, $I_r \subset I_q$.

Initialisation. Pour $q = r$, il n'y a rien à faire.

Hérédité. Soit $q \geq r$. On suppose que $I_r \subset I_q$. Montrons que $I_r \subset I_{q+1}$.

Soit $y \in I_r$. Par hypothèse de récurrence, $y \in I_q$.

Donc, $y = f^q(x) = f^{q-r}(f^r(x))$ où $x \in E$.

Or, $f^r(x) \in I_r = I_{r+1}$.

Donc, $f^r(x) = f^{r+1}(a)$ où $a \in E$.

Donc, $y = f^{q-r}(f^{r+1}(a)) = f^{q+1}(a)$.

Donc, $y \in I_{q+1}$.

Donc, $I_r \subset I_{q+1}$.

Ce qui achève la récurrence.

Donc,

$$I_q = I_r.$$

5. Par 1., la suite (d_k) est croissante.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset E$, donc, $d_k \leq \dim(E)$.

Donc, la suite (d_k) est croissante majorée. Par le théorème de la limite monotone, la suite (d_k) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Par définition de limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq N$, $|d_k - \ell| \leq \frac{1}{3}$.

D'où, par inégalité triangulaire,

$$|d_k - d_N| \leq |d_k - \ell| + |\ell - d_N| \leq \frac{2}{3} < 1.$$

Or, $|d_k - d_N| \in \mathbb{N}$, donc, pour tout $k \geq N$, $d_k = d_N$.

Donc, la suite (d_k) est stationnaire.

Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ tel que $d_r = d_{r+1}$.

De plus, par 1., on a $N_r \subset N_{r+1}$.

Donc,

$$N_r = N_{r+1}.$$

6. On a $I_{r+1} \subset I_r$.

Donc, par le théorème du rang,

$$\dim(I_r) = \dim(E) - \dim(N_r) = \dim(E) - \dim(N_{r+1}) = \dim(I_{r+1}).$$

Donc,

$$I_r = I_{r+1}.$$

7. Soit $x \in N_r \cap I_r$. On a $f^r(x) = 0$ et $x = f^r(a)$.

Donc, $f^{2r}(a) = 0$.

Donc, $a \in N_{2r}$.

Or, $2r \geq r$, donc, par 2., $a \in N_r$.

Donc, $x = f^r(a) = 0$.

Donc, $N_r \cap I_r = \{0\}$.

Par le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(N_r) + \dim(I_r)$.

Par théorème,

$$E = N_r \oplus I_r.$$

8. Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère $g_k : I_k \rightarrow E$
 $x \mapsto f(x)$.

Par double inclusion, on montre que $\text{Im}(g_k) = \text{Im}(f^{k+1})$ et $\text{Ker}(g_k) = \text{Ker}(f) \cap I_k$.

Donc, par le théorème du rang appliqué à g_k ,

$$d_k = d_{k+1} + \dim(\text{Ker}(f) \cap I_k).$$

Par 3., $I_{k+1} \subset I_k$, donc,

$$d_k \geq d_{k+1} + \dim(\text{Ker}(f) \cap I_{k+1}).$$

En posant $g_{k+1} : I_{k+1} \rightarrow E$ on a (comme pour g_k), $d_{k+1} = d_{k+2} + \dim(\text{Ker}(f) \cap I_{k+1})$.
 $x \mapsto f(x)$,

Donc,

$$d_k \geq d_{k+1} + d_{k+1} - d_{k+2}.$$

Ainsi,

$$d_{k+2} - d_{k+1} \geq d_{k+1} - d_k.$$

Exercice 10 :

Soient E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$.

1. Montrer que l'image et le noyau de u sont supplémentaires.
2. Étudier la réciproque.

Réponse

1. Soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$.

Par hypothèse, $u(x) = 0$ et il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$.

On en déduit que $0 = u(x) = u^2(a)$, donc, $a \in \text{Ker}(u^2)$.

On sait que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$.

De plus, par le théorème du rang appliqué à u et u^2 (l'espace de départ est de dimension finie),

$$\dim(\text{Ker}(u^2)) = \dim(E) - \text{rg}(u^2) = \dim(E) - \text{rg}(u) = \dim(\text{Ker}(u)).$$

Donc, $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u)$.

On en déduit que $a \in \text{Ker}(u)$, puis, $x = u(a) = 0$.

Donc,

$$\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}.$$

D'autre part, par le théorème du rang : $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$.

Ainsi, par théorème,

$$E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u).$$

2. On suppose que $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$.

Montrons que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$.

On sait que $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $y \in \text{Im}(u)$. On a $y = u(x)$ où $x \in E$.

Par hypothèse, $x = a + b$ où $a \in \text{Ker}(u)$ et $b \in \text{Im}(u)$.

D'où, $b = u(c)$ avec $c \in E$ et $u(x) = u(a) + u(b) = u^2(c) \in \text{Im}(u^2)$.

Donc, $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^2)$.

Ainsi, $\text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$, puis,

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2).$$

Exercice 11 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit G un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $\dim(f(G)) = \dim(G) - \dim(\text{Ker}(f) \cap G)$.

Indication : considérer $g : G \rightarrow F$ la restriction au départ de f à G .

$$x \mapsto f(x)$$

2. Soit H un sous-espace vectoriel de F . Montrer que $\dim(f^{-1}(H)) = \dim(E) - \text{rg}(f) + \dim(\text{Im}(f) \cap H)$.

Réponse

1. Soit $g : G \rightarrow F$ la restriction de f à G au départ (en fait $g = f|_G$). Comme E est de dimension finie, le sous-espace vectoriel G de E est aussi de dimension finie. De plus, la linéarité de f entraîne la linéarité de g , donc le théorème du rang appliqué à g donne :

$$\dim(G) = \dim(\text{Im}(g)) + \dim(\text{Ker}(g)).$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(g) &\iff x \in G \text{ et } g(x) = 0 \\ &\iff x \in G \text{ et } f(x) = 0 \quad (\text{définition de } g) \\ &\iff x \in G \text{ et } x \in \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f) \cap G$.

De plus,

$$\text{Im}(g) = \underbrace{\{g(x) | x \in G\} = \{f(x) | x \in G\}}_{\forall x \in G, g(x) = f(x)} = f(G).$$

Ainsi,

$$\dim(G) = \dim(f(G)) + \dim(\text{Ker}(f) \cap G).$$

2. Soit $h : f^{-1}(H) \rightarrow F$ la restriction de f à $f^{-1}(H)$ au départ (en fait $h = f|_{f^{-1}(H)}$). Comme E est de dimension finie, le sous-espace vectoriel $f^{-1}(H)$ de E est aussi de dimension finie. De plus, la linéarité de f entraîne la linéarité de h , donc le théorème du rang appliqué à h donne :

$$\dim(f^{-1}(H)) = \dim(\text{Im}(h)) + \dim(\text{Ker}(h)).$$

Or,

$$\text{Im}(h) = \underbrace{\{h(x) | x \in f^{-1}(H)\} = \{f(x) | x \in f^{-1}(H)\}}_{\forall x \in f^{-1}(H), h(x) = f(x)}$$

De plus,

$$y \in \{f(x) | x \in f^{-1}(H)\} \iff \exists x \in f^{-1}(H), y = f(x) \iff y \in \text{Im}(f) \cap H.$$

D'où, $\text{Im}(h) = \text{Im}(f) \cap H$. De plus,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(h) &\iff x \in f^{-1}(H) \text{ et } h(x) = 0 \\ &\iff x \in f^{-1}(H) \text{ et } f(x) = 0 \quad (\text{définition de } h) \\ &\iff f(x) \in H \text{ et } f(x) = 0 \\ &\iff f(x) = 0 \quad (0 \in H \text{ car } H \text{ est sous-espace vectoriel de } E) \\ &\iff x \in \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f)$. Ainsi,

$$\dim(f^{-1}(H)) = \dim(\text{Im}(f) \cap H) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

Le théorème du rang appliqué à f (E est de dimension finie et f est linéaire) donne alors

$$\dim(f^{-1}(H)) = \dim(\text{Im}(f) \cap H) + \dim(E) - \text{rg}(f).$$

Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 12 :

Soient E et F des espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \text{Id}_E$.

Montrer que $\text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(u) = F$.

Réponse

Soit $x \in F$.

On procède par analyse-synthèse

Analyse : supposons qu'il existe $(y, z) \in \text{Ker}(v) \times \text{Im}(u)$ tel que $x = y + z$.

Alors, $v(x) = v(y) + v(z) = v(z)$ et il existe $a \in E$ tel que $z = u(a)$. Alors, $v(x) = v(u(a))$. Or, $v \circ u = \text{Id}_E$, donc $v(x) = a$. D'où

$z = u(a) = u(v(x))$. On en déduit alors que $y = x - z = x - u(v(x))$.

Ce qui termine l'analyse.

Synthèse : On pose $y = x - u(v(x))$ et $z = u(v(x))$.

On a bien $y + z = x$.

De plus, $v(y) = v(x) - v(u(v(x)))$. Or $v \circ u = \text{Id}_E$. D'où, $v(y) = v(x) - v(x) = 0$. Donc, $y \in \text{Ker}(v)$.

On a clairement $z \in \text{Im}(u)$.

Ce qui termine la synthèse.

Ainsi, pour tout $x \in F$, il existe un unique couple $(y, z) \in \text{Ker}(v) \times \text{Im}(u)$ tel que $x = y + z$. Donc,

$$\text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(u) = F.$$

Exercice 13 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On considère f et g deux endomorphismes de E . On suppose que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ et que $f(\text{Im}(g)) = \text{Im}(f)$.

Réponse

► Montrons que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

Soit $x \in E$.

On procède par analyse-synthèse

Analyse : supposons qu'il existe $(y, z) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(g)$ tel que $x = y + z$.

On a alors, $f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$ et il existe $a \in E$ tel que $z = g(a)$. D'où, $f(x) = f(g(a))$. Donc, en utilisant que $g \circ f \circ g = g$,

on a : $g(f(x)) = g(f(g(a))) = g(a) = z$. Donc, $z = g(f(x))$. Puis $y = x - z = x - g(f(x))$.

Ce qui termine l'analyse.

Synthèse : On pose $y = x - g(f(x))$ et $z = g(f(x))$.

On a bien $y + z = x$.

De plus, $f(y) = f(x) - f(g(f(x)))$. Or, $f \circ g \circ f = f$, d'où $f(y) = 0_E$. Donc $y \in \text{Ker}(f)$.

On a clairement $z = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$.

Ce qui termine la synthèse.

Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(g)$ tel que $x = y + z$. Donc,

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g).$$

► Montrons que : $f(\text{Im}(g)) = \text{Im}(f)$.

($\subset$) Soit $y \in f(\operatorname{Im}(g))$.

Il existe $x \in \operatorname{Im}(g)$ tel que $y = f(x)$. Donc, $y \in \operatorname{Im}(f)$, puis, $f(\operatorname{Im}(g)) \subset \operatorname{Im}(f)$.

($\supset$) Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$.

Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Or, $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$, donc, $x = a + b$ où $a \in \operatorname{Ker}(f)$ et $b \in \operatorname{Im}(g)$.

Donc, $y = f(b) \in f(\operatorname{Im}(g))$, puis, $f(\operatorname{Im}(g)) \supset \operatorname{Im}(f)$.

Ainsi,

$$f(\operatorname{Im}(g)) = \operatorname{Im}(f).$$

Exercice 14 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u^2 + 2u$. Montrer que :

$$E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E).$$

Réponse

Soit $x \in E$.

On procède par analyse-synthèse.

► *Analyse* : supposons qu'il existe $(y, z, t) \in \operatorname{Ker}(u) \times \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E) \times \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E)$ tel que $x = y + z + t$.

On a alors, $u(y) = 0$, $u(z) = -z$ et $u(t) = 2t$. Par linéarité de u , on en déduit que : $u(x) = 0 - z + 2t = -z + 2t$

De même, on a : $u^2(x) = -u(z) + 2u(t) = z + 4t$

On a alors le système

$$\begin{cases} y + z + t = x \\ -z + 2t = u(x) \\ z + 4t = u^2(x) \end{cases}$$

En sommant les deux dernières équations, on trouve : $t = \frac{1}{6} \cdot (u(x) + u^2(x))$.

La dernière équation donne alors : $z = u^2(x) - 4t = \frac{1}{3} \cdot (u^2(x) - 2u(x))$.

Puis, la première équation donne : $y = x - z - t = \frac{1}{2} \cdot (2x + u(x) - u^2(x))$.

Ce qui termine l'analyse.

Si la décomposition de x dans la somme $\operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E) + \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E)$ existe alors elle est unique : ceci montre que la somme est directe

► *Synthèse* : On pose $y = x - z - t = \frac{1}{2} \cdot (2x + u(x) - u^2(x))$, $z = u^2(x) - 4t = \frac{1}{3} \cdot (u^2(x) - 2u(x))$ et $t = \frac{1}{6} \cdot (u(x) + u^2(x))$.

On vérifie maintenant les 4 conditions :

$$\begin{cases} x = y + z + t \\ y \in \operatorname{Ker}(u) \\ z \in \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E) \\ t \in \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E) \end{cases}$$

On a bien :

$$y + z + t = \frac{1}{2} \cdot (2x + u(x) - u^2(x)) + \frac{1}{3} \cdot (u^2(x) - 2u(x)) + \frac{1}{6} \cdot (u(x) + u^2(x)) = x.$$

De plus, comme $u^3 = u^2 + 2u$, on a :

$$u(y) = \frac{1}{2} \cdot (2u(x) + u^2(x) - u^3(x)) = \frac{1}{2} \cdot (2u(x) + u^2(x) - u^2(x) - 2u(x)) = 0$$

Donc, $y \in \operatorname{Ker}(u)$.

De même,

$$u(z) = \frac{1}{3} \cdot (u^3(x) - 2u^2(x)) = \frac{1}{3} \cdot (u^2(x) + 2u(x) - 2u^2(x)) = \frac{1}{3} \cdot (2u(x) - u^2(x)) = -z$$

Donc, $z \in \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E)$.

De même,

$$u(t) = \frac{1}{6} \cdot (u^2(x) + u^3(x)) = \frac{1}{6} \cdot (u^2(x) + u^2(x) + 2u(x)) = \frac{1}{3} \cdot (u(x) + u^2(x)) = 2t$$

Donc, $t \in \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$.

Ce qui termine la synthèse.

En se servant des expressions trouvées dans l'analyse, on montre que x peut bien se décomposer dans la somme $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(u + \text{Id}_E) + \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$: ceci montre que $E = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(u + \text{Id}_E) + \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$.

Ainsi,

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E).$$

Remarque : Si E est de dimension finie, alors en prenant $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ une base adaptée à la décomposition $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{\dim(\text{Ker}(u)) \text{ fois}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\dim(\text{Ker}(u + \text{Id}_E)) \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\dim(\text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)) \text{ fois}})$$

On dira plus tard que u est diagonalisable.

Pour les 5/2 (pour l'instant !) : on pouvait déjà dire que u était diagonalisable sans calcul car par hypothèse le polynôme $X^3 - X^2 - 2X = X \times (X + 1) \times (X - 2)$ est annulateur de u et est scindé à racines simples (notez cependant que le spectre de u n'est pas nécessairement $\{0, -1, 2\}$: cela dépend de la dimension des noyaux $\text{Ker}(u)$, $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$).

Projecteurs et symétries

Exercice 15 :

On pose $E = \mathbb{R}^n$ et on considère $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $D = \text{Vect}((1, \dots, 1))$.

1. Montrer que H et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
2. Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Déterminer le projeté de u sur H parallèlement à D et le projeté de u sur D parallèlement à H .

Réponse

1. ► D est un sous-espace vectoriel de E comme espace vectoriel engendré par la famille $((1, \dots, 1))$. C'est une droite vectorielle.

► Montrons que H est un sous-espace vectoriel de E .

Méthode 1 : à partir de la caractérisation des sous-espaces vectoriels. On a bien $H \subset E$ et $(0, \dots, 0) \in H$ ($0 + \dots + 0 = 0$).

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_1, \dots, x_n) \in H$ et $(y_1, \dots, y_n) \in H$. Alors, $\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$. De plus, par définition de H ,

$$(\lambda x_1 + y_1) + \dots + (\lambda x_n + y_n) = \lambda \times \underbrace{(x_1 + \dots + x_n)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + \dots + y_n)}_{=0} = 0$$

Donc, $\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \in H$. Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de E .

Méthode 2 : H est le noyau d'une forme linéaire. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$. Montrons que l'application f est linéaire : soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_1, \dots, x_n) \in H$ et $(y_1, \dots, y_n) \in H$. Alors, $\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$. D'où,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) &= (\lambda x_1 + y_1) + \dots + (\lambda x_n + y_n) \\ &= \lambda \times (x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n) \\ &= \lambda \times f(x_1, \dots, x_n) + f(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. De plus, on a $H = \text{Ker}(f)$. Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de E .

► Montrons que H et D sont supplémentaires.

Méthode 1 (suite) : On montre par analyse-synthèse que tout vecteur u de E peut se décomposer de manière unique sous la forme $u = v + w$ avec $v \in H$ et $w \in D$. L'unicité de la décomposition montre que la somme $H + D$ est directe et l'existence de la décomposition montre que $E = H + D$.

Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in E$. On procède par analyse-synthèse.

Analyse^a : on suppose qu'il existe $v = (y_1, \dots, y_n) \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) + \lambda.(1, \dots, 1)$.

Alors,

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + \lambda \\ \vdots & \\ x_n &= y_n + \lambda \end{cases}$$

De plus, on sait que $y_1 + \dots + y_n = 0$. Donc, en sommant les égalités du système précédent, on a :

$$x_1 + \dots + x_n = n \times \lambda. \text{ D'où, } \lambda = \frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n), \text{ puis, } (y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n).(1, \dots, 1).$$

Synthèse : On pose $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n).(1, \dots, 1)$ et $(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n).(1, \dots, 1)$.

On a bien $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)$ et $(z_1, \dots, z_n) \in D$. De plus,

$$y_1 + \dots + y_n = x_1 - \frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n) + \dots + x_n - \frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n) = x_1 + \dots + x_n - (x_1 + \dots + x_n) = 0.$$

donc, $(y_1, \dots, y_n) \in H$.

Ainsi, on a montré par analyse synthèse que

$$E = H \oplus D.$$

Méthode 2 (suite) : on utilise les dimensions.

On a montré que H est le noyau de la forme linéaire non nulle f (par exemple $f(1, 0, \dots, 0) \neq 0$), donc H est un hyperplan de E et $\dim(H) = \dim(E) - 1 = n - 1$.

De plus, D est une droite vectorielle, donc $\dim(D) = 1$.

D'où, $\dim(E) = \dim(H) + \dim(D)$.

Donc, pour montrer que H et D sont supplémentaires dans E , il suffit de montrer que $H \cap D = \{(0, \dots, 0)\}$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in H \cap D$. Par définition de D , $x_1 = \dots = x_n$, d'où, par définition de H , $0 = x_1 + \dots + x_n = n \times x_1$. D'où, $x_1 = \dots = x_n = 0$. Donc, $H \cap D = \{(0, \dots, 0)\}$.

Ainsi,

$$E = H \oplus D.$$

2. Méthode 1 (suite) : il suffit d'utiliser la décomposition trouvée dans l'analyse-synthèse.

Le projeté de u sur H parallèlement à D est

$$(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n).(1, \dots, 1).$$

Le projeté de u sur D parallèlement à H est

$$\frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n).(1, \dots, 1).$$

Méthode 2 (suite) : on utilise l'existence de la décomposition de $(x_1, \dots, x_n)$

On sait que $E = H \oplus D$, donc $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) + \lambda.(1, \dots, 1)$ avec $(y_1, \dots, y_n) \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Par définition de projection, le projeté de u sur H parallèlement à D est $(y_1, \dots, y_n)$. De plus, on a $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) - \lambda.(1, \dots, 1) \in H$. Or $(y_1, \dots, y_n) \in H$, donc, $0 = y_1 + \dots + y_n = x_1 + \dots + x_n - n \times \lambda$.

D'où, $\lambda = \frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n)$. On retrouve que le projeté de u sur H parallèlement à D est

$$(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n).(1, \dots, 1),$$

et que le projeté de u sur D parallèlement à H est

$$\frac{1}{n} \times (x_1 + \dots + x_n).(1, \dots, 1).$$

^a. On a $D = \text{Vect}((1, \dots, 1))$. les vecteurs de D sont donc colinéaires à $(1, \dots, 1)$, c'est pourquoi on cherche w sous la forme $\lambda.(1, \dots, 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient p et q deux endomorphismes de E tels que $p + q = \text{Id}_E$ et $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq \dim(E)$.

1. Montrer que $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) = \dim(E)$.
2. Montrer que $\dim(\text{Ker}(p)) = \text{rg}(q)$.
3. Montrer que $\text{Ker}(p) = \text{Im}(q)$.
4. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Réponse

1. On sait que $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. D'où, $\text{rg}(p + q) \leq \dim(\text{Im}(p) + \text{Im}(q))$.
Or $p + q = \text{Id}_E$ est une surjection de E sur E donc $\text{rg}(p + q) = \dim(E)$. D'où, $\dim(E) \leq \dim(\text{Im}(p) + \text{Im}(q))$.
De plus, par la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(E) \leq \dim(\text{Im}(p) + \text{Im}(q)) \leq \text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq \dim(E).$$

Ainsi,

$$\text{rg}(p) + \text{rg}(q) = \dim(E).$$

2. On sait que E est de dimension finie et p est linéaire, donc par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(p)) = \dim(E) - \text{rg}(p).$$

D'où, en appliquant la première question,

$$\dim(\text{Ker}(p)) = \dim(E) - \text{rg}(p + q) + \text{rg}(q).$$

Or, on a vu que $\dim(E) = \text{rg}(p + q)$ (car $p + q = \text{Id}_E$). Donc,

$$\dim(\text{Ker}(p)) = \text{rg}(q).$$

3. Soit $x \in \text{Ker}(p)$. On a alors $p(x) = 0$. Or, $\text{Id}_E = p + q$, donc $x = p(x) + q(x) = q(x) \in \text{Im}(q)$. Donc, $\text{Ker}(p) \subset \text{Im}(q)$.
De plus, par la question 2, $\dim(\text{Ker}(p)) = \text{rg}(q) = \dim(\text{Im}(q))$.
Donc,

$$\text{Ker}(p) = \text{Im}(q)$$

4. On sait que $p + q = \text{Id}_E$. D'où, $p \circ (p + q) = p$. Par linéarité de p , on a $p \circ p + p \circ q = p$. Or $\text{Ker}(p) = \text{Im}(q)$, donc $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $p \circ p = p$. Ainsi

$$p \text{ est un projecteur.}$$

De plus, on a $q = \text{Id}_E - p$. Donc, par linéarité de p et Id_E , on a :

$$q \circ q = (\text{Id}_E - p) \circ (\text{Id}_E - p) = \text{Id}_E - p - p + p \circ p.$$

Comme p est un projecteur, on a $q \circ q = \text{Id}_E - p = q$. Ainsi

$$q \text{ est un projecteur.}$$

Exercice 17 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur, si et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que dans ce cas $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Réponse

1. ($\Rightarrow$) On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$.

On a :

$$(p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p^2 + q^2.$$

Comme p et q sont des projecteurs, $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

Donc,

$$(p+q) \circ (p+q) = p+q,$$

et

$p+q$ est un projecteur.

($\Leftarrow$) On suppose que $p+q$ est un projecteur.

D'une part, on a $(p+q) \circ (p+q) = p+q$ et d'autre part, comme p et q sont des projecteurs

$$(p+q) \circ (p+q) = p + p \circ q + q \circ p + q.$$

Donc,

$$p+q = p + p \circ q + q \circ p + q.$$

D'où, en simplifiant par p et q , il vient : $p \circ q + q \circ p = 0$.

En composant à gauche et à droite par p l'égalité précédente, on a :

$$p \circ (p \circ q + q \circ p) \circ p = p \circ 0 \circ p.$$

Donc,

$$0 = p \circ 0 \circ p = p \circ (p \circ q + q \circ p) \circ p = p^2 \circ q \circ p + p \circ q \circ p^2.$$

Comme p est un projecteur : $2p \circ q \circ p = 0$.

De plus, de l'égalité $p \circ q + q \circ p = 0$, on déduit que $p \circ q = -q \circ p$, donc,

$$0 = 2p \circ q \circ p = -2q \circ p \circ p.$$

Comme p est un projecteur, $-2q \circ p = 0$ Donc,

$$q \circ p = 0 \text{ et } p \circ q = -q \circ p = 0.$$

2. On suppose que $p+q$ est un projecteur (et donc, par **Q1**, que $p \circ q = q \circ p = 0$).

Montrons que $\text{Im}(p+q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

Soit $y \in \text{Im}(p+q)$.

Analyse.

On suppose qu'il existe $a \in \text{Im}(p)$ et $b \in \text{Im}(q)$ tels que $y = a + b$.

On a alors $p(y) = p(a) + p(b)$.

Or, p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Donc, comme $a \in \text{Im}(p)$, $p(a) = a$.

De plus, comme $b \in \text{Im}(q)$, on a $b = q(x)$ où $x \in E$.

D'où, $p(b) = p \circ q(x) = 0$.

Donc, $a = p(y)$, puis, $b = y - a = y - p(y)$.

Synthèse.

On note $a = p(y)$ et $b = y - p(y)$.

On a bien $y = a + b$ et $a \in \text{Im}(p)$.

Montrons que $b \in \text{Im}(q)$.

Comme q est un projecteur, on sait que $\text{Im}(q) = \text{Ker}(q - \text{id}_E)$. On montre donc que $y \in \text{Ker}(q - \text{id}_E)$.

On a :

$$(q - \text{id}_E)(b) = q(b) - b = q(y) - q \circ p(y) - y + p(y).$$

Comme $q \circ p = 0$, on a $q \circ p(y) = 0$. Donc,

$$(q - \text{id}_E)(b) = q(y) - y + p(y) = (p+q)(y) - y.$$

Or, $y \in \text{Im}(p+q)$ et $p+q$ est la projection sur $\text{Im}(p+q)$ parallèlement à $\text{Ker}(p+q)$, donc, $(p+q)(y) = y$.
Donc, $(q - \text{id}_E)(b) = 0$, puis, $b \in \text{Im}(q)$.

Ainsi,

$$\text{Im}(p+q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q).$$

► Montrons que $\text{Ker}(p+q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

On a déjà montré l'inclusion $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p+q)$ dans un autre exercice.

Montrons l'autre réciproque. Soit $x \in \text{Ker}(p+q)$. Montrons que $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

On sait que $(p+q)(x) = 0$, donc, $p(x) = -q(x)$.

En composant par p , on a $p^2(x) = -p \circ q(x)$.

Or, p est un projecteur et $p \circ q = 0$.

Donc, $p(x) = 0$, puis, $q(x) = -p(x) = 0$.

Donc, $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$, puis, $\text{Ker}(p+q) \subset \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Ainsi,

$$\text{Ker}(p+q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q).$$

Hyperplans

Exercice 18 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et G un sous-espace vectoriel de dimension p de E . Montrer que G est l'intersection de $n-p$ hyperplans de E .

Réponse

► Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de G qu'on complète en $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, on considère φ_k l'unique forme linéaire sur E vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_k(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Les $n-p$ formes linéaires $\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n$ sont non nulles car pour tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $\varphi_k(e_k) = 1 \neq 0$

D'où, pour tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $\text{Ker}(\varphi_k)$ est un hyperplan de E .

Remarque 1 : on utilise ici que pour définir une application linéaire, il suffit de la définir sur les vecteurs d'une base de E .

Remarque 2 : φ_k est en fait la forme linéaire qui à tout x de E associe sa k -ème coordonnée dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

► Montrons que $G = \bigcap_{k=p+1}^n \text{Ker}(\varphi_k)$.

Soit $x \in E$ qu'on décompose dans la base $(e_1, \dots, e_n)$: il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (unique) tel que $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n$.

On a alors l'équivalence : $x \in G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ si, et seulement si, $x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_n = 0$

Or, par construction, pour tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, on a $\varphi_{p+1}(x) = x_{p+1}$, $\varphi_{p+2}(x) = x_{p+2}$, ..., $\varphi_n(x) = x_n$.

Donc, $x \in G$ si, et seulement si, $x \in \text{Ker}(\varphi_{p+1})$ et $x \in \text{Ker}(\varphi_{p+2})$ et ... et $x \in \text{Ker}(\varphi_n)$.

On a donc montré que $G = \bigcap_{k=p+1}^n H_k$.

Exercice 19 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Montrer que pour tout vecteur x non nul de E , il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(x) = 1$.
2. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Montrer que l'application $E \rightarrow \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme.

$$x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

3. En déduire qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

Réponse

1. Si $x \neq 0$, alors la famille (x) est libre et on peut la compléter en une base $(x, e_2, \dots, e_n)$ de E .

Or, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image qu'elle donne aux vecteurs d'une base de E .

On peut donc définir $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $\varphi(x) = 1$ et $\varphi(e_2) = \dots = \varphi(e_n) = 0$.

Autre méthode : soit H un hyperplan de E ne contenant pas x , on a alors $E = H \oplus \text{Vect}(x)$. Or, une application linéaire est entièrement déterminée par son expression sur H et son expression sur $\text{Vect}(x)$. Reste à choisir φ correctement.

2. On note ψ l'application de l'énoncé.

► On vérifie la linéarité de ψ .

► Soit $x \in E$ tel que $\psi(x) = 0$.

On a alors, $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0$.

Par l'absurde, on suppose que $x \neq 0$. Par la première question, il existe φ une forme linéaire de E telle que $\varphi(x) = 1$.

Or, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Donc, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \varphi_i$.

En évaluant en x , il vient $1 = 0$. Contradiction.

Donc, $x = 0$.

Donc,

$$\text{Ker}(\psi) = \{0\}.$$

Donc, ψ est injective.

Or, ψ est une application linéaire entre deux espaces **de même dimension finie** :

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(K) = \dim(E) = n.$$

Par théorème,

ψ est un isomorphisme.

Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective. Pour cela, on montre que si $\psi(x) = 0$ alors $x = 0$ (par l'absurde, on suppose $x \neq 0$ et en utilisant la base donnée de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et la question 1, on aboutit à une contradiction).

3. On considère $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Comme ψ est un isomorphisme, ψ^{-1} aussi.

On en déduit que la famille $(\psi^{-1}(\varepsilon_1), \dots, \psi^{-1}(\varepsilon_n))$ est une base de E .

On note, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_j = \psi^{-1}(\varepsilon_j)$.

En utilisant la relation $\psi(e_j) = \varepsilon_j$, la définition de ψ et que ε_j est le j -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a $\varphi_i(e_j) = 0$ si $i \neq j$ et $\varphi_i(e_j) = 1$ si $i = j$.

Compléments sur les espaces vectoriels – Exercices supplémentaires

Famille de vecteurs

Exercice 20 :

On note $E = \mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (3, 2, 1)$. On pose $\mathcal{F} = (u, v, w)$.

- Déterminer une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
- On pose $G = \{(x, y, z) \in E \mid x - 2y + z = 0\}$. Déterminer une base de G et montrer que $G = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Exercice 21 : CCINP 2023

- Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.
- Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Réponse

- Voir le cours.
- Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot f_k = \tilde{0}$ où $\tilde{0}$ est la fonction nulle.

On dérive l'égalité précédente $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ fois : $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot f_k^{(p)} = \tilde{0}$.

Or, $f_k^{(p)} = k^p f_k$. Donc, $\sum_{k=1}^n \lambda_k \times k^p \cdot f_k^{(p)} = \tilde{0}$.

En évaluant en 0, il vient :

$$(S) : \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \times 2 + \dots + \lambda_n \times n & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \times 2^2 + \dots + \lambda_n \times n^2 & = 0 \\ \vdots & \\ \lambda_1 + \lambda_2 \times 2^{n-1} + \dots + \lambda_n \times n^{n-1} & = 0. \end{cases}$$

La matrice du système est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \\ 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que $\det(M)$ est le déterminant de Vandermonde associé aux scalaires deux à deux distincts $1, 2, \dots, n$.

Par théorème, $\det(M) \neq 0$. Donc, (S) possède une unique solution. Le n -uplet nul est clairement solution, donc, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Donc,

$(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre.

Exercice 22 :

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f = \sin$. La famille $(f, f \circ f, f \circ f \circ f)$ est-elle libre ?

Réponse

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot f \circ f + \lambda_3 \cdot f \circ f \circ f = 0$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \times \sin(x) + \lambda_2 \times \sin(\sin(x)) + \lambda_3 \times \sin(\sin(\sin(x))) = 0$$

On détermine les développements limités des fonctions f , $f \circ f$ et $f \circ f \circ f$ en 0 (à l'ordre 5). On a (après calculs) :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ \sin(\sin(x)) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5) \\ \sin(\sin(\sin(x))) &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{11x^5}{40} + o(x^5).\end{aligned}$$

Donc,

$$\lambda_1 \times \sin(x) + \lambda_2 \times \sin(\sin(x)) + \lambda_3 \times \sin(\sin(\sin(x))) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x - \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3}{6}x^3 + \frac{\lambda_1 + 12\lambda_2 + 33\lambda_3}{120}x^5 + o(x^5).$$

De plus, $\lambda_1.f + \lambda_2.f \circ f + \lambda_3.f \circ f \circ f$ est la fonction nulle donc

$$\lambda_1 \times \sin(x) + \lambda_2 \times \sin(\sin(x)) + \lambda_3 \times \sin(\sin(\sin(x))) = o(x^5).$$

Par unicité du développement limité quand il existe, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 12\lambda_2 + 33\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc,

la famille $(f, f \circ f, f \circ f \circ f)$ est libre.

Espaces vectoriels de polynômes

Exercice 23 :

On pose $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$P_k = \frac{X \times (X-1) \times \cdots \times (X-k+1)}{k!}.$$

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que, pour tous $l \in \mathbb{Z}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k(l) \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $P(l) \in \mathbb{Z}$.

Réponse

1. On remarque que $\deg(P_0) = 0$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, P_k est un produit de k polynômes de degré 1, donc, $\deg(P_k) = k$.
La famille de polynômes non nuls $(P_0, \dots, P_n)$ est échelonnée en degré, donc, par théorème, $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre.
De plus, cette famille est composée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$.
Par théorème,

$(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

(a) Soit $l \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $P_k(l) = 0 \in \mathbb{Z}$.

(b) Soit $l \geq k$, $P_k(l) = \frac{l \times (l-1) \times \cdots \times (l-k+1)}{k!} = \frac{l!}{k! \times (l-k)!} = \binom{l}{k} \in \mathbb{Z}$.

(c) Soit $l < 0$,

$$P_k(l) = \frac{l \times (l-1) \times \cdots \times (l-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-l) \times (-l+1) \times \cdots \times (-l+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-l+k-1)!}{k! \times (-l-1)!} = (-1)^k \binom{-l+k-1}{k} \in \mathbb{Z}.$$

Donc, dans les trois cas,

$$P_k(l) \in \mathbb{Z}.$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $P(l) \in \mathbb{Z}$.

On décompose P dans la base $(P_0, \dots, P_n)$:

$$P = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot P_k.$$

Soit $l \in [0, n]$, on a $P(l) = \alpha_0 \cdot P_0(l) + \cdots + \alpha_l \cdot P_l(l)$.

- Pour $l = 0$, on a $\alpha_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$.
- Pour $l = 1$, on a $\alpha_1 = P(1) - \alpha_0 \cdot P_0(1) \in \mathbb{Z}$.
- ...
- Pour $l = n$, on a $\alpha_n \cdot P_n(n) = P(n) - (\alpha_0 \cdot P_0(n) + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot P_{n-1}(n)) \in \mathbb{Z}$. Comme $P_n(n) = 1$ (voir **Q1**), $\alpha_n \in \mathbb{Z}$.

Donc, P est une combinaison linéaire de $(P_0, \dots, P_n)$ à coefficients entiers.

Réciproquement, on suppose que P est une combinaison linéaire de $(P_0, \dots, P_n)$ à coefficients entiers :

$$P = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot P_k$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{Z}$.

Soit $l \in \mathbb{Z}$, on a :

$$P(l) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\alpha_k}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{P_k(l)}_{\in \mathbb{Z} \text{ (Q1)}} \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, les polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $P(l) \in \mathbb{Z}$, sont les polynômes qui sont combinaisons linéaires de $(P_0, \dots, P_n)$ à coefficients entiers.

Exercice 24 :

On pose

$$E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid (X^4 + 1) \times P(X) = P(X^2)\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit $P \in E \setminus \{0\}$. Déterminer le degré de P .
3. Donner un polynôme non nul appartenant à E .
4. Déterminer la dimension de E .

Réponse

1. On a $E \subset \mathbb{C}[X]$.

De plus, $(X^4 + 1) \times 0 = 0$. Donc, $0 \in E$.

Soient $(P, Q) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$(X^4 + 1) \times (\lambda \cdot P + Q)(X) = \lambda \cdot (X^4 + 1) \times P(X) + (X^4 + 1) \times Q(X) = \lambda \cdot P(X^2) + Q(X^2) = (\lambda \cdot P + Q)(X^2).$$

Donc, $\lambda \cdot P + Q \in E$.

Ainsi,

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

2. On a :

$$\deg((X^4 + 1) \times P(X)) = 4 + \deg(P(X)) \quad \text{et} \quad \deg(P(X^2)) = 2\deg(P(X)).$$

Donc,

$$4 + \deg(P(X)) = 2\deg(P(X)).$$

Ainsi,

$$\deg(P(X)) = 4.$$

3. $X^4 - 1$ convient.

4. Soit $P(X) = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + a_4.X^4 \in \mathbb{C}_4[X]$. On a :

$$(X^4 + 1) \times P(X) = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + (a_4 + a_0).X^4 + a_1.X^5 + a_2.X^6 + a_3.X^7 + a_4.X^8,$$

et

$$P(X^2) = a_0 + a_1.X^2 + a_2.X^4 + a_3.X^6 + a_4.X^8.$$

Donc,

$$P \in E \iff a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{ et } a_0 = -a_4 \iff P(X) = a_4 \times (X^4 - 1).$$

Donc,

$$E = \text{Vect}(X^4 - 1).$$

La famille $(X^4 - 1)$ engendre E et est libre (car composée d'un seul vecteur non nul).

Ainsi,

$$(X^4 - 1) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = 1.$$

Applications linéaires

Exercice 25 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{rg}(u + v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \iff \begin{cases} \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\} \\ \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = E. \end{cases}$$

Réponse

($\Rightarrow$) Supposons que $\text{rg}(u + v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.

► Par la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)) - \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v) - \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v))$$

Or $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$, donc $\text{rg}(u + v) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v))$. D'où,

$$\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v) - \text{rg}(u + v) = 0.$$

Donc, $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\}}$.

► De même, par la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(v)) - \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)).$$

Or $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u + v)$, donc $\dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)) \leq \dim(\text{Ker}(u + v))$. D'où,

$$\dim(\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)) \geq \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(v)) - \dim(\text{Ker}(u + v)).$$

Comme E est de dimension finie et que les applications u , v et $u + v$ sont linéaires, par le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)) \geq \dim(E) - \text{rg}(u) + \dim(E) - \text{rg}(v) - \dim(E) + \text{rg}(u + v) = \dim(E).$$

Donc, $\dim(\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)) = \dim(E)$. Ainsi, $\boxed{\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = E}$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, on suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\}$ et $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = E$.

► En appliquant la formule de Grassmann comme précédemment, on a :

$$0 = \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v) - \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)).$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\text{Im}(u) + \text{Im}(v) = \text{Im}(u + v)$.

On connaît l'inclusion $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. On montre l'autre inclusion.

Soit $x \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. Il existe donc $y \in E$ et $z \in E$ tel que $x = u(y) + v(z)$.

Or $E = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$. Donc il existe $(a, b) \in \text{Ker}(u) \times \text{Ker}(v)$ et $(c, d) \in \text{Ker}(u) \times \text{Ker}(v)$ tel que $y = a + b$ et $z = c + d$. D'où,

$$x = u(y) + v(z) = u(a) + u(b) + v(c) + v(d) = u(b) + v(c).$$

Or, $u(c) = 0$ et $v(b) = 0$. D'où,

$$x = u(b) + v(c) = u(b + c) + v(b + c) = (u + v)(b + c) \in \text{Im}(u + v).$$

Donc, $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. Ainsi,

$$\boxed{0 = \text{rg}(u) + \text{rg}(v) - \text{rg}(u + v)}.$$

Ainsi,

$$\text{rg}(u + v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \iff \begin{cases} \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\} \\ \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = E. \end{cases}$$

Exercice 26 :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $g : \text{Im}(f) \rightarrow E$
 $x \mapsto f(x)$.

1. Montrer que $\text{Im}(g) = \text{Im}(f^2)$ et que $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.
2. En déduire que $\dim(\text{Ker}f) \leq \dim(\text{Ker}f^2) \leq 2\dim(\text{Ker}f)$.

Réponse

1. Montrons que $\text{Im}(g) = \text{Im}(f^2)$.

($\subset$) Soit $y \in \text{Im}(g)$. On a $y = g(x) = f(x)$ où $x \in \text{Im}(f)$.

De plus, il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$, donc, $y = f^2(a) \in \text{Im}(f^2)$.

($\supset$) Soit $y \in \text{Im}(f^2)$. Il existe $a \in E$ tel que $y = f^2(a)$.

On note $b = f(a) \in \text{Im}(f)$. On a $y = f(b) = g(b) \in \text{Im}(g)$.

Donc,

$$\text{Im}(g) = \text{Im}(f^2).$$

Montrons que $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.

($\subset$) Soit $x \in \text{Ker}(g)$.

L'ensemble de départ de g est $\text{Im}(f)$, donc $x \in \text{Im}(f)$.

Par définition du noyau $g(x) = 0$.

De plus, par définition de g , $g(x) = f(x)$.

Donc, $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.

($\supset$) Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.

Par définition de g , $g(x) = f(x)$, et par définition du noyau, $g(x) = 0$.

Donc, $x \in \text{Ker}(g)$.

Donc,

$$\text{Ker}(g) = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f).$$

2. On sait que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$, donc,

$$\dim(\text{Ker}f) \leq \dim(\text{Ker}f^2).$$

De plus, par le théorème du rang appliqué à f^2 (l'espace de départ est de dimension finie),

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(E) - \text{rg}(f^2) = \dim(E) - \text{rg}(g).$$

On applique le théorème du rang à g (*attention à l'espace de départ !*) :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(g) + \dim(\text{Ker}(g)).$$

Donc,

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(E) - \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(g)).$$

Par le théorème du rang appliqué à f et **Q1**,

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)).$$

Or, $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Donc,

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f)).$$

Sommes directes, projecteurs et symétries

Exercice 27 :

On pose $E = \mathbb{C}^3$ et on considère $H = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2z = 0\}$ et $D = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

1. Montrer que H et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
2. Soit $(x, y, z) \in E$. Déterminer le projeté de (x, y, z) sur H parallèlement à D et le projeté de (x, y, z) sur D parallèlement à H .
3. Déterminer la symétrie s par rapport à H parallèlement à D .

Réponse

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On suppose qu'il existe $(a, b, c) \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $u = (a, b, c) + \lambda(1, 1, 1)$.

En identifiant les coefficients, on a :

$$\begin{cases} a + \lambda = x & (\text{L}_1) \\ b + \lambda = y & (\text{L}_2) \\ c + \lambda = z & (\text{L}_3) \end{cases}$$

L'opération $\text{L}_1 + 2\text{L}_3$ donne $3\lambda = x + 2z$. Donc, $\lambda = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z$.

Puis,

$$a = x - \lambda = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}z, \quad b = y - \lambda = -\frac{1}{3}x + y - \frac{2}{3}z \quad \text{et} \quad c = z - \lambda = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z.$$

Synthèse.

On pose $v = \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}x + y - \frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z\right)$ et $w = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z\right) \cdot (1, 1, 1)$.

On a :

- $v + w = (x, y, z) = u$,
- $w \in D$,
- $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}z + 2 \times \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z\right) = 0$, donc, $v \in H$.

Donc,

H et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

2. Par définition, le projeté de (x, y, z) sur H parallèlement à D est :

$$\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}x + y - \frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z\right),$$

et le projeté de (x, y, z) sur D parallèlement à H est :

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z\right) \cdot (1, 1, 1).$$

3. Par définition,

$$s(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}x + y - \frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z\right) - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z\right) \cdot (1, 1, 1).$$

Exercice 28 :

- On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$, $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.
- On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P(-1) = P(0) = 0\}$ et $H = \{P \in E \mid P(-1) = P(1) = 0\}$. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Réponse

- Montrons que la somme $F + G$ est directe. Soit $(P, Q) \in F \times G$ tel que $P + Q = 0$. On évalue en 0 et comme $Q \in G$, on trouve $P(0) = 0$. Or $P \in F$, donc 0 et 1 sont racines de P qui est de degré au plus 1. Donc $P = 0$. Il vient ensuite $0 = P + Q = Q$.

Donc, la somme $F + G$ est directe.

► On sait que $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E et $\dim(E) = 2$, donc $\dim(F \oplus G) \leq 2$.

De plus, le polynôme non nul X appartient à G donc $\dim(G) \geq 1$. De même $X - 1 \in F$, donc $\dim(F) \geq 1$. Or, comme la somme $F + G$ est directe, on a $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) \geq 2$. Ainsi $\dim(F \oplus G) = 2$. Donc, comme on a l'inclusion $F \oplus G \subset E$, on a :

$$E = F \oplus G.$$

- Fait en classe.

Exercice 29 :

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x)\}$. On pose, pour tout $f \in E$, $u(f) = f''$

- Montrer que E est un espace vectoriel et que u est un endomorphisme de E .
- Déterminer $\text{Ker}(u)$.
- Déterminer les vecteurs $f \in E$ tels que $u(f) = \sin$.
- Déterminer les vecteurs $f \in E$ tels que $u(f) = \sin^2$.
- Déterminer $\text{Im}(u)$.
- Montrer que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

Réponse

- On a $E \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la fonction nulle est dans E . Soient $(f, g) \in E \times E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a $\lambda.f + g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda.f + g)(x + 2\pi) = \lambda \times f(x + 2\pi) + g(x + 2\pi) = \lambda \times f(x) + g(x) = (\lambda.f + g)(x).$$

Donc, $\lambda.f + g \in E$. Ainsi,

E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'est donc un espace vectoriel.

La linéarité de la dérivation, entraîne la linéarité de u :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (f, g) \in E \times E, u(\lambda.f + g) = (\lambda.f + g)'' = \lambda.f'' + g'' = \lambda.u(f) + u(g).$$

Soit $f \in E$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc f'' aussi. De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$. En dérivant deux fois, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x + 2\pi) = f''(x)$. Donc $u(f) = f'' \in E$. Ainsi,

u est un endomorphisme de E .

Remarque : E est l'ensemble des applications 2π -périodiques de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Soit $f \in \text{Ker}(u)$, alors $f'' = 0$. On primitive deux fois : il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a \times x + b$. De plus, la fonction f est 2π -périodique, donc $a = 0$. Donc f est constante.

Réciproquement, si f est constante, alors $f \in E$ et $f'' = 0$, donc $f \in \text{Ker}(u)$.

Le noyau de u est l'ensemble des applications constantes.

3. Primitiver deux fois $\sin$ et ne conserver que les primitives 2π -périodiques.
 4. Primitiver deux fois $\sin^2$ (linéariser!) et ne conserver que les primitives 2π -périodiques. *Il n'y a pas de solution.*
 5. Soit $g \in \text{Im}(u)$. Il existe $f \in E$ tel que $u(f) = g$. Alors $f'' = g$. La fonction g vérifie

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} f''(t) dt = f'(2\pi) - f'(0).$$

Or f est 2π -périodique, donc f' aussi. D'où $\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0$. On en déduit que

$$\text{Im}(u) \subset \left\{ g \in E \mid \int_0^{2\pi} g(t) dt = 0 \right\}.$$

Soit $g \in E$ telle que $\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0$. Soit h une primitive de g sur $\mathbb{R}$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x + 2\pi) - h(x) = \int_x^{x+2\pi} h'(t) dt = \int_x^{x+2\pi} g(t) dt$$

Comme g est 2π -périodique, on a : $\int_x^{x+2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} g(t) dt = 0$.

Donc, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et est 2π -périodique.

Remarque : si on considère f une primitive de h , alors f n'est pas nécessairement 2π -périodique. Pour que ce soit le cas, la fonction h doit vérifier $\int_0^{2\pi} h(t) dt = 0$.

On pose $h_1 = h - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt$: alors h_1 est 2π -périodique, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_0^{2\pi} h_1(t) dt = 0$.

Soit f une primitive de h_1 sur $\mathbb{R}$. Comme pour h , on montre que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique, et vérifie $f' = h_1$ et $u(f) = f'' = h_1' = h' = g$. Donc, $g \in \text{Im}(u)$. Ainsi,

$$\text{Im}(u) = \left\{ g \in E \mid \int_0^{2\pi} g(t) dt = 0 \right\}.$$

6. Soit $f \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$. Alors f est constante (question 2) et l'intégrale de f est nulle sur $[0, 2\pi]$. Donc f est nulle. Ainsi, la somme $\text{Ker}(u) + \text{Im}(u)$ est directe.

De plus, pour tout $f \in E$,

$$f = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt}_{\in \text{Ker}(u)} + \underbrace{f - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt}_{\in \text{Im}(u)}.$$

Ainsi,

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u).$$

Exercice 30 :

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que v est une surjection.
2. Montrer que u est une injection.
3. Montrer que $v \circ u = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Réponse

1. On sait que : $2 = \text{rg}(u \circ v) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Donc $2 \leq \text{rg}(v)$. De plus, v est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, donc $\text{rg}(v) \leq 2$. Ainsi, $\text{rg}(v) = 2$ et $\text{Im}(v) = \mathbb{R}^2$.

v est une surjection.

2. On sait que : $2 = \text{rg}(u \circ v) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Donc $2 \leq \text{rg}(u)$. Le théorème du rang appliqué à u donne

$$2 \leq \text{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\text{Ker}(u)) = 2 - \dim(\text{Ker}(u)).$$

Donc, $\dim(\text{Ker}(u)) \leq 0$. Donc, $\text{Ker}(u) = \{(0, 0)\}$ et

u est une injection.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^2$.

On sait que v est surjective donc il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = v(y)$. D'où $u(x) = (u \circ v)(y)$.

Or $u \circ v$ est un projecteur, donc $u \circ v \circ u \circ v = u \circ v$. D'où,

$$u(x) = \underbrace{(u \circ v \circ u \circ v)(y)}_{\text{car } v(y) = x} = (u \circ v \circ u)(x) = u((v \circ u)(x)).$$

Par injectivité de u , on a : $x = (v \circ u)(x)$. Ainsi,

$$v \circ u = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

Exercice 31 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(f_1, \dots, f_p) \in (\mathcal{L}(E))^p$. On suppose que $f_1 + \dots + f_p = \text{Id}_E$ et que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a $f_i \circ f_j = 0$.

1. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, f_i est un projecteur.
2. En déduire que $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

Réponse

1. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Par hypothèse,

$$(f_1 + \dots + f_p) \circ f_i = \text{Id}_E \circ f_i.$$

Donc, $f_1 \circ f_i + \dots + f_p \circ f_i = f_i$.

Or, par hypothèse, si $j \neq i$, alors $f_j \circ f_i = 0$.

Donc, $f_1 \circ f_i + \dots + f_p \circ f_i = f_i \circ f_i$, puis $f_i \circ f_i = f_i$.

Comme f_i est un endomorphisme,

f_i est un projecteur.

2. Soit $x \in E$, on a :

$$x = \text{id}_E(x) = (f_1 + \dots + f_p)(x) = f_1(x) + \dots + f_p(x) \in \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i).$$

Donc, $E \subset \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

L'autre inclusion est claire. Donc,

$$E = \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i).$$

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \text{Im}(f_1) \times \dots \times \text{Im}(f_p)$ tel que $u_1 + \dots + u_p = 0_E$.

On a alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_i = f_i(x_i)$.

D'où,

$$f_1(x_1) + \dots + f_p(x_p) = 0.$$

En évaluant en f_i , avec $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$f_i \circ f_1(x_1) + \dots + f_i \circ f_p(x_p) = f_i(0).$$

D'où, par hypothèse, $f_i \circ f_i(x_i) = 0$.

Comme f_i est un projecteur, $f_i(x_i) = 0$, donc, $u_i = 0$.

Donc, $\sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$ est une somme directe.

Ainsi,

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Im}(f_i).$$

Exercice 32 :

Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P(X^2) + (1 + X^2) \times P(X)$ est linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?

Réponse

- La linéarité ne pose pas de problème.
- Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. On a alors

$$P(X^2) = -(1 + X^2) \times P(X)$$

Supposons P non nul. Alors, $\deg(P(X^2)) = 2 \deg(P)$ et $\deg((1 + X^2) \times P(X)) = 2 + \deg(P)$. D'où, en identifiant les degrés, $2 \deg(P) = 2 + \deg(P)$. Donc $\deg(P) = 2$. On écrit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. Alors,

$$0 = \varphi(P) = 2aX^4 + bX^3 + (c + b + a)X^2 + bX + 2c.$$

Contradiction ($a \neq 0$). Donc $P = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Donc,

φ est injective.

- Soit P un polynôme non nul. On note n son degré. On a : $\deg(P(X^2)) = 2n$ et $\deg((1 + X^2) \times P(X)) = 2 + n$. Si $n \neq 2$, alors $\deg(P(X^2)) \neq \deg((1 + X^2) \times P(X))$, donc, $\deg(\varphi(P)) = \max(2n, 2 + n)$. Si $n = 2$, en reprenant les calculs de l'étude de l'injectivité de φ , on a $\deg(\varphi(P)) = 4 = \max(2n, 2 + n)$. On en déduit que le vecteur X ne possède pas d'antécédent par φ . Donc,

φ n'est pas surjective.

Hyperplan

Exercice 33 :

Montrer que $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et donner un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Réponse

On pose $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z, t) \mapsto 3x - y + t.$

► Montrons que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$.

Soient $(x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4$, $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2)) &= \varphi(\lambda \times x_1 + x_2, \lambda \times y_1 + y_2, \lambda \times z_1 + z_2, \lambda \times t_1 + t_2) \\ &= 3(\lambda \times x_1 + x_2) - (\lambda \times y_1 + y_2) + \lambda \times t_1 + t_2 \\ &= \lambda \times (3x_1 - y_1 + t_1) + 3x_2 - y_2 + t_2 \\ &= \lambda \times \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) + \varphi(x_2, y_2, z_2, t_2). \end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire. De plus, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$.

► Par construction $H = \text{Ker}(\varphi)$. Comme φ n'est pas la forme linéaire nulle ($\varphi(1, 0, 0, 0) = 3 \neq 0$), on en déduit que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 34 :

Soient $n \geq 1$ et $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}.$

Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Réponse

On considère $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto \int_0^1 P(t) dt.$

Par linéarité de l'intégrale, φ est linéaire.

De plus, comme φ n'est pas l'application nulle et est à valeurs dans $\mathbb{R}$, φ est une forme linéaire non nulle.

Comme $H = \text{Ker}(\varphi)$,

H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, $1 \notin H$, en effet : $\int_0^1 1 dt = 1 \neq 0.$

Donc, $D = \text{Vect}(1)$ est un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 35 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si f est de rang 1, alors il existe un vecteur non nul $u \in E$ et une forme linéaire sur E non nulle φ telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(x).u$
2. Montrer que la réciproque est vraie.

Dans la suite, on suppose que f est de rang 1.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.
4. Pour tout entier $k \geq 1$, déterminer f^k .

Réponse

1. On sait que l'endomorphisme f est de rang 1. D'où, comme E est de dimension finie, par le théorème du rang, on a : $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f) = n - 1$. On peut donc considérer $w \in E$ tel que $w \notin \text{Ker}(f)$. On a alors (à savoir remonter rapidement) :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Vect}(w).$$

On définit alors φ l'unique forme linéaire telle que :

$$\forall x \in \text{Ker}(f), \varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(w) = 1.$$

Remarque : poser $\varphi(w) = 1$ définit φ sur $\text{Vect}(w)$ tout entier. En effet, tout vecteur de $\text{Vect}(w)$ est de la forme $\lambda.w$ et par linéarité $\varphi(\lambda.w) = \lambda \times \varphi(w) = \lambda$.

Soit $x \in E$ qu'on décompose dans la somme directe $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Vect}(w)$. On a alors $x = h + \lambda.w$ où $h \in \text{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. D'où, par linéarité de f et φ :

$$f(x) = f(h) + \lambda.f(w) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \varphi(h) + \lambda.\varphi(w).$$

Or, $h \in \text{Ker}(f)$, donc $f(h) = 0$ et par construction de φ , $\varphi(h) = 0$. De plus, comme $\varphi(w) = 1$, on en déduit que $\varphi(x) = \lambda$ et donc

$$f(x) = \varphi(x).f(w).$$

La forme linéaire φ est non nulle ($\varphi(w) \neq 0$) et $u = f(w) \neq 0$ car $w \notin \text{Ker}(f)$. Ainsi,

Il existe un vecteur non nul $u \in E$ et une forme linéaire sur E non nulle φ telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(x).u$

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe un vecteur non nul $u \in E$ et une forme linéaire sur E non nulle φ telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(x).u$

Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \varphi(x).u \in \text{Vect}(u)$ ($\varphi(x)$ est un scalaire car φ est une forme linéaire).

Donc $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(u)$. Comme $u \neq 0$, $\text{Vect}(u)$ est une droite vectorielle. Donc, $\text{rg}(f) \leq \dim(\text{Vect}(u)) = 1$.

La forme linéaire φ est non nulle, donc il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. D'où, $f(x_0) = \varphi(x_0).u \neq 0$. Donc $\text{rg}(f) \geq 1$ (remarque : dire que le rang de f est nul signifie que f est l'application linéaire nulle).

Ainsi,

$$\text{rg}(f) = 1.$$

3. ► Supposons que f est un projecteur.

Comme f est de rang 1, on peut reprendre la fonction φ et les vecteurs u et w trouvés dans la question 1. On a alors, pour tout $x \in E$

$$f(f(x)) = \underbrace{f(\varphi(x).u)}_{\text{linéarité de } f} = \varphi(x).f(u) = \varphi(x).(\varphi(u).u) \quad \text{et} \quad f(x) = \varphi(x).u.$$

Comme f est un projecteur ($f \circ f = f$), on a :

$$\forall x \in E, \varphi(x).(\varphi(u).u) = \varphi(x).u$$

Prenons $x = w$ dans la relation précédente (rappelons que $\varphi(w) = 1$). On a alors : $\varphi(u).u = u$. Or $u \neq 0$, donc

$$\varphi(u) = 1.$$

► Réciproquement, supposons $\varphi(u) = 1$, alors (réutiliser les calculs précédents), pour tout $x \in E$,

$$f(f(x)) = \underbrace{\varphi(x).(\varphi(u).u)}_{\varphi(u)=1} = \varphi(x)u = f(x).$$

Donc $f \circ f = f$ et f est bien un projecteur.

Ainsi,

$$f \text{ est un projecteur si, et seulement si, } \varphi(u) = 1.$$

4. Soit $x \in E$. On calcule $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$ et on trouve

$$f(x) = \varphi(x).u, \quad f^2(x) = \varphi(x).(\varphi(u).u) = (\varphi(x) \times \varphi(u)).u \quad \text{et} \quad f^3(x) = \varphi(x).((\varphi(u))^2.u) = (\varphi(x) \times (\varphi(u))^2).u.$$

On va donc montrer par récurrence la propriété H_k : « pour tout $x \in E$, $f^k(x) = (\varphi(x) \times (\varphi(u))^{k-1}).u$ », où $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $k = 1$. On a bien $f(x) = \varphi(x).u = (\varphi(x) \times (\varphi(u))^0).u$. Donc H_1 est vraie.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_k vraie et montrons H_{k+1} .

Soit $x \in E$. On a $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$. Par hypothèse de récurrence et linéarité de f , on a alors

$$f^{k+1}(x) = f\left((\varphi(x) \times (\varphi(u))^{k-1}).u\right) = (\varphi(x) \times (\varphi(u))^{k-1}).f(u) = (\varphi(x) \times (\varphi(u))^k).u.$$

Ainsi H_{k+1} est vraie. Ce qui achève la récurrence

$$\text{Pour tout } k \geq 1, \text{ pour tout } x \in E, f^k(x) = (\varphi(x) \times (\varphi(u))^{k-1}).u$$

