

Séries numériques – TD₄

Suites numériques

Exercice 1 :

Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Trouver un équivalent de u_n .

Exercice 2 :

Déterminer la limite de $P_n = \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 :

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 4 :

Soient $f : x \mapsto \frac{x(1+2x)}{1+3x}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier (u_n) .
2. Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n}$.
3. En déduire un équivalent de u_n .

Indication : on pourra utiliser le théorème de Cesàro.

Séries numériques

Exercice 5 :

Déterminer la nature des séries suivantes :

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$. | 9. $\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$. | 19. $\sum \frac{(-1)^n \times (2n+1)}{n \times (n+1)}$. |
| 2. $\spadesuit \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$. | 10. $\sum (n^{\frac{1}{n^2}} - 1)$. | 20. $\sum_{n \geq 1} n^a \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$ où $a \in \mathbb{R}$. |
| 3. $\sum \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. | 11. $\sum \sqrt{\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}}$. | 21. $\sum_{n \geq 1} n^{\frac{1}{n^2}} - 1$. |
| 4. $\sum \frac{n^n}{n! \times e^n}$. | 12. $\sum \frac{n!}{n^n}$. | 22. $\sum \frac{(-1)^n \times \ln(n)}{n - \ln(n)}$. |
| 5. $\sum \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$. | 13. $\sum (n^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - (n^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. | 23. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$. |
| 6. $\sum \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$. | 14. $\sum \frac{1}{\ln(n) \ln(\ln(n))}$. | 24. $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{(2n)!}{n! \times n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$. |
| 7. $\sum \cos \left(n^2 \times \pi \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$. | 15. $\sum \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$. | 25. $\sum \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$ où $x \in \mathbb{R}$. |
| 8. $\spadesuit \sum \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$. | 16. $\sum \int_{n \times \pi}^{(n+1) \times \pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$. | 26. $\sum \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 \times (n-k)!} \right)$. |
| | 17. $\spadesuit \sum \ln \left(\cos \left(\frac{x}{2^n} \right) \right)$ où $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. | |
| | 18. $\sum a^{[\ln(n)]}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$. | |

Pour les séries marquées d'un ♠, calculer la somme de la série.

Exercice 6 : Séries de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \times (\ln(n))^\beta}$.

Exercice 7 :

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right)^n$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{u_n - 1}{n}$.

Indication : on pourra utiliser le résultat sur les séries de Bertrand.

Exercice 8 :

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} e^{-1/u_n}$ convergent.

Exercice 9 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

1. Montrer que $u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 10 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1 + b^n}$.

Exercice 11 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(n \times \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ .
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - \ell)$.

Exercice 12 :

Soit, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$: $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

1. Si $p = 0$ ou $p = 1$, montrer que la série de terme général u_n diverge.

On suppose dans la suite que $p \geq 2$ et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $(n + p + 1)u_{n+1} = (n + 1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+1)u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $v_n = (n+1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. En déduire que la série de terme général u_n converge.

5. Déterminer la somme de la série de terme général u_n .

Exercice 13 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $u_n = \sqrt{n} + a \times \sqrt{n+1} + b \times \sqrt{n+2}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la série $\sum u_n$ converge. Dans la suite, on suppose cette condition vérifiée.
2. Calculer la somme de la série $\sum u_n$.

3. Déterminer un équivalent du reste d'indice n de la série $\sum u_n$.

Exercice 14 :

Déterminer un équivalent de la suite des restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right)$.

Exercice 15 :

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ converge et, en utilisant Python, donner une valeur approchée de sa somme à 10^{-3} près.

Exercice 16 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la série $\sum_{k \geq n+1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge. Dans la suite, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $R_n + R_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \times (k-1)}$.
3. Déterminer un équivalent simple de R_n .
4. Déterminer la nature de $\sum R_n$.

Exercice 17 :

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 18 :

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k \times \theta)$.

1. Montrer que la suite (S_n) est bornée.
2. Soit un entier $N \geq 2$. Montrer que : $\sum_{n=1}^N \frac{\sin(n \times \theta)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n \times (n+1)} + \frac{S_N}{N}$.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n \times \theta)}{n}$.

Exercice 19 :

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. En déduire que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \times \binom{2n}{n}$.

Exercice 20 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (\ln(k))^2}$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 21 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

1. Montrer que (a_n) est décroissante. Calculer a_0 et a_1 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$.
3. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.
4. Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante.
5. En déduire un équivalent de a_n et la nature de la série de terme général a_n .

Exercice 22 :

On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Établir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$ montrer que $\sum u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ montrer que $\sum u_n^2$ diverge.

Exercice 23 :

Soit $u = (u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$.

1. Étudier la convergence de la suite u .
2. On pose $v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Déterminer $\alpha > 0$ tel que $\ln(v_n) = \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \ln(v_n)$ converge-t-elle?
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^{3/2}}$.

Séries numériques – Exercices supplémentaires

Exercice 24 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$.

1. Avec Python, tracer la courbe polygonale reliant les points (k, u_k) pour $k \in \llbracket 0, 50 \rrbracket$.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) . Justifier que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. Déterminer un équivalent de u_n .
4. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Justifier que la série $\sum \varepsilon_n \times u_n$ converge.

$$\text{On note } S(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \times u_n.$$

Montrer que, pour tout $S(\varepsilon) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $x = S(\varepsilon)$.
6. Écrire une procédure qui prend $(x, N) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{N}$ comme argument et qui renvoie le $(N+1)$ -uplet $(\varepsilon_k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$.