Fonction Exponentielle

#1èreSpéMaths

Notation

$$\exp(x) = e^x$$

puissance « x »

fonction définie sur $\mathbb{R}$

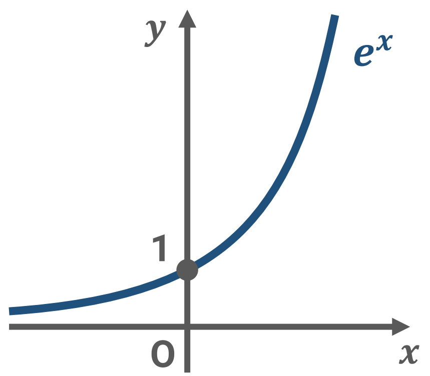
base « e » : un nombre réel

Approximation du nombre « e » :

$$\exp(1) = e \approx 2,718$$

(« e » est irrationnel)

Représentation graphique



Signe

$e^x > 0$

« e^x est strictement positive »

Variation

$e^x \nearrow$

« e^x est strictement croissante »

Propriétés algébriques

$e^1 = e$	$e^0 = 1$	$e^a \times e^b = e^{a+b}$
$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$	$e^{-1} = \dfrac{1}{e}$	$\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$$(e^a)^b = e^{a \times b}$$

Equation

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Inéquation

$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

(car e^x est strictement croissante)

Dérivation :

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
e^{ax+b}	$a.\,e^{ax+b}$

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée

galilee.ac

La justification, la rédaction comptent pour une part importante dans la notation.
Usage de la calculatrice autorisé.

Exercice 1 (3 points) - Simplifier chaque expression.

a) $\dfrac{e^{x^2} \times (e^x)^2}{e^{(x+1)^2}}$ b) $\dfrac{e^{3+x}}{e^{3-x}}$ c) $\dfrac{e^{2x+4} \times e^{-x+1}}{e^{x+5}}$

Exercice 2 (5 points) - Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.

a) $e^{-7x} \times e^{2x+8} = e^{-x+3}$

b) $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{-5x+4}} = 1$

c) $(e^{3x})^2 \times e^{x^2+5} = 1$

d) $e^{1-x} - e^{2x^2} = 0$

Exercice 3 (6 points) - Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations.

a) $e^{x^2+6x+5} \geq 1$

b) $e^{-x^2-3x+5} > e$

c) $e^{2x^2-3x-1} \leq (e^4)^2$

d) $\dfrac{e^{x^2} \times (e^{-5})^3}{(e^x)^2} \leq 1$

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{12x+5}}{x^3}$.

a) Montrer qu'une expression de la dérivée de f est : $f'(x) = \dfrac{(12x-3)e^{12x+5}}{x^4}$.

b) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$ (justifier).

c) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$. Donner les valeurs exactes des extremums le cas échéant.

d) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

Exercice 1 [6 points]

Étudier la dérivabilité de la fonction et calculer l'expression de sa fonction dérivée dans les cas suivants :

$$t(x) = x\mathrm{e}^{2x} \qquad\qquad w(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$$

Exercice 2 [7 points]

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a :
$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$$\mathrm{e}^{2x+1} < \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}$$
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \mathrm{e}^{1-2n} - 1$$

Exercice 3 [7 points]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} - x - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction f et en déduire que $1 + x \leq \mathrm{e}^{x}$ pour tout réel x.
2. En déduire que pour tout réel $x < 1$:
$$\mathrm{e}^{x} \leq \frac{1}{1-x}.$$
3. Déduire de la question 1) que pour tout entier $n \geq 1$:
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq \mathrm{e}.$$