

# Généralités sur les fonctions

## 1 Rappels sur le vocabulaire et les différents modes de représentation

### Définitions

On appelle **fonction** un procédé qui, à un nombre de départ, fait correspondre un unique nombre.

Une fonction est définie sur un ensemble de nombre que l'on nomme **domaine de définition** de la fonction. Si la fonction est notée  $f$  alors son ensemble de définition est noté  $\mathcal{D}_f$ .

Soit  $x$  un nombre de  $\mathcal{D}_f$ . Le nombre  $f(x)$  est appelé l'**image** de  $x$  par la fonction  $f$ . Le nombre  $x$  (le nombre de départ) est appelé **antécédent** de  $f(x)$  par la fonction  $f$ .

### Modes de représentation d'une fonction

- Une fonction  $f$  peut être représentée par son **expression littérale**.  
A toute valeur réelle  $x$  de son ensemble de définition, on associe le nombre réel  $f(x)$ .  
On note alors  $f : x \mapsto f(x)$ .
- Une fonction peut aussi être représentée graphiquement dans un repère par sa courbe d'équation  $y = f(x)$ .  
Cette **représentation graphique** est l'ensemble des points M de coordonnées  $(x ; f(x))$  où  $x \in \mathcal{D}_f$ .

### Exemple

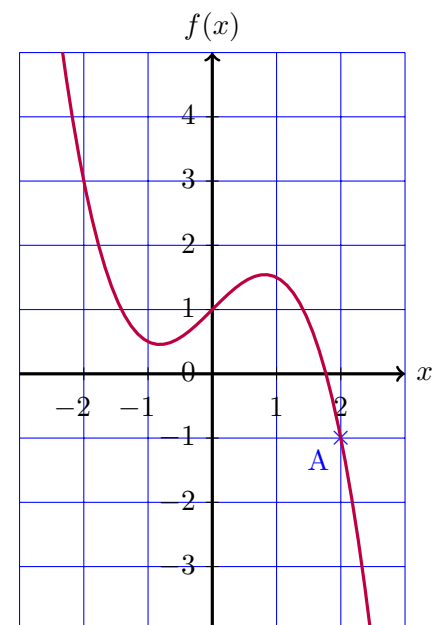
Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + x + 1$ .  
L'ensemble de définition de cette fonction est  $\mathbb{R}$ .

$$f(2) = -\frac{1}{2} \times 2^3 + 2 + 1 = -1 \quad ; \quad f(-3) = -\frac{1}{2} \times (-3)^3 + (-3) + 1 = \frac{23}{2}$$

L'image de 2 par la fonction  $f$  est  $-1$ . On peut aussi dire que 2 est un antécédent de  $-1$  par la fonction  $f$ .

L'image de  $-3$  par la fonction  $f$  est  $\frac{23}{2}$ . On peut aussi dire que  $-3$  est un antécédent de  $\frac{23}{2}$  par la fonction  $f$ .

Ci-contre, la courbe représentative de la fonction  $f$ .  
Le point  $A(2; -1)$  permet de visualiser le calcul précédent : c'est un point qui appartient à la courbe représentative de la fonction  $f$ .



## 2 Taux de variation, entre deux valeurs, d'une fonction

### Définition : taux de variation

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts de  $I$ .  
On appelle **taux de variation** de  $f$  entre  $a$  et  $b$  le réel défini par :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### Propriété

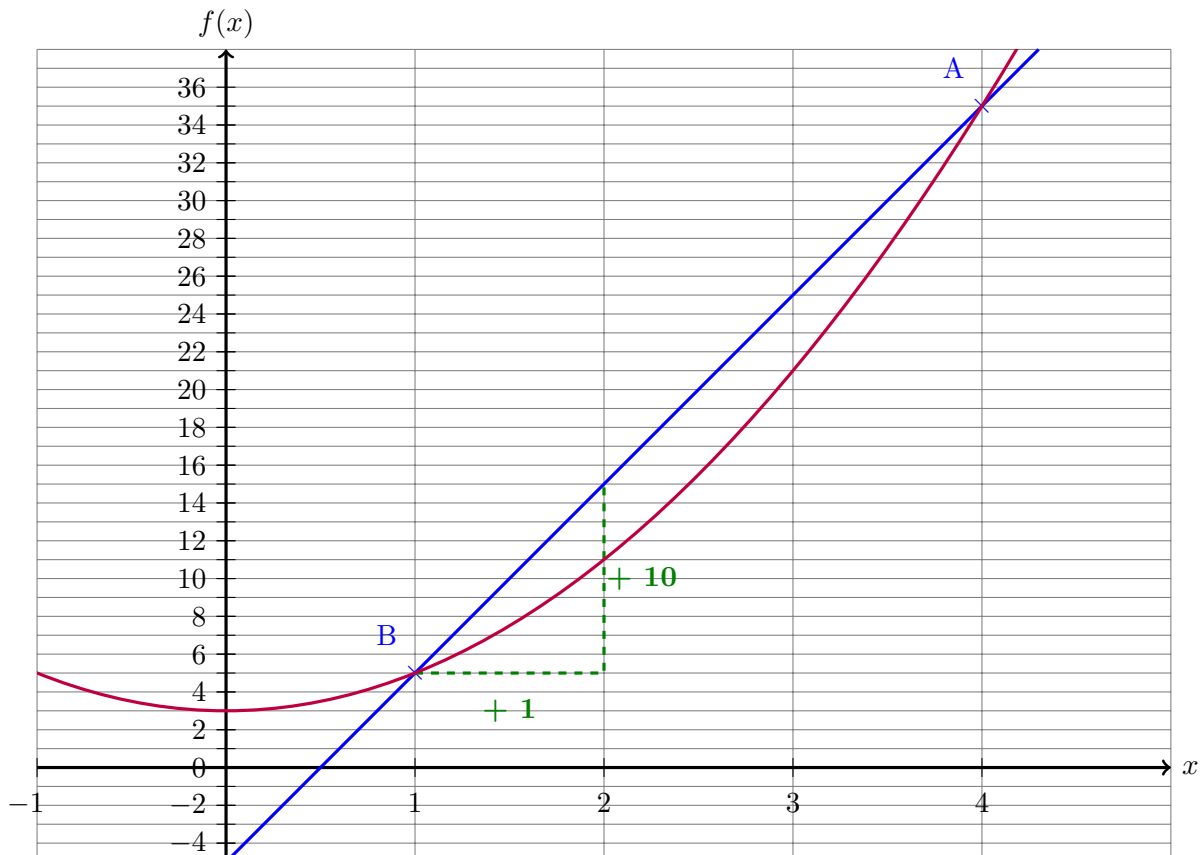
Le taux de variation d'une fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  est le coefficient directeur (ou pente) de la droite passant par  $A(a; f(a))$  et  $B(b; f(b))$ .

### Exemple

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2 + 3$ . On souhaite déterminer le taux de variation de  $f$  entre 4 et 1.

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 \times 4^2 + 3 - (2 \times 1^2 + 3)}{3} = \frac{35 - 5}{3} = 10.$$

Cela signifie que le coefficient directeur de la droite passant par  $A(4; 35)$  et  $B(1; 5)$  est égal à 10.



**Définition : fonction monotone**

Soit  $f$  une fonction dont le domaine de définition est noté  $\mathcal{D}_f$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathcal{D}_f$ .  
On dit que  $f$  est **(strictement) monotone** sur  $I$  si  $f$  est :

- soit (strictement) croissante sur  $I$  ;
- soit (strictement) décroissante sur  $I$  ;
- soit constante sur  $I$  ;

**Propriétés**

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $\mathcal{D}_f$  et soit  $I$  un intervalle de  $\mathcal{D}_f$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts de  $I$ .

- Si le taux de variation  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  est (strictement) positif alors  $f$  est (strictement) croissante sur  $I$ .
- Si le taux de variation  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  est (strictement) négatif alors  $f$  est (strictement) décroissante sur  $I$ .
- Si le taux de variation  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  est égal à 0 alors  $f$  est constante sur  $I$ .

**Exemple**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $x \mapsto \frac{1}{x}$ . On veut montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty ; 0[$ .

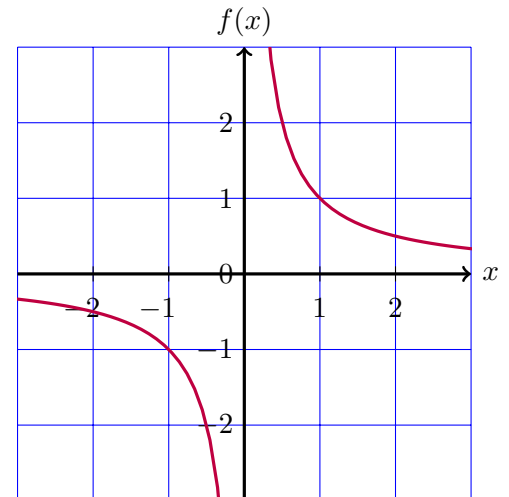
Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts de  $]-\infty ; 0[$ .

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{a - b}{ab(b - a)} = \frac{-(b - a)}{ab(b - a)} = \frac{-1}{ab}$$

Puisque les deux réels  $a$  et  $b$  sont de même signe, leur produit est positif. Donc le nombre  $\frac{-1}{ab}$  est négatif.

Le taux de variation de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  est donc négatif :  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty ; 0[$ .

On peut aussi montrer de la même manière que  $f$  est strictement décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ .



# Généralités sur les fonctions

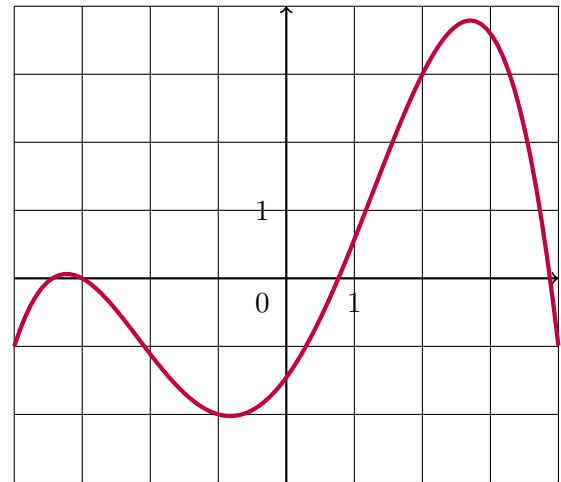
## > Différents modes de représentation d'une fonction

**Exercice n°1** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par  $x \mapsto 3x + 1 - \frac{1}{x}$ .

1. Calculer l'image de 4 par la fonction  $f$ .
2. Que faut  $f(-1)$ ?

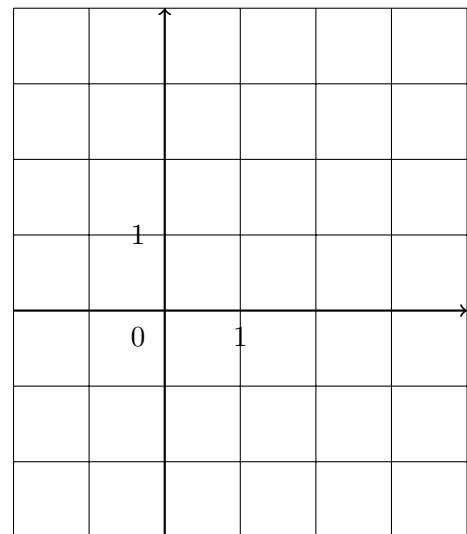
**Exercice n°2** On considère la fonction  $g$  dont on donne la courbe représentative ci-dessous.

1. Quelle est l'image de 2 par la fonction  $g$ ?
2. Que vaut  $g(-3)$ ?
3. Donner les antécédents de  $-1$  par la fonction  $g$ .
4. Donner des valeurs approchées des antécédents de 0 par la fonction  $g$ .
5. Résoudre graphiquement l'équation  $g(x) = 3$ .
6. Résoudre graphiquement l'inéquation  $g(x) > 3$ .



**Exercice n°3** Soient  $h_1$  et  $h_2$  les deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $h_1(t) = 2t - 1$  et  $h_2(t) = -\frac{1}{2}t + 3$ .

1. Calculer les images de 0 par ces deux fonctions.
2. Calculer  $h_1(-1)$  et  $h_2(-1)$ .
3. De quel type de fonction s'agit-il? Donner la valeur du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine de ces deux fonctions.
4. Dans le repère ci-contre, représenter graphiquement ces deux fonctions.
5. Résoudre graphiquement l'équation  $h_1(t) = h_2(t)$ .
6. Vérifier le précédent résultat par la calcul.



**Exercice n°4** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u \mapsto u^3 - 10u^2$ .

1. Calculer  $f(-2)$  et  $f(-3)$ .
2. Est-ce que 0 est un antécédent de 10 par la fonction  $f$  ?
3. Est-ce que 10 est un antécédent de 0 par la fonction  $f$  ?

### Exercice n°5

Dans la région de Jean-Kevin, on étudie l'offre et la demande de viande de mouton. Le prix de la viande varie entre 5€ le kg et 12€ le kg.

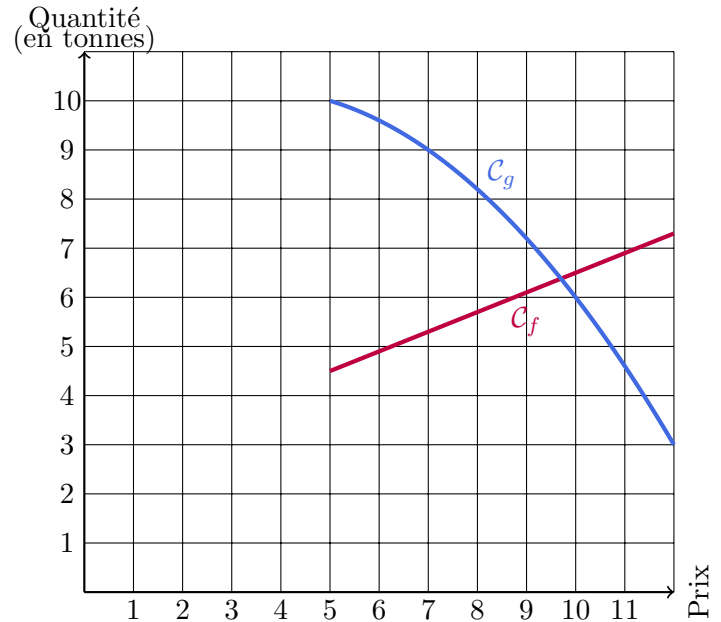
1. On considère la fonction  $f : x \mapsto 0,4x + 2,5$  qui représente l'offre de viande, en tonnes. On considère la fonction  $g : x \mapsto -0,1x^2 + 0,7x + 9$  qui modélise la quantité de viande demandée, en tonnes également. À chaque

fois,  $x$  désigne le prix au kg de la viande.

On dit que le marché est en équilibre quand les quantités offertes sont égales aux quantités demandées.

Répondre à l'aide des représentations graphiques. Au prix de 9€ le kg, la demande est-elle satisfaisante ?

2. Pour une quantité offerte de 7 tonnes, lire le prix de l'offre.  
À ce prix, expliquer pourquoi la demande ne sera pas suffisante et qu'ainsi, il y aura du surplus.
3. Lire une valeur approchée du prix d'équilibre.



On souhaite maintenant trouver la valeur, la plus précise possible de ce prix d'équilibre. Pour cela, on doit résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$  ou encore  $f(x) - g(x) = 0$ . On pose ainsi, pour tout réel  $x$  compris entre 5 et 12 la fonction  $h$  définie par  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

Exprimer  $h(x)$  en fonction de  $x$ .

4. Le programme Python ci-dessous permet de trouver une approximation par balayage de la solution  $h(x) = 0$ .

```

1 def h(x):
2     return ...
3
4 def balayage():
5     x=...
6     while h(x)<0:
7         x=x+0.01
8     return x
9 balayage()

```

Compléter les lignes 2 et 5 de ce programme.

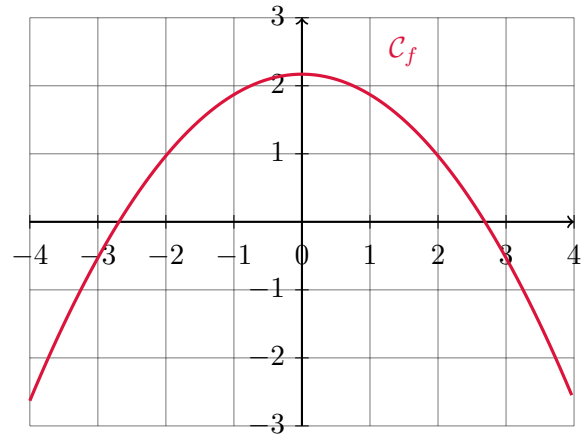
5. Le tester et donner une valeur arrondie à  $10^{-2}$  près du prix d'équilibre.
6. Calculer alors la quantité d'équilibre à 10 kg près.

> Résoudre graphiquement des équations et inéquations

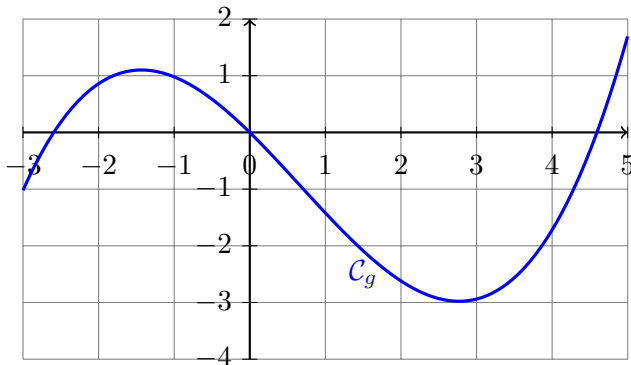
**Exercice n°6**

On considère une fonction  $f$  dont on donne la représentation graphique ci-contre.

1. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 1$ .
2. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 0$ .
3. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) > 1$ .
4. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \leq -1$ .



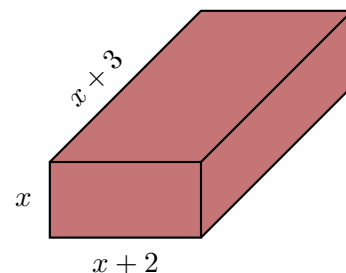
**Exercice n°7**



1. Résoudre graphiquement l'équation  $g(x) = 0$ .
2. Résoudre graphiquement l'équation  $g(x) = -\frac{7}{2}$ .
3. Résoudre graphiquement l'inéquation  $g(x) \geq -2$ .
4. Résoudre graphiquement l'inéquation  $g(x) > 0$ .

**Exercice n°8** On considère une boîte de rangement, représentée ci-dessous où  $x$  est en cm.

1. Exprimer le volume  $\mathcal{V}$  de cette boîte en fonction de  $x$ .
2. Calculer ce volume lorsque  $x = 10$  cm.
3. Tracer la courbe représentative de  $\mathcal{V}$  sur la calculatrice ou un logiciel de géométrie. À partir de quelle valeur de  $x$  a-t-on un volume dépassant les  $40 \text{ cm}^3$  ?
4. Résoudre l'inéquation  $\mathcal{V}(x) < 12$ .



> Déterminer et utiliser le taux de variation d'une fonction

**Exercice n°9** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto x^2 - 1$ .

1. Déterminer le taux de variations de la fonction  $f$  entre 1 et 4.
2. Que peut-on en déduire concernant les variations de  $f$  sur  $[1; 4]$  ?

**Exercice n°10** Soit  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $x \mapsto 2x - 3$ .

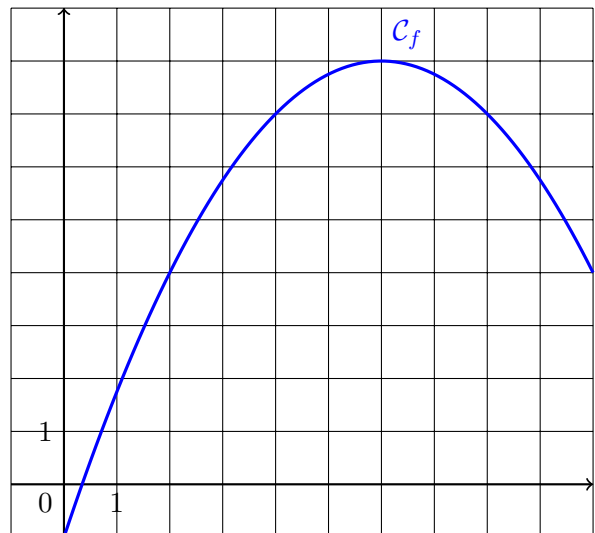
1. Rappeler la nature de la fonction  $g$ .
2. Calculer le taux de variation de la fonction  $g$  entre 0 et 6.
3. Conclure sur la monotonie de  $g$  sur  $[0; 6]$ .
4. Soit  $f$  la fonction  $x \mapsto ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels fixés. Exprimer le taux de variation de  $f$  entre deux réels distincts  $x_1$  et  $x_2$ .
5. Conclure sur la monotonie de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  en fonction de  $a$ .

**Exercice n°11** Soit  $f$  définie sur  $] -2; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{-4}{x+2}$ .

1. On considère deux réels distincts  $x_1$  et  $x_2$  de  $] -2; +\infty[$ . Exprimer le taux de variation de  $f$  entre  $x_1$  et  $x_2$ .
2. Conclure sur la monotonie de  $f$  sur  $] -2; +\infty[$ .
3. Vérifier le résultat en traçant la courbe représentative de  $f$  sur la calculatrice ou un logiciel de géométrie.

**Exercice n°12** On donne un morceau de la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de  $f : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 1$ .

1. A est un point de  $\mathcal{C}_f$  dont l'abscisse vaut 2. Calculer l'ordonnée de A.
2. B est un point de  $\mathcal{C}_f$  dont l'abscisse vaut 4. Calculer l'ordonnée de B.
3. Tracer la droite (AB) sur la représentation graphique ci-contre.
4. Déterminer graphiquement le coefficient directeur de cette droite. Que peut-on en déduire concernant les variations de  $f$  sur  $[2; 4]$ ?
5. On considère C(6; 8) et D(8; 7). Montrer, par le calcul, que C et D appartiennent à  $\mathcal{C}_f$ .
6. Tracer (CD) sur le repère ci-contre. Pourquoi peut-on affirmer que  $f$  est strictement décroissante sur  $[6; 8]$ ?



**Exercice n°13** On considère le programme Python ci-dessous.

```

1 def f(x):
2     return -4/(x+2)
3
4 def JeanKevin(a,b):
5     Diff_Y=f(b)-f(a)
6     Diff_X=b-a
7     return Diff_Y/Diff_X

```

1. Donner l'expression littérale de la fonction  $f$  mise en jeu dans ce programme.
2. À l'aide de Python, calculer  $f(-2)$ . Qu'obtient-on? Pourquoi?
3. Que permet de faire la fonction `JeanKevin`?
4. En utilisant ce programme, conjecturer les variations de  $f$  sur  $[-500; -100]$  et sur  $[-1\ 000; -10]$ .
5. Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  sur son intervalle de définition (sur la calculatrice ou un logiciel de géométrie ou directement sur Python) puis donner les variations de  $f$  sur son ensemble de définition.