Applications

Table des matières

1 Notion d'application **1**
1.1 Définition . . . 1
1.2 Notion de famille d'éléments d'un ensemble . . . 2
1.3 Applications particulières . . . 2
1.3.1 Application identité . . . 2
1.3.2 Fonction indicatrice d'un ensemble . . . 3
1.4 Notions de restriction et de prolongement . . . 4
1.5 Images directe et réciproque . . . 5

2 Injections, surjections et bijections **5**
2.1 Application surjective (ou surjection) . . . 6
2.2 Application injective (ou injection) . . . 6
2.3 Application bijective (ou bijection) . . . 7

3 Réciproque d'une application bijective **8**
3.1 Composition d'applications . . . 8
3.2 Notion d'application réciproque . . . 9
3.3 Comment montrer que f est bijective et déterminer (en même temps) f^{-1} ? . . . 11

Dans tout ce chapitre, E, F, G et H désignent deux ensembles non vides quelconques.

I – Notion d'application

1) Définition

Intuitivement, une application (ou une fonction) est une courbe. Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^2$ peut être vue comme l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, x^2) où x décrit $\mathbb{R}$. Nous définissons précisément dans un premier temps une application.

Définition (notion d'application) On appelle *application (ou fonction) de E dans F* tout triplet de la forme $f = (E, F, \mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est une partie de $E \times F$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in E,\ \exists!\, y \in F, \qquad (x, y) \in \mathscr{G}$$

Vocabulaire.

- ⋆ Étant donné $x \in E$, l'unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$ est appelé l'image de x par f. On note alors $y = f(x)$. On dit aussi que x est *un* antécédent de y par f.
- ⋆ On dit que E est l'*ensemble de départ* de l'application f et que F est son *ensemble d'arrivée.*
- ⋆ L'ensemble $\mathscr{G}$ est appelé le graphe de l'application f et on a :

$$\mathscr{G} = \left\{(x, f(x)) \,\middle|\, x \in E\right\} \in \mathscr{P}(E \times F)$$

Cette définition n'est pas très maniable. Par exemple, la fonction carrée telle qu'on la connaît (comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est, avec la définition ci-dessus, l'application :

$$f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\})$$

Pour gagner en maniabilité, nous noterons désormais l'application f comme suit :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Il faut avoir en tête qu'il y a trois objets qui caractérisent une application : l'ensemble de départ E, l'ensemble de départ F, et l'expression « $f(x)$ » (qui est contenue dans la définition du graphe $\mathscr{G}$ de f).

Exemple La fonction carrée f introduite précédemment redevient donc :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Définition L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E (ou parfois $\mathscr{F}(E, F)$).

2) Notion de famille d'éléments d'un ensemble

Définition (famille d'éléments d'un ensemble) Soit I un ensemble non vide. On appelle famille d'éléments de E indexée par l'ensemble I tout élément de E^I. Une telle famille peut être notée :

$$f = (\lambda_i)_{i \in I} \qquad \text{au lieu de} \qquad f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & \lambda_i \end{array} \right.$$

où, pour tout $i \in I$, λ_i est un élément de E (cette notation signifie que pour tout $i \in I$, on a $f(i) = \lambda_i$).

Exemple Par exemple, la famille $(\cos(\theta))_{\theta \in \mathbb{R}}$ désigne l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \cos(\theta) \end{array} \right.$$

Remarque (cas particulier important) : l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ est celui des fonctions de $\mathbb{N}$ dans E. Une telle fonction u est plutôt appelée suite. L'image d'un entier $n \in \mathbb{N}$ par u est notée u_n (au lieu de $u(n)$) et la fonction (c'est-à-dire la suite) u est souvent notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (au lieu de u).

Exemple La suite $u = (2^n + n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n + n$$

3) Applications particulières

(a) Application identité

L'application ci-dessous va jouer un rôle particulier dans la suite.

Définition (application identité) On appelle *identité de E*, notée Id_E, l'application suivante :

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad \text{(ici } F = E\text{)}$$

Exemple Le graphe de la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ correspond à la première bissectrice.

(b) Fonction indicatrice d'un ensemble

Une fonction indicatrice permet de *détecter* les éléments d'un ensemble.

Définition (fonction indicatrice) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On appelle *fonction indicatrice* de A l'application notée $\mathbf{1}_A$ suivante :

$$\mathbf{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exemple Pour le choix $E = \mathbb{R}$:

- ⋆ la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ est la fonction constante égale à 1 ;
- ⋆ $\mathbf{1}_{[0,1[\cup[2,3]}$ est définie par :

$$\mathbf{1}_{[0,1[\cup[2,3]} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in [0,1[\cup[2,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- ⋆ la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ est :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Z}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

  Par exemple, $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}(-2) = 1$ tandis que $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}(\pi) = 0$.

Proposition Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Alors :

- ⋆ $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$;
- ⋆ $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$;
- ⋆ $\mathbf{1}_{B\setminus A} = \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_A)$;
- ⋆ $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$.

où 1 désigne ici la fonction constante égale à 1.

Démonstration Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

- ⋆ Soit $x \in E$. On distingue deux cas.
  - — **Premier cas :** $x \in A \cap B$
    Alors $x \in A$, $x \in B$ et $x \in A \cap B$ donc $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1$ et alors :

$$\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$$

— **Deuxième cas :** $x \notin A \cap B$
Ici $x \notin A$, $x \notin B$ et $x \notin A \cap B$ donc $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et alors :

$$\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$$

On a donc bien l'égalité annoncée.

⋆ Pour le calcul de $\mathbf{1}_{\overline{A}}$, on traite à nouveau deux cas suivant que $x \in A$ ou $x \in \overline{A}$.

⋆ En utilisant les deux identités précédentes (et en notant $1 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction constante égale à 1), on a :

$$\mathbf{1}_{B\setminus A} = \mathbf{1}_{B\cap\overline{A}} = \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_{\overline{A}} = \mathbf{1}_B \times (1 - \mathbf{1}_A)$$

⋆ D'après les formules de De Morgan, on sait que $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ donc (en utilisant les identités précédentes) :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}A \cup B = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}} = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}} \times \mathbf{1}_{\overline{B}} &= 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) \\ &= 1 - (1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1_B} + \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée. ■

4) Notions de restriction et de prolongement

Dans ce paragraphe, nous construisons, à partir d'une application donnée $f \in F^E$, une nouvelle application en agissant soit sur l'ensemble de départ de f, soit sur son ensemble d'arrivée.

Définition (restriction) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soit $\tilde{E} \subset E$. On appelle *restriction de f à $\tilde{E}$* l'application $f|_{\tilde{E}}$ de $\tilde{E}$ dans F suivante :

$$f|_{\tilde{E}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{E} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Remarque : l'expression de f et le domaine d'arrivée restent inchangés.

Exemple La restriction de l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ à $\mathbb{R}_+$ est simplement l'application :

$$f|_{\mathbb{R}_+} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Il y a une unique manière de restreindre une application à un sous-ensemble de E. La notion suivante de prolongement d'une application est plus complexe.

Définition (prolongement d'une application) Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $\tilde{E}$ un ensemble *contenant* E (c'est-à-dire $E \subset \tilde{E}$). On appelle *prolongement de f à $\tilde{E}$* toute application $\tilde{f} : \tilde{E} \longrightarrow F$ telle que $\tilde{f}|_E = f$.

Remarque : il n'y a pas unicité dans cette définition. La fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ admet par exemple les prolongements (distincts) suivants sur $\mathbb{R}$:

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Moralement, une restriction revient donc à couper le graphe pour n'en garder qu'une partie, alors qu'un prolongement est une extension du graphe avec un ensemble de départ plus grand.

5) Images directe et réciproque

Les notions suivantes sont à bien comprendre (il faut savoir réécrire précisément les définitions).

Définition (image directe, image réciproque) Soit $f \in F^E$.

- ⋆ Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On appelle *image (directe) de A par f* le sous-ensemble de F noté $f(A)$ suivant :
$$f(A) = \left\{y \in F \,\middle|\, \exists\, a \in A,\ y = f(a)\right\}$$
ce que l'on peut encore écrire :
$$f(A) = \left\{f(a) \,\middle|\, a \in A\right\}$$
- ⋆ Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. On appelle *image réciproque de B par f* le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ suivant :
$$f^{-1}(B) = \left\{x \in E \,\middle|\, f(x) \in B\right\}$$

Remarques :

- ⋆ Il faut être vigilant avec la notation « $f^{-1}(B)$ » : l'application f n'est pas nécessairement bijective.
- ⋆ Si $y \in F$, alors $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des *antécédents* de y par f dans E. En effet :
$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{x \in E \,\middle|\, f(x) \in \{y\}\right\} = \left\{x \in E \,\middle|\, f(x) = y\right\}$$

Exemple ⋆ si $f : x \longmapsto x^2$, alors $f([-1,3]) = [0,9]$ et $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$;
- ⋆ $\sin^{-1}(\{0\}) = \pi\mathbb{Z} = \left\{k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $\sin^{-1}(\{2\}) = \varnothing$;
- ⋆ $\exp(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$.

II – Injections, surjections et bijections

Les trois notions qui suivent sont fondamentales. Elles seront reprises dans de nombreux chapitres (notamment en algèbre linéaire).

Définition (notion d'antécédent) Soient $f \in F^E$ une application et $y \in F$. Un élément x de E est appelé un antécédent dans E de y par f si $f(x) = y$.

Exemple 1. Pour l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$:
   - ⋆ -1 n'admet pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$; par contre, 1 admet deux antécédents, à savoir -1 et 1 ;
   - ⋆ 0 admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}$, à savoir 0.
2. Pour l'application $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$, tout élément x de $\mathbb{R}_+$ admet un unique antécédent par f, à savoir $\sqrt{x}$.
3. Si on considère maintenant l'application $\sin : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}\right.$, alors 0 admet une infinité d'antécédents par sin dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des antécédents de 0 est $\pi\mathbb{Z} \overset{\text{notation}}{=} \left\{k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$ n'admet pas d'antécédent.
4. Pour l'application $\tilde{\sin} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}\right.$, tout élément de $[-1,1]$ admet au moins un antécédent.

Remarque : on note donc que l'étude d'antécédents dépend de l'ensemble d'arrivée et de départ.

1) Application surjective (ou surjection)

Définition (application surjective) Soit $f \in F^E$. On dit que f est *surjective* si tout élément de F admet *au moins* un antécédent par f. Autrement dit,

$$f \text{ est surjective} \iff \forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$

On dit aussi que f est une surjection de E sur F.

Exemple ⋆ L'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est surjective. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$ (y est donc positif !), $\sqrt{y}$ est un antécédent de y par g car $g\big(\sqrt{y}\big) = \big(\sqrt{y}\big)^2 = y$. Donc g est surjective.

⋆ L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas surjective. En effet, -1 n'admet pas d'antécédent par f (la fonction f ne prenant que des valeurs positives ou nulles).

⋆ L'application identité Id_E est surjective.

Remarque : pour montrer qu'une application $f \in F^E$ n'est pas surjective, il suffit d'exhiber un élément de F qui n'admet pas d'antécédent.

✎✎✎ **Exercice** Étudier la surjectivité de :

1. Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|x| \end{array} \right.$ est surjective.
2. Montrer que la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est surjective.
3. $j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array} \right.$
4. $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right.$

Remarque (importante) : une application f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

2) Application injective (ou injection)

Définition (application injective) Soit $f \in F^E$. On dit que f est injective si tout élément de F admet *au plus* un antécédent par f dans l'ensemble de départ E. Autrement dit, si y est un élément de F, alors :

- ou bien y n'admet pas d'antécédent par f ;
- ou bien y admet un et un seul antécédent par f.

On dit aussi que f est une injection de E dans F.

Exemple ⋆ L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est injective. En effet :

- si $y < 0$, alors y n'a pas d'antécédent par f ;
- et si $y \geqslant 0$, alors comme l'équation $y = x^2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ (à savoir $\sqrt{y}$), y admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$.

- ⋆ Par contre, le prolongement $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ de f n'est pas injectif. En effet, le nombre 1 (par exemple) admet <u>deux antécédents</u> par f, à savoir -1 et 1.

1. L'application identité Id_E est injective.

Le point (iii) ci-dessous permet d'étudier en pratique l'injectivité d'une application.

Proposition (étude pratique de l'injectivité) Soit $f \in F^E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f : E \longrightarrow F$ est injective ;

(ii) $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

(iii) $\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

Démonstration Les propositions (ii) et (iii) sont clairement équivalentes (on sait en effet qu'une implication $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à sa forme contraposée).
Montrons maintenant que (i) et (iii) sont équivalentes.

- ⋆ Supposons que (i) soit satisfaite et soit $x_1, x_2 \in E$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors x_1 et x_2 sont des antécédents de $f(x_1)$ par f dans E donc, par injectivité de f, on a $x_1 = x_2$, ce qui démontre (iii).
- ⋆ Supposons maintenant que (iii) soit satisfaite et montrons que f est injective. Soient y un élément de F et $x, x' \in E$ deux antécédents de y par f dans E. Alors $y = f(x) = f(x')$ ce qui implique (d'après (iii)) que $x = x'$. Ainsi, si y admet un antécédent par f dans E, il en admet un et un seul. Donc f est injective et (i) est satisfaite.

Finalement, les trois propositions sont équivalentes. ■

Remarque : pour montrer qu'une application $f \in F^E$ n'est pas injective, il suffit d'exhiber deux éléments distincts de E qui ont la même image par f.

✎✎✎ **Exercice** Étudier l'injectivité des applications suivantes :

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ q & \longmapsto & \dfrac{q+5}{q-2} \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3\,\mathrm{e}^{2x+1} + 5 \end{array} \right.$
3. $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$

Le résultat suivant est réservé aux fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.

Théorème (injectivité et stricte monotonie) Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Démonstration Supposons que f soit strictement croissante et soient $x, x' \in A$. Si $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$ par stricte croissance de f sur A. De même, si $x > x'$, alors $f(x) > f(x')$. Ainsi, si $x \neq x'$, alors $f(x) \neq f(x')$. Finalement, f est injective. ■

Remarque : la réciproque de ce résultat est fausse. Il est possible que la fonction soit injective sans être monotone (et nécessairement, une telle fonction n'est pas continue).

Exemple Étude de l'injectivité de $f : x \longmapsto x - \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

3) Application bijective (ou bijection)

Définition Soit $f \in F^E$. On dit que f est bijective si tout élément de F admet un unique antécédent par f, *i.e.* si :

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x)$$

On dit aussi que f est une bijection de E sur F.

Exemple ⋆ L'application $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}\right.$ est bijective.

Justification.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que y possède un et un seul antécédent par g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y = g(x) \iff y = 2x \iff x = \frac{y}{2}$$

Ainsi, y admet un et un seul antécédent par g dans $\mathbb{R}$, à savoir $\frac{y}{2}$. On en conclut que g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

⋆ L'application identité Id_E est bijective.

La proposition suivante fait le lien avec l'injectivité et la surjectivité.

Proposition Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Démonstration C'est une conséquence immédiate des trois définitions. ■

✎✎✎ **Exercice** Étudier la bijectivité des applications ci-dessous :

1. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}\right.$
2. $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$
3. $h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & 2\,\mathrm{e}^{5x+1} \end{array}\right.$

Remarque : une application peut être ni injective, ni surjective comme par exemple l'application

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}\right.$$

III – Réciproque d'une application bijective

1) Composition d'applications

Définition (composition de deux applications) Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle *composée de g par f* l'application notée $g \circ f$ suivante :

$$g \circ f : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}\right.$$

Remarque : attention au sens de composition !

$$\textbf{Action de } g\circ f \ : \quad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & & \\ & & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition Soient E, F, G et H quatre ensembles, $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$. Alors :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \qquad \text{(associativité de la composition)}$$

On dit que la composition des applications est *associative* et on peut noter $h \circ g \circ f$ la composée (sans parenthèses).

Démonstration immédiat ■

Remarques :

- ⋆ Par contre, la composition n'est pas une opération commutative. Considérer par exemple, les éléments f et g de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tels que $f : x \longmapsto x+1$ et $g : x \longmapsto x^2$.
- ⋆ D'ailleurs, si $g \circ f$ a un sens, il n'est pas nécessairement possible de définir $f \circ g$!
- ⋆ Pour tout $f \in E^E$, on a :
$$f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$$
On dit que Id_E est *élément neutre* pour la composition des applications.

Proposition (composée de deux injections ou surjections ou bijections) Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

- ⋆ Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- ⋆ Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- ⋆ Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Démonstration

- ⋆ On suppose que f et g sont injectives. Soient $x, x' \in E$. tel que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. On a alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, on a $f(x) = f(x')$. Par suite $x = x'$ puisque f est injective. Finalement, $g \circ f$ est injective.
- ⋆ On suppose que f et g sont surjectives. Soit $z \in G$. Comme $g : F \longrightarrow G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Ensuite, $f : E \longrightarrow F$ est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi :
$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$
Donc x est un antécédent de z par l'application $g \circ f$ dans E. Par conséquent, $g \circ f$ est une application surjective.
- ⋆ Si f et g sont bijectives, alors elles sont injectives et surjectives, ce qui implique (d'après les deux premiers points) que $g \circ f$ est injective et surjective, donc bijective. ■

Exemple La fonction exp est injective sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x^2$ est injective sur $\mathbb{R}_+$ donc $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est injective sur $\mathbb{R}_+$.

2) Notion d'application réciproque

Définition (réciproque) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle *réciproque de f* toute application $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

Exemple ⋆ L'application $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ admet Id_E pour réciproque (puisque $\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$).

⋆ L'application $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective de réciproque $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

La proposition suivante permet de définir la réciproque d'une application bijective.

Théorème Soit $f \in F^E$.

⋆ L'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si elle possède une réciproque.

⋆ Dans ce cas, une telle application réciproque est unique ; on la note f^{-1}.

Démonstration On commence par démontrer l'équivalence.

($\Longrightarrow$) Supposons que f soit bijective. Notons g l'application de F dans E qui à tout élément y de F fait correspondre l'unique antécédent x de y par f dans E.

— Soit $x \in E$. Alors $g(f(x))$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par f dans E, à savoir x, donc :

$$g(f(x)) = x = \mathrm{Id}_E(x)$$

D'où $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

— Soit $y \in E$. Alors $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f dans E. Donc $f(g(y)) = y$. Ainsi, $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Il existe donc bien $g \in E^F$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

($\Longleftarrow$) Supposons maintenant que f admette une réciproque $g \in E^F$ et montrons que f est bijective en montrant qu'elle est injective et surjective.

— Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. En appliquant la fonction g, on obtient que $g(f(x)) = g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, soit encore $x = x'$ (puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_E$). Donc f est injective.

— Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = y$ (puisque $f \circ g = \mathrm{Id}_F$) donc $g(y)$ est un antécédent de y par f dans E donc f est surjective.

Nous avons donc démontré l'équivalence annoncée, montrons maintenant l'unicité. Supposons que $g, h \in E^F$ soient des applications réciproques de f. Pour tout $y \in F$, on a :

$$g(y) = g(\mathrm{Id}_F(y)) = g\big((f \circ h)(y)\big) = (g \circ f \circ h)(y) = (g \circ f)(h(y)) = \mathrm{Id}_E(h(y)) = h(y)$$

donc $g = h$. ∎

Remarques :

⋆ Si $f \in F^E$ est bijective, alors on a les égalités :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

⋆ Soient $f \in F^E$ et $B \in \mathscr{P}(F)$. L'image réciproque $f^{-1}(B)$ par l'application f a un sens même si f n'est pas bijective. Si f est bijective, alors $f^{-1}(B)$ (image réciproque de B par l'application f) est également l'image directe de l'ensemble B par l'application f^{-1}.

⋆ Si $f \in F^E$ est bijective, alors :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \qquad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \tag{1}$$

⋆ Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la propriété (1) signifie géométriquement que le graphe de f et celui de f^{-1} sont (dans un repère orthogonal) symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

- ⋆ Si f est bijective, alors l'application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est bijective de réciproque :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

- ⋆ Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective de réciproque :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration ⋆ Comme f est bijective de E sur F, son application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ existe et on a les égalités :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

D'après la proposition 2, l'application f^{-1} est bijective de réciproque $(f^{-1})^{-1} = f$.

⋆ L'application $f^{-1} \circ g^{-1}$ est bien définie puisque f et g sont bijectives. Pour montrer que $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective de réciproque $h = f^{-1} \circ g^{-1}$, il suffit, d'après la proposition 2, de vérifier que :

$$(g \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_G \qquad \text{et} \qquad h \circ (g \circ f) = \mathrm{Id}_E$$

Or, par associativité de la composition :

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$$

On démontre la deuxième identité de la même manière. ■

Remarque : on savait déjà que $g \circ f$ est bijective (puisque f et g le sont). Nous l'avons redémontré en obtenant l'application réciproque.

3) Comment montrer que f est bijective et déterminer (en même temps) f^{-1} ?

Si $f \in F^E$ est une application, on démontre (*à la main*) l'assertion :

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x)$$

On se donne donc $y \in F$ et on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$.

Exemple La réciproque de l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}\right.$ est :

$$f^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y+1}{1-y} \end{array}\right.$$

✎✎✎ **Exercice** Montrer que l'application $g : x \longmapsto \sqrt{2x-4}$ réalise une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J à déterminer. Déterminer ensuite g^{-1}.