

Intégrales à paramètres – TD₆

Suites et séries d'intégrales

Exercice 1 :

Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2 \sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1 + t^2} dt$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 :

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x + \dots + x^n} dx.$$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que l'intégrale u_n converge.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction u_n par :

$$\forall x > 0, \quad u_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \times t^{x-1} dt.$$

Montrer que la suite de fonction $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 :

Montrer l'existence de $c > 0$ tel que :

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n}.$$

Indication : utiliser un changement de variable affine pour se ramener à une intégrale sur $[0, 1]$.

Exercice 5 :

Soit $f \in L^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n \times \int_0^1 \frac{f(n \times t)}{1+t} dt$.

Indication : utiliser un changement de variable

Exercice 6 :

On note

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1 - e^{-\sqrt{t}}} dt.$$

Montrer que I converge et calculer sa valeur.

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 7 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+x^4 \times t^2}} dt$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la limite de F en 0.

Exercice 8 : Intégrale de Gauss

On pose, pour tout $x \geq 0$, $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2 \times (1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que les fonctions G et H sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $G(x) + (H(x))^2 = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 9 : Intégrale de Dirichlet

Pour tout $a > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
2. En utilisant une majoration $|f(x)|$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$, puis de $f(x)$ sans signe intégral.

Pour $x > 0$. On note $f_1(x) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ et $f_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt$.

4. Vérifier que $f(x) = f_1(x) + \text{Im}(f_2(x))$.
5. Montrer que f_1 est continue en 0.
6. Montrer que f_2 sont continue en 0.

Indication : on pourra commencer par intégrer par parties.

7. En déduire que f est continue en 0, puis la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 10 :

Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-u^2+i) \times x^2}}{u^2 - i} du$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer F' .

Exercice 11 :

Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer un équivalent simple de F en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent simple de F en 0.

Exercice 12 :

Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer les limites de F en 0 et $+\infty$.

Exercice 13 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x \times t)}{t} \times e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer F' .
2. En déduire une expression de F sans symbole intégral.

Exercice 14 :

On définit une fonction F par $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x \times (t+1)} dt$.

1. Déterminer I le domaine de définition de F .
2. Sans utiliser de dérivée, déterminer la monotonie de F .
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .
4. Montrer que $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$.
5. Déterminer des équivalents simples de F aux bornes de I .

Exercice 15 :

On considère la fonction $f : t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \times e^{-\frac{t^2}{x^2}} dx$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est paire.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Soit $t > 0$. En utilisant le changement de variable $x = \frac{t}{u}$, montrer que $f'(t) = -2f(t)$.
5. En déduire l'expression de f .

On admettra que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.