

Documents disponibles sur sciencesdelingenieur.fr ▶ menu ressources pédagogiques

1. Définitions

1.1. Objet de la cinématique

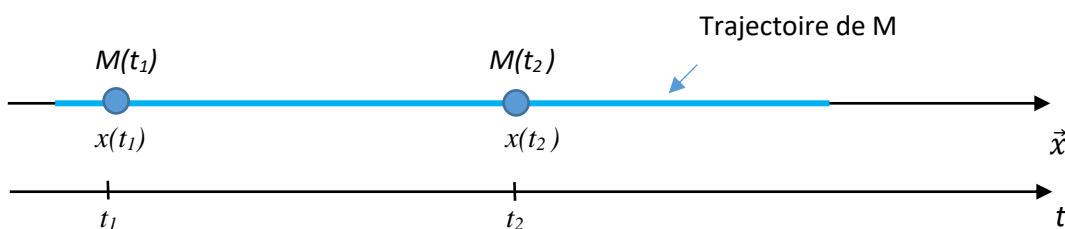
La cinématique est la partie de la mécanique qui permet de décrire et d'étudier les mouvements des solides indépendamment des causes qui les provoquent.

1.2. Notion de solide indéformable

Lorsqu'un objet ou un système est soumis à des efforts, il peut subir, suivant la nature du matériau de grandes ou de petites déformations. Dans nos études, tous les matériaux seront considérés comme indéformables.

Hypothèse : On considère deux points A et B d'un solide indéformable noté S . $\forall A, B \in S, \|\overline{AB}\| = \text{constante}$

1.3. Principales caractéristiques d'études, exemple d'un mouvement rectiligne



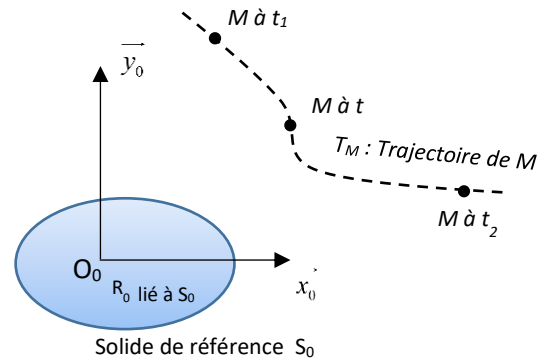
On peut caractériser pour le point M :

- Sa trajectoire : Le déplacement du point M se fait sur une droite.
- Sa position linéaire : $x(t)$ en m
- Sa vitesse moyenne : $v_{\text{moy}} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
- Sa vitesse instantanée : $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}$
- Son accélération moyenne : $a_{\text{moy}} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
- Son accélération instantanée : $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

2. Trajectoire, vecteurs caractérisant le mouvement

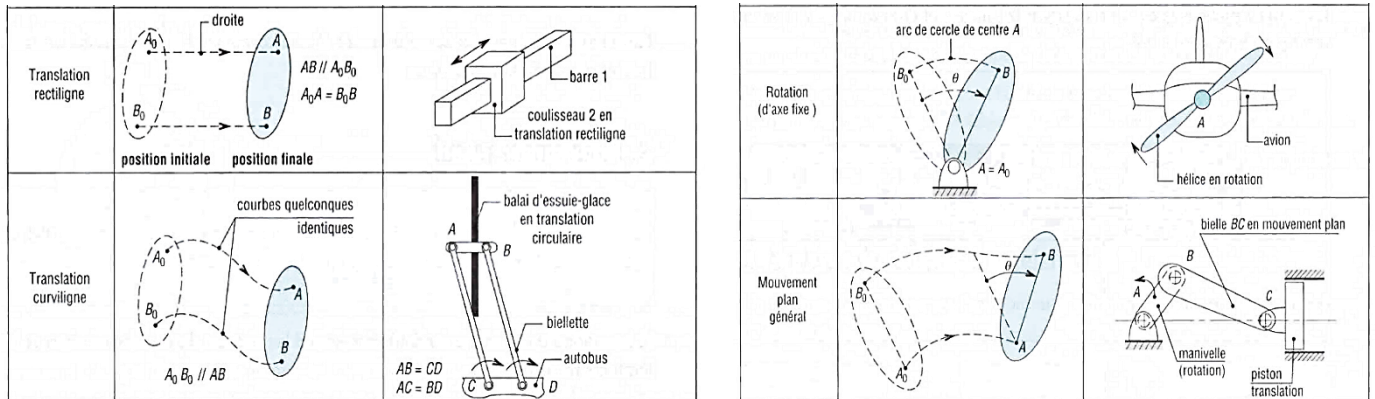
2.1. Trajectoire d'un point

Soit un repère de référence $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au solide S_0 . On appelle trajectoire de M par rapport à R_0 l'ensemble des positions successives de M quand la date t varie.



2.2. Mouvement plan d'un solide

Résumé des principaux types de mouvements plans

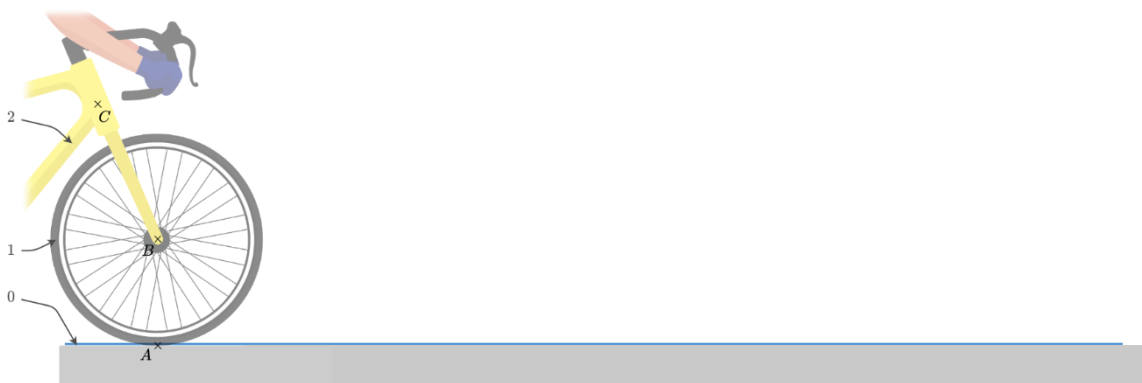


Exemple 1 : Roue avant d'une bicyclette.

A est le point de contact entre la roue (1) de rayon R et le sol (0). B est le centre de l'articulation entre la roue (1) et le cadre (2), C est un point appartenant au cadre. Le vélo se déplace en translation rectiligne.

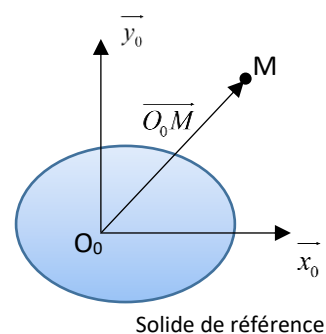
Q1 : Donner un nom aux mouvements $Mvt_{2/0}$, $Mvt_{1/2}$ et $Mvt_{1/0}$

Q2 : Pour un tour de roue, caractériser et représenter les trajectoires $T_{C \in 2/0}$, $T_{B \in 1/0}$, $T_{B \in 2/0}$, $T_{A \in 1/2}$, $T_{A \in 1/0}$ et $T_{A/0}$.



2.3. Vecteur-position

Le vecteur-position $\vec{O_0M}$ définit la position, à l'instant t, du point M dans son mouvement par rapport au repère de référence R_0 .

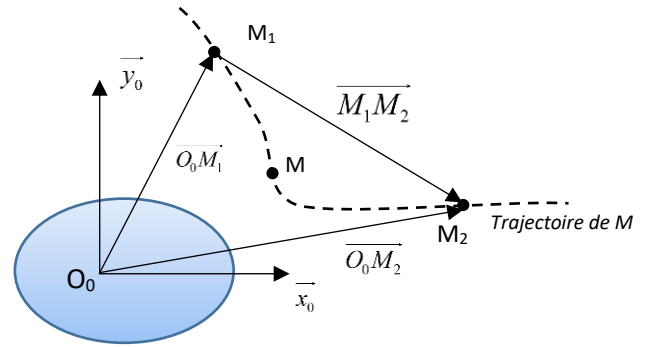


2.4. Vecteur-déplacement

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 , et M_2 la position de M à t_2 , le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ définit le déplacement de M entre t_1 et t_2 pendant la durée $(t_2 - t_1)$.

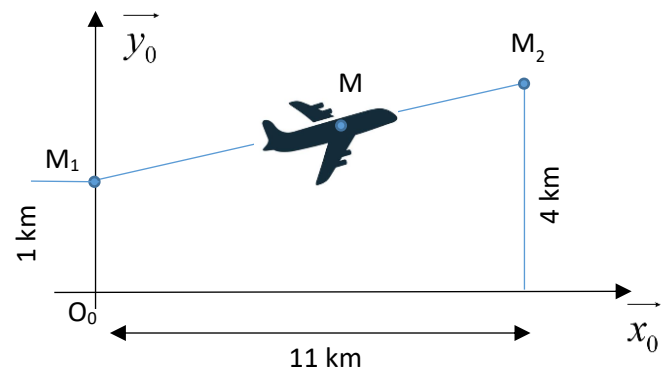
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O_0} + \overrightarrow{O_0M_2} = \overrightarrow{O_0M_2} - \overrightarrow{O_0M_1}$$

$\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ donne la distance entre M_1 et M_2



Exemple 2 : Considérons un avion en phase ascensionnelle suivant une trajectoire rectiligne, R_0 est le repère lié au sol.

- Déterminer les vecteurs position $\overrightarrow{O_0M_1}$ et $\overrightarrow{O_0M_2}$.
- En déduire le vecteur distance $\overrightarrow{M_1M_2}$
- En déduire la distance entre M_1 et M_2



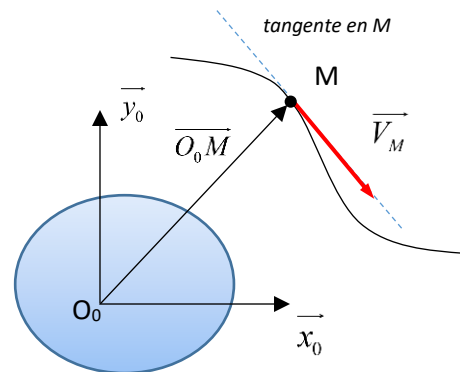
2.5. Vecteur-vitesse

Si $\overrightarrow{O_0M}$ définit le vecteur position d'un point M dans un repère R_0 , on note $\overrightarrow{V_{M/R_0}}$ le vecteur-vitesse de M par rapport au repère.

Par définition : $\overrightarrow{V_{M/R_0}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_0M} \right]_{R_0}$

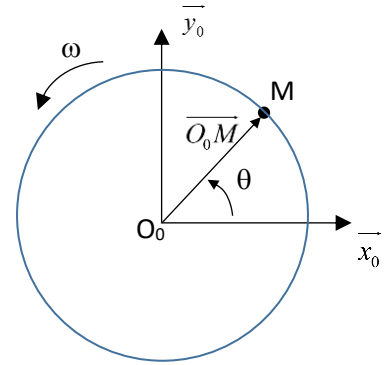
Le vecteur vitesse est tangent en M à la trajectoire.

Nous ne mentionnerons pas obligatoirement le repère afin de simplifier les écritures. Ainsi $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_{M/R_0}}$.



Exemple 3 : cas d'un mouvement de rotation

Le point M se déplace avec une vitesse circulaire uniforme autour de l'origine O_0 dans $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On pose $R = \|\vec{O_0M}\|$ le rayon du cercle représentant la trajectoire du point M et $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = Cte$



Q : Déterminer l'expression du vecteur vitesse \vec{V}_M , placer ce vecteur sur la figure ci-dessus.

Application :

- 1- Un pneu de dimension 205/55R16 a un diamètre total de 59,1 cm. Calculer la vitesse de rotation (en $\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$) permettant une vitesse de $130 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ du véhicule qui en est équipé.
- 2- Le même pneu usé (ou sous-gonflé) a un diamètre de 58 cm. Quelle sera sa vitesse du véhicule à la vitesse de rotation calculée précédemment ?

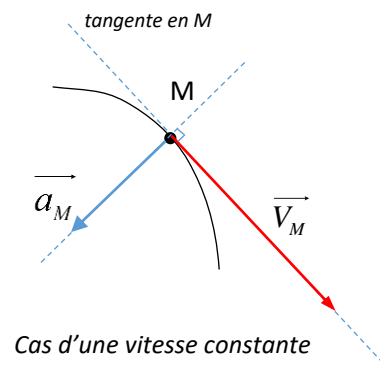
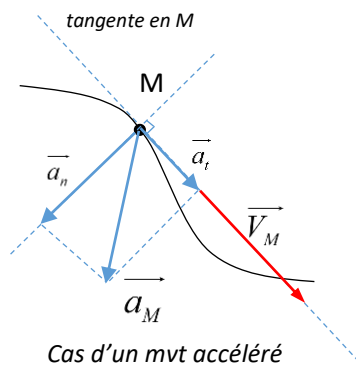


2.6. Vecteur-accélération

On note \vec{a}_M , $\vec{\gamma}_M$ ou $\vec{\Gamma}_M$ le vecteur-accélération de M par rapport à R_0 .

Par définition : $\vec{a}_M = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_M \right]_{R_0} = \left[\frac{d^2}{dt^2} \overline{O_0M} \right]_{R_0}$ \vec{a}_M admet 2 composantes : $\vec{a}_M = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

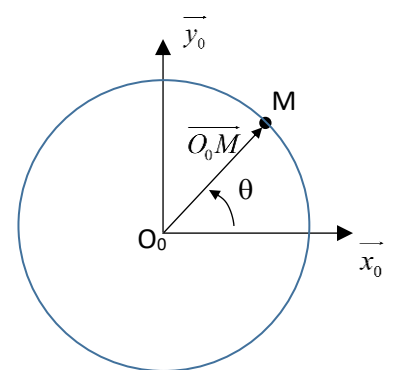
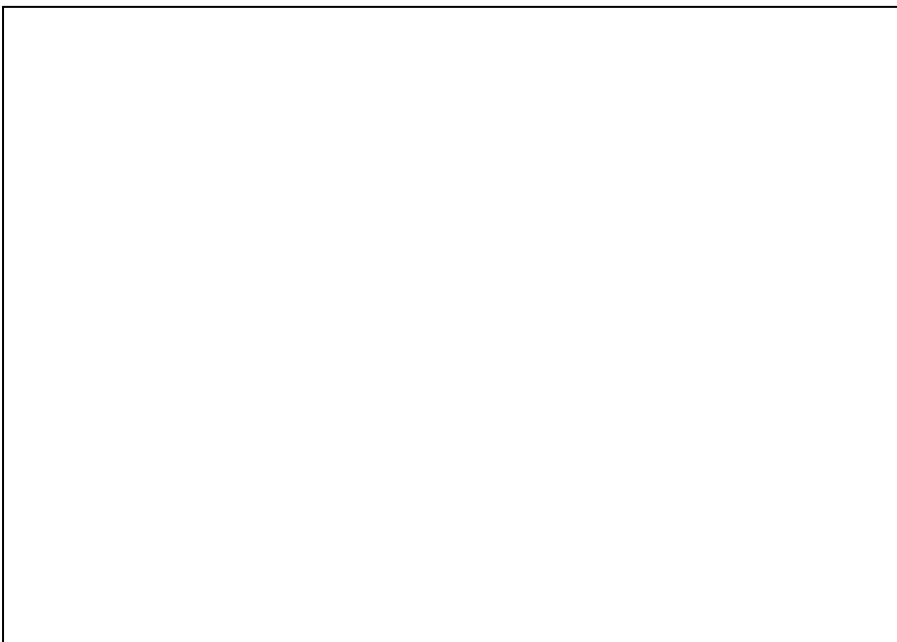
- \vec{a}_t : Composante de l'accélération tangentielle portée par la tangente en M. Dans le sens du vecteur-vitesse pour un mouvement accéléré, dans le sens opposé pour un mouvement décéléré, nulle pour une vitesse uniforme.
- \vec{a}_n : Composante de l'accélération normale, perpendiculaire à la tangente, orientée vers la partie concave de la trajectoire.



Exemple 4 : cas d'un mouvement de rotation

On reprend toutes les caractéristiques de l'exemple 3.

Q : Caractériser \vec{a}_M , placer son représentant sur la figure ci-contre.

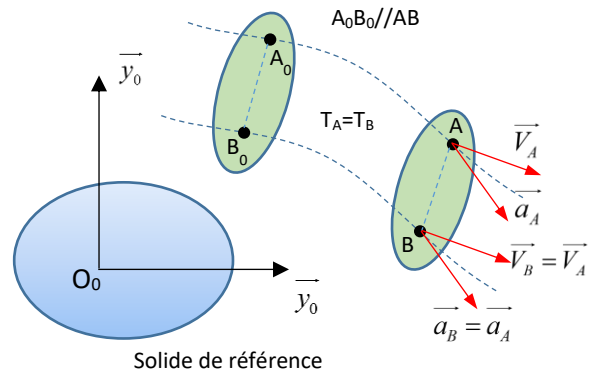


3. Mouvements élémentaires

3.1. Mouvement de translation

3.2. Propriétés

- Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques.
- Tous les points du solide ont la même vitesse et la même accélération.
- De ce fait le mouvement de translation d'un solide est complètement défini par le mouvement de l'un de ses points.



3.3. Mouvements rectilignes particuliers

3.3.1. Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

C'est le mouvement le plus simple, sans accélération et avec une vitesse constante

$$\begin{aligned}
 a &= 0 \\
 v(t) &= v_0 = \text{constante} \\
 x(t) &= v_0 t + x_0
 \end{aligned}$$

x_0 : position, déplacement initial (à $t = 0$)
 v_0 : vitesse initiale et vitesse de mouvement
 x : position, déplacement à l'instant t

3.3.2. Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Une accélération constante engendre une évolution linéaire de la vitesse.

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 = \text{constante} \\
 v(t) &= v_0 + at \\
 x(t) &= x_0 + v_0 t + a \frac{t^2}{2}
 \end{aligned}$$

Conditions initiales à $t = 0$:

$x = x_0$, $v = v_0$, et $a = a_0$

Autre formule utile : $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

Exemple 5 : Loi de vitesse en trapèze

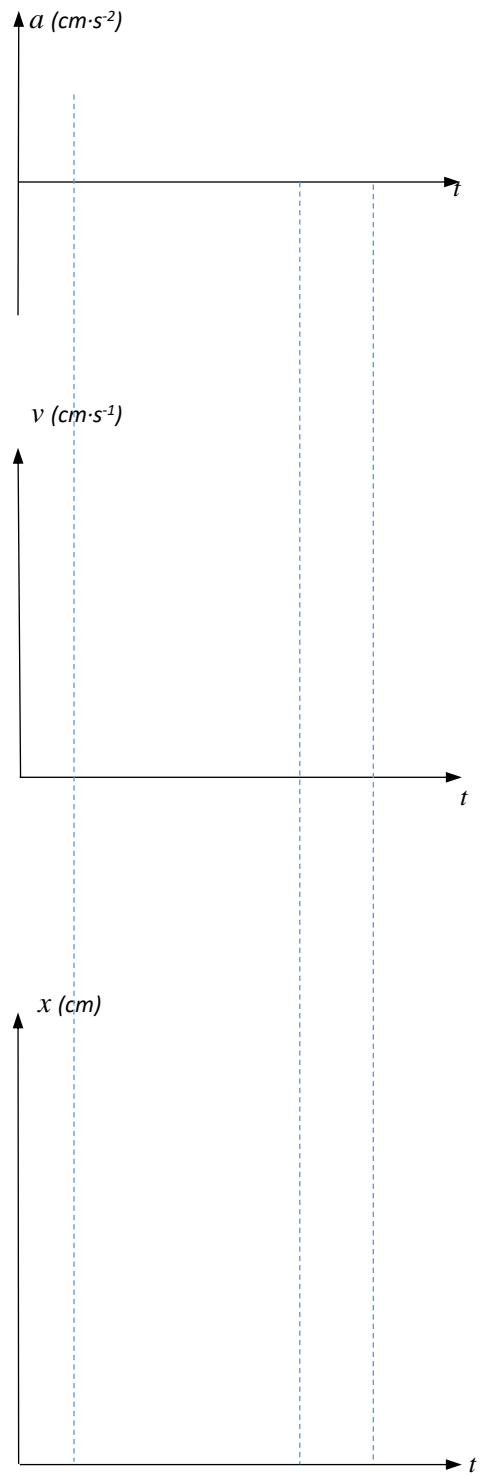
Physiquement il est impossible de passer d'une vitesse nulle à une vitesse non nulle. Les actionneurs des machines-outils sont souvent pilotés par une loi de vitesse dite en « trapèze ».

Au démarrage le chariot atteint la vitesse de $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ en 2 secondes. Il évolue à vitesse constante pendant 8 secondes et puis s'arrête sur une distance de 12,5 cm. Les accélérations et décélérations sont supposées constantes.

Q1 : Déterminer les équations de mouvement pour chacune des trois phases.

Q2 : Représenter les graphes de l'accélération (a), de la vitesse (v) et de la distance (x) en fonction du temps (t).





3.4. Mouvement de rotation

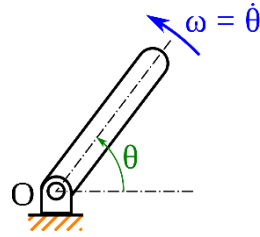
3.4.1. Mouvement de rotation uniforme

L'accélération angulaire est nulle :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad a = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$\omega = \omega_0 = \text{constante}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$



ω : vitesse de rotation angulaire en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Si N est la vitesse de rotation en tours

$$\text{par minute} \quad \omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi N}{30}$$

3.4.2. Mouvement uniformément accéléré

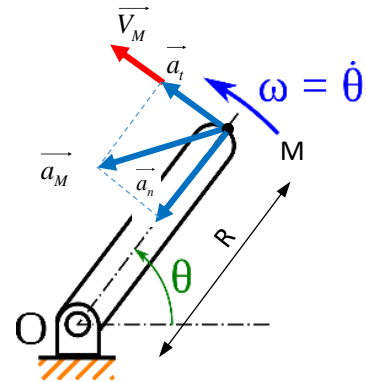
L'accélération angulaire est constante :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad a = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{constante}$$

$$\omega = at + \omega_0$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Autre formule utile : $\omega^2 = \omega_0^2 + 2a(\theta - \theta_0)$



3.4.3. Vitesse et accélération d'un point

Nous avons caractérisé ces grandeurs au chapitre 2.5 et 2.6. On doit retenir :

$$\|\vec{V}_M\| = V_M = R\omega \quad \text{pour la vitesse tangentielle}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \quad \text{pour l'accélération avec } a_t = aR \quad \text{et} \quad a_n = \omega^2 R = \frac{V_M^2}{R} = \omega V_M$$

Exemple 6 : Centrifugeuse

Les pilotes de chasse doivent passer par une centrifugeuse afin de tester leur résistance à de très fortes accélérations.

Q₁ : On impose une accélération maximale de 12 g (1 g = 9,81 m·s⁻²). En déduire la vitesse de rotation maximale ainsi que la vitesse tangentielle maximale du passager à cette valeur.

Q₂ : Le dispositif met 10 tours pour s'arrêter. Déterminer le temps mis jusqu'à l'arrêt si l'on considère que la décélération est constante.

