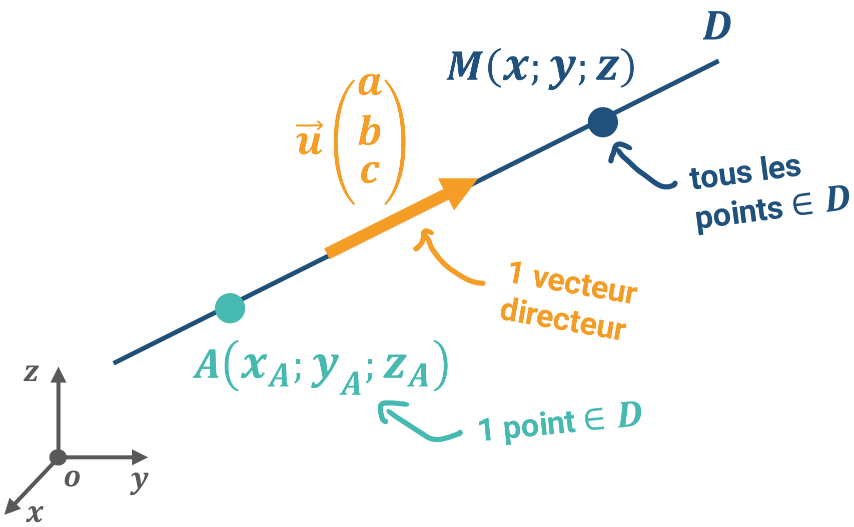
Géométrie dans l'Espace - 3

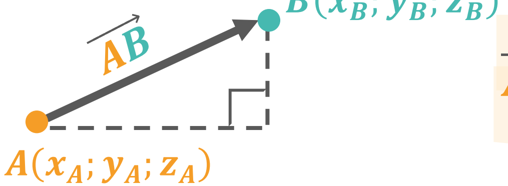
Représentations Paramétriques d'une droite



$$D : \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

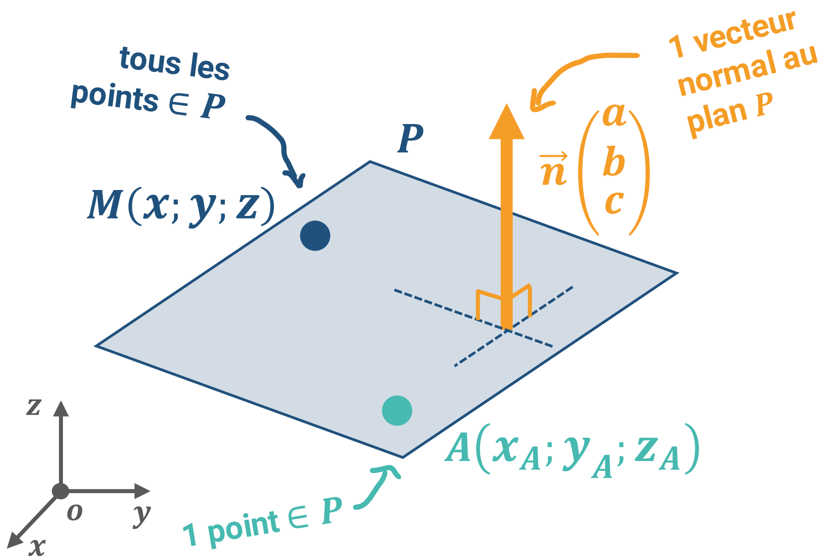
paramètre $\in \mathbb{R}$

Calculer les coordonnées d'un vecteur avec 2 points ?



$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$$

Équations Cartésiennes d'un plan



$$P : ax + by + cz + d = 0$$

?

Comment trouver la constante « d » ?

Si $A \in P$ alors : $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$

$$\Leftrightarrow d = -ax_A - by_A - cz_A$$

Exercice 1 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$.

1. On note (d_1) la droite passant par les points $A\,(1\,;\,-2\,;\,-1)$ et $B\,(3\,;\,-5\,;\,-2)$.

   (a) Montrer qu'une représentation paramétrique de (d_1) est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Le point $C\,(-2\,;\,2{,}5\,;\,1)$ appartient-il à (d_1) ?

2. La droite (d_2) est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = r \\ y = 7 - 3r \\ z = -8 + r \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}$.

   Déterminer les coordonnées de E point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).

3. (d_3) est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - s \\ y = -1 + 2s \\ z = -s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$.

   Démontrer que (d_1) et (d_3) ne sont pas coplanaires.

4. On considère le plan P passant par le point $F\,(0\,;\,0\,;\,4)$ et parallèle au plan $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$. Déterminer le point d'intersection de la droite (d_1) avec le plan P.

Exercice 2 :

L'espace est rapporté au repère $(O\,;\,i\,,\,j\,,\,k)$.

On considère les points $A(1\,;\,2\,;\,-1)$, $B(2\,;\,-1\,;\,1)$, $C(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $D(3\,;\,-1\,;\,1)$.

On donne des représentations paramétriques des droites d et d' :

$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t - 2 \\ z = 2t + 4 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 1 + 4t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Les droites d et (AB) sont parallèles.
2. La droite d' est parallèle au plan (ABC).
3. D appartient à la droite d'.
4. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.
5. Les droites d et (AD) sont coplanaires.

Exercice 1 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$.

1. On note (d_1) la droite passant par les points $A\,(1\,;\,-2\,;\,-1)$ et $B\,(3\,;\,-5\,;\,-2)$.

   (a) Montrer qu'une représentation paramétrique de (d_1) est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$

   (b) Le point $C\,(-2\,;\,2{,}5\,;\,1)$ appartient-il à (d_1) ?

2. La droite (d_2) est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = r \\ y = 7 - 3r \\ z = -8 + r \end{cases} \quad , \quad r \in \mathbb{R}.$

   Déterminer les coordonnées de E point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).

3. (d_3) est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - s \\ y = -1 + 2s \\ z = -s \end{cases} \quad , \quad s \in \mathbb{R}.$

   Démontrer que (d_1) et (d_3) ne sont pas coplanaires.

4. On considère le plan P passant par le point $F\,(0\,;\,0\,;\,4)$ et parallèle au plan $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$. Déterminer le point d'intersection de la droite (d_1) avec le plan P.

Exercice 2 :

L'espace est rapporté au repère $(O\,;\,i\,,\,j\,,\,k)$.

On considère les points $A(1\,;\,2\,;\,-1)$, $B(2\,;\,-1\,;\,1)$, $C(2\,;\,-1\,;\,3)$ et $D(3\,;\,-1\,;\,1)$.

On donne des représentations paramétriques des droites d et d' :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t - 2 \\ z = 2t + 4 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 1 + 4t' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Les droites d et (AB) sont parallèles.
2. La droite d' est parallèle au plan (ABC).
3. D appartient à la droite d'.
4. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.
5. Les droites d et (AD) sont coplanaires.

Exercice 1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0\,;\,1\,;\,1)$ et $B(-2\,;\,2\,;\,-1)$.
- la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. (a) Montrer que les droites (AB) et D ne sont pas parallèles.
   (b) Montrer que les droites (AB) et D ne sont pas sécantes.

Dans la suite, la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite D de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Vérifier que le plan P d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite D et passe par le point M.
4. Montrer que le plan P et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\,;\,3-3u\,;\,-1)$.
5. (a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite D.
   (b) Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
6. (a) Exprimer MN^2 en fonction de u.
   (b) En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal où l'on considère :

- les points $A(2\,;\,-1\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,-3)$, $C(6\,;\,6\,;\,1)$ et $E(1\,;\,2\,;\,4)$;
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x-y-z+4=0$.

1. (a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.
   (c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.
2. (a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

(d) Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide $ABCE$ est égal à 16,5 unités de volume.

Exercice 3 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants : $A(0\,;\,3\,;\,-1)$, $B(4\,;\,1\,;\,2)$, $C(3\,;\,-1\,;\,7)$ et $D(0\,;\,6\,;\,6)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C puis calculer son aire.
3. Soit $\vec{n}(1\,;\,-1\,;\,2)$ un vecteur de l'espace.
   (a) Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal de (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
4. Soit d la droite orthogonale à (ABC) passant par D.
   (a) Donner une représentation paramétrique de d.
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite d avec le plan (ABC).
5. (a) Calculer la valeur exacte de la distance DH.
   (b) En déduire la valeur exacte du volume du tétraèdre $ABCD$.
6. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ arrondie au degré près.