MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Liberté
Égalité
Fraternité

Concours externe BAC + 3 du CAPLP

Cafep-Caplp

Section Mathématiques-Physique Chimie

1) Exemple de sujet pour la première épreuve d'admissibilité
2) Extrait de l'arrêté du 17 avril 2025

Les épreuves du concours externe du Caplp et Cafep-Caplp BAC+ 3 sont déterminées dans l'arrêté du 17 avril 2025 fixant les sections et modalités d'organisation du concours externe du certificat d'aptitude au professorat de lycée professionnel, publié au Journal Officiel du 19 avril 2025, qui fixe les modalités d'organisation du concours et décrit le schéma des épreuves.

© www.devenirenseignant.gouv.fr
mai 2025

Le sujet est structuré en trois parties :

– **la partie 1, sur 10 points, est à traiter par tous les candidats ;**

– **la partie 2, sur 10 points, est à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure physique-chimie à l'inscription.** Aucun point ne sera attribué sur cette partie aux candidats relevant de la discipline majeure mathématiques ;

– **la partie 3, sur 10 points, est à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure mathématiques à l'inscription.** Aucun point ne sera attribué sur cette partie aux candidats relevant de la discipline majeure physique-chimie.

Chaque partie est constituée de deux exercices indépendants.

© www.devenirenseignant.gouv.fr

PARTIE 1
(à traiter par tous les candidats)

Exercice 1

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse puis justifier la réponse.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit f une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.

   Affirmation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. **Affirmation :** Il n'existe pas de série statistique dont la médiane est strictement inférieure à la moyenne.

3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

   Affirmation : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

4. ABC est un triangle rectangle d'hypoténuse $[BC]$, I est le milieu de $[BC]$ et le point G est défini par $4\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

   Affirmation : G est le symétrique du point I par rapport au point A.

5. Une entreprise de sondage réalise une enquête par téléphone. On admet que la probabilité que la personne contactée accepte de répondre est égale à $0{,}2$. Un enquêteur contacte 10 personnes de manière aléatoire et indépendante.

   Affirmation : La probabilité qu'au moins une personne accepte de lui répondre est supérieure à $0{,}95$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(\cos(x))$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Résoudre l'inéquation $\cos(x) > 0$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2. Justifier que f est bien définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. **(a)** Montrer que f est paire sur I.

   (b) Que peut-on en déduire concernant $\mathcal{C}_f$?

4. **(a)** Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

   (b) $\mathcal{C}_f$ admet-elle une autre asymptote ? Justifier la réponse.

5. **(a)** Après avoir justifié que f est dérivable sur I, montrer que pour tout $x \in I$, $f'(x) = -\tan(x)$.

   (b) En déduire le tableau de variations de f sur I.

6. (a) Montrer que f est concave sur I.

   (b) On note $(T_{\frac{\pi}{3}})$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'équation de $(T_{\frac{\pi}{3}})$.

   (c) Déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $(T_{\frac{\pi}{3}})$ sur I.

   (d) Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur I ainsi que la droite $(T_{\frac{\pi}{3}})$.

7. Dans cette dernière question, on s'intéresse à la fonction tangente (notée $\tan$) et sa courbe représentative dans un repère orthonormé (notée $\mathcal{C}_{\tan}$). On note A le point de $\mathcal{C}_{\tan}$ d'abscisse 0 et B le point de $\mathcal{C}_{\tan}$ d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

   (a) Déterminer l'équation de la droite (AB).

   (b) Justifier que le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_{\tan}$.

   (c) Exprimer en fonction de f une primitive de $\tan$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (d) Déterminer l'aire de la surface du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_{\tan}$ et le segment $[AB]$.
   On donnera la valeur exacte et le résultat sera exprimé en unités d'aire.

PARTIE 2
(à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure physique-chimie à l'inscription)

Exercice 3

Lors d'un tournoi de tennis, un joueur doit affronter plusieurs adversaires successivement.

Lors du premier match, il gagne ou perd de manière équiprobable.

Ensuite, s'il a gagné un match, il gagne le suivant avec une probabilité de $0{,}7$.

En revanche, s'il a perdu un match, il perd le suivant avec une probabilité de $0{,}8$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- G_n l'événement « le joueur gagne le $n^{\text{ème}}$ match » ;
- $p_n = P(G_n)$.

Cas où le joueur ne joue que 2 matchs

1. (a) Montrer que la probabilité que le joueur ait gagné les deux matchs, c'est-à-dire $P(G_1 \cap G_2)$, est égale à $0{,}35$.

   (b) Calculer p_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice. *On pourra s'aider d'un arbre pondéré.*

   (c) On suppose que le joueur a gagné le deuxième match. Un spectateur qui n'a vu que le deuxième match affirme : « Il y a plus de 95 % de chances que le joueur ait également gagné le premier match ». Justifier la pertinence ou non de cette affirmation.

2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de matchs gagnés.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   (b) Montrer que $E(X) = 0{,}95$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Pour jouer, la mise est de 5 € pour les deux matchs. Sachant que chaque match gagné rapporte 10 €, déterminer le gain algébrique moyen du joueur.

Cas où le joueur joue indéfiniment

4. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$.

5. Le script Python ci-dessous permet de calculer et d'afficher les 10 premiers termes de la suite (p_n).

   Script :

```
n=1
p=
print(n,p)
for
  p=
  print(n,p)
```

Affichage (partiel) dans la console :

```
1
2 0.45
3 0.425
4
5
6
7 0.4015625
8 0.40078125
9 0.400390625
10 0.40019531
```

(a) Compléter ce script afin qu'il fonctionne correctement.

(b) À partir de l'affichage dans la console, quelle conjecture peut-on émettre concernant l'éventuelle limite de la suite (p_n) ?

6. On définit la suite u par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = p_n - 0{,}4$.

(a) Démontrer que la suite u est géométrique, de raison à déterminer.

(b) En déduire une expression explicite de p_n en fonction de n.

(c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et discuter la conjecture établie à la question 5(b).

(d) Déterminer la valeur de n à partir de laquelle la probabilité de gagner un match devient strictement inférieure à $0{,}41$.

(e) Rédiger un script Python qui permette d'afficher la valeur de n recherchée à la question 6(d).

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm, on donne le point $P(2; 1)$.

Une droite passant par P coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en A et l'axe $(O, \vec{j})$ en B, l'ordonnée de B étant strictement supérieure à 1.

On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{OAB}$ telle que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ et on note H le projeté orthogonal de P sur $(O, \vec{i})$.

1. Faire une figure illustrant la situation.

2. **(a)** Montrer que $AH = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$.

(b) En déduire que $OA = 2 + \dfrac{1}{\tan(\theta)}$.

(c) Montrer que $OB = 1 + 2\tan(\theta)$.

(d) En déduire l'aire du triangle OAB en fonction de θ.

3. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(4x + \frac{1}{x} + 4\right)$.

(a) Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

(b) Étudier le signe de la dérivée de f et en déduire le tableau de variations de f.

(c) Justifier que f admet un minimum sur $]0, +\infty[$ dont on donnera la valeur.

4. **(a)** Déduire des questions précédentes l'aire minimale du triangle OAB en cm^2.

(b) Sur la figure de la question 1, tracer le triangle d'aire minimale.

PARTIE 3
(à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure mathématiques à l'inscription)

Exercice 5

Lors d'un tournoi de tennis, un joueur doit affronter plusieurs adversaires successivement.

Lors du premier match, il gagne ou perd de manière équiprobable.

Ensuite, s'il a gagné un match, il gagne le suivant avec une probabilité de $0{,}7$.

En revanche, s'il a perdu un match, il perd le suivant avec une probabilité de $0{,}8$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- G_n l'événement « le joueur gagne le $n^{\text{ème}}$ match » ;
- $p_n = P(G_n)$.

Cas où le joueur ne joue que 3 matchs

1. (a) Calculer $P\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}\right)$.

   (b) En déduire que la probabilité que le joueur gagne au moins un des trois matchs est égale à $0{,}68$.

2. Ce joueur participe chaque week-end à un tournoi. Au cours de chaque tournoi, il joue à chaque fois trois matchs. Lors de ces tournois, il remporte un lot si, au cours des trois matchs, il en gagne au moins un.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de lots remportés par le joueur au cours des quatre premiers week-ends de l'année.

   (a) Démontrer que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   (b) Déterminer la probabilité que le joueur remporte exactement deux lots au cours des quatre premiers week-ends de l'année.

   (c) Montrer que $E(X) = 2{,}72$ et interpréter le résultat.

Cas où le joueur joue indéfiniment

3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$.

4. Le script Python ci-dessous permet de calculer et d'afficher les 10 premiers termes de la suite (p_n).

   Script :

```
n=1
p=
print(n,p)
for
  p=
  print(n,p)
```

Affichage (partiel) dans la console :

```
1
2 0.45
3 0.425
4
5
6
7 0.4015625
8 0.40078125
9 0.400390625
10 0.40019531
```

(a) Compléter ce script afin qu'il fonctionne correctement.

(b) À partir de l'affichage dans la console, quelle conjecture peut-on émettre concernant le sens de variation de la suite (p_n) et son éventuelle limite ?

5. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $p_n \geq 0{,}4$.

(b) Déterminer le sens de variation de la suite (p_n).

(c) En déduire que la suite (p_n) converge et déterminer sa limite.

6. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(b) Déterminer la valeur de n à partir de laquelle la probabilité de gagner un match devient strictement inférieure à $0{,}41$.

(c) Rédiger un script Python qui permette d'afficher la valeur de n recherchée à la question 6(b).

Exercice 6

On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices dont le coefficient de la seconde ligne de la première colonne est non nul :

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } c \neq 0 \right\}$$

À toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}$, on associe la fonction réelle φ_A définie par :

$$\varphi_A(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{\varphi_A}$ de φ_A.

(b) Montrer que si $bc = ad$ alors φ_A est une fonction constante.

On suppose dans toute la suite que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ et que $bc \neq ad$.

2. **(a)** Prouver que A est inversible.

(b) Justifier que 0 n'est pas valeur propre de A.

3. **(a)** Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de A.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A si et seulement si $\varphi_A(x) = x$.

(c) Discuter du nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x, $\varphi_A(x) = x$, en fonction des coefficients de A. *On ne calculera pas les solutions dans cette question.*

(d) En déduire que si $(d-a)^2 + 4bc > 0$ alors A est diagonalisable.

4. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que $B \in \mathcal{M}$ puis que B est diagonalisable.

(b) Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de B.

(c) Donner une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $B = PDP^{-1}$.

5. On cherche dans cette partie à calculer les puissances de la matrice B définie précédemment.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PD^nP^{-1}$.

(b) Calculer P^{-1} en justifiant le résultat.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de D^n.

(d) Déduire de ce qui précède l'expression de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. *On précisera ses coefficients en fonction de n.*

CAPLP BAC + 3

Réglementation de la première épreuve d'admissibilité

Extrait de l'annexe de l'arrêté du 17 avril 2025 fixant les modalités d'organisation du concours externe du certificat d'aptitude au professorat de lycée professionnel, publié au Journal Officiel du 19 avril 2025

SECTION MATHÉMATIQUES-PHYSIQUE CHIMIE

Le candidat choisit au moment de l'inscription la discipline - mathématiques ou physique- chimie - qui fait l'objet de l'évaluation la plus approfondie. Cette discipline est qualifiée de majeure, l'autre étant qualifiée de mineure.

A. - Epreuves d'admissibilité

Chaque épreuve d'admissibilité se compose de plusieurs exercices ou problèmes. Chacune des épreuves d'admissibilité se compose de deux parties d'égale importance : une partie commune à tous les candidats et une partie spécifique dépendant de la discipline majeure/mineure choisie.

1° Première épreuve d'admissibilité - Epreuve disciplinaire de mathématiques.
L'épreuve permet d'apprécier la connaissance des notions de mathématiques et l'aptitude à les mobiliser pour résoudre des problèmes. Elle sollicite également les capacités de raisonnement, de démonstration et d'expression écrite du candidat.

Durée : trois heures.
Coefficient 2,5.
L'épreuve est notée sur 20. La partie commune compte pour 10 points, la partie spécifique compte pour 10 points. Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire

© www.devenirenseignant.gouv.fr