

4 Formes Indéterminées (F.I.) :

" $+\infty - \infty$ " ; " $\infty \times 0$ " ; " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ "

Exemples de suites avec F.I. à lever :

<p>"$+\infty - \infty$" "$n^2 - 2n + 1$" ou "$\frac{n^2 - 2n}{n^3 - 2n + 1}$" : "$\frac{\infty}{\infty}$"</p>	
<p>factoriser par le terme du plus haut degré : "$n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$"</p>	
<p>"$n - \sqrt{n^2 + 2}$" : "$+\infty - \infty$"</p> <p>Lorsqu'un terme est un radical</p> <p>Multiplier et diviser par le conjugué :</p> $\frac{(n - \sqrt{n^2 + 2}) \times (n + \sqrt{n^2 + 2})}{(n + \sqrt{n^2 + 2})}$	<p>"$5^n - 3^n$" : "$+\infty - \infty$"</p> <p>1. Factoriser par la base la plus élevée : "$5^n \left(1 - \frac{3^n}{5^n}\right)$"</p> <p>2. $\frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n$</p> <p>(voir la fiche « suite géométrique » de 1^{ère})</p>

<p>"$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$" :</p>	<p>$u_n \nearrow$ ou $u_n \searrow$: (suite monotone)</p>	
<p>1. Somme des termes d'une suite géo. : $S = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$</p> <p>2. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ (voir la fiche « suite géométrique » de 1^{ère})</p>	<p>u_n est croissante et majorée</p>	<p>u_n est décroissante et minorée</p>
<p>$\hookrightarrow u_n$ converge \hookrightarrow</p> <p>Théorème de la limite monotone !</p>		
<p>"$u_n = \dots (-1)^n$ ou ... $\cos(n)$ ou ... $\sin(n)$" :</p>		
<p>$-1 \leq (-1)^n \leq 1$</p> <p>⋮</p> <p>⋮</p> <p>⋮</p> <p>$\Leftrightarrow +\infty \leq u_n \leq +\infty$ (diverge)</p> <p>Théorème de comparaison !</p>	<p>$-1 \leq \cos(n) \leq 1$</p> <p>⋮</p> <p>⋮</p> <p>⋮</p> <p>$\Leftrightarrow 3 \leq u_n \leq 3$ (converge)</p> <p>Théorème des Gendarmes !</p>	

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Soit (u_n) une suite. Donner la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. Démontrer que toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2.$$

1. À l'aide de la calculatrice, calculer les 6 premiers termes de la suite (on donnera les résultats à 10^{-2} près).
2. Quelles conjectures peut-on faire concernant cette suite ?
3. Démontrer par récurrence que la suite est minorée par -4 .
4. En déduire que la suite est décroissante.
5. Justifier que la suite converge.

Exercice 3

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{-n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 3n - 2}$,
2. $u_n = 3^n - 6^n$,
3. $u_n = n - \sqrt{n}$,
4. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
5. $u_n = \frac{n}{n + \cos n}$.

Exercice 1

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise. En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail. Pour n entier naturel, on note a_n le nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi, $a_0 = 200$.

Partie A

On admet que, pour n entier naturel, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = a_n - 3000$$

- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85.
- Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
- En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$$

- Déterminer le sens de variations de la suite (a_n) .

2. Compléter la fonction suivante pour qu'elle détermine le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise :

```
def seuil():
    u=200
    n=0
    while u ... :
        n = ...
        u = ...
    return (n)
```

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$$

3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2

Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}$$

On admet que u_n est bien définie i.e. u_n n'est jamais égal à -1 . L'objectif est d'étudier la suite u avec deux méthodes. Les résultats de la partie A ne devront pas être utilisés pour la partie B.

Partie A

Soit v la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n} + 1$$

Là encore, on admet que la suite v est bien définie i.e. u_n n'est jamais nul.

- Démontrer que la suite v est arithmétique, on précisera la raison et le premier terme.
- Déterminer alors v_n puis u_n en fonction de n .

Partie B

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2+n}$$

Exercice 3

On considère les suites u et v définies par :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. a) Calculer v_0 .
- b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
- c) En déduire que la suite v est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- d) Exprimer v_n en fonction de n .

2. On définit la suite (w_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u_n}{v_n}$$

- a) Calculer w_0 .
- b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et v_n .
- c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = w_n + 2$.
- d) Exprimer w_n en fonction de n .

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n-1}{2^n}$$

4. Question bonus : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse ne sera pas pénalisée.

- Affirmation 1 :** Si (u_n) est une suite telle que $n \geq 35$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Affirmation 2 :** Si (u_n) et (v_n) sont des suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ avec $v_n > 0$ pour tout entier naturel n alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.
- Affirmation 3 :** La suite (p_n) définie par $p_n = n^2 - 42n + 4$ pour tout entier naturel n est strictement décroissante.
- Affirmation 4 :** La suite (w_n) définie par $w_n = -3n + 4$ pour tout entier naturel n est majorée par 4.

Exercice 2

Dans cet exercice, les deux questions sont indépendantes.

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout entier naturel n . Démontrer par récurrence que $u_n = 1 - 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer la limite des suites suivantes.

a) $u_n = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{n + 1}$

b) $v_n = 3n^2 - 8n + 1$

c) $t_n = \left(n^2 - \frac{3}{n^2}\right)(6 - n)$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3 - u_n}{8 - 5u_n}$ pour tout entier naturel n . L'objectif de cet exercice est d'étudier le comportement global de cette suite.

- A l'aide du tableur de la calculatrice, donner les valeurs de u_1 , u_2 et u_3 (si besoin, arrondies au millième) et conjecturer le sens de variation de cette suite.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$ par $f(x) = \frac{3 - x}{8 - 5x}$. Déterminer la fonction dérivée f' de f puis donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

L'usage de la calculatrice est autorisé, à condition que le mode Examen soit activé.

Les élèves **bénéficiant d'un tiers-temps** ne traiteront pas les questions marquées d'une étoile (*).

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse ne sera pas pénalisée.

1. (*) **Affirmation 1** : Si (u_n) est une suite telle que $u_n < -15\,000\,000$ pour tout entier $n \geq 35$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
2. **Affirmation 2** : Si (u_n) et (v_n) sont des suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ avec $v_n > 0$ pour tout entier naturel n alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.
3. **Affirmation 3** : La suite (p_n) définie par $p_n = n^2 - 42n + 4$ pour tout entier naturel n est strictement décroissante.
4. **Affirmation 4** : La suite (w_n) définie par $w_n = -3n + 4$ pour tout entier naturel n est majorée par 4.

Exercice 2

Dans cet exercice, les deux questions sont indépendantes.

1. (*) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout entier naturel n .
Démontrer par récurrence que $u_n = 1 - 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer la limite des suites suivantes.

(a) $u_n = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{n + 1}$

(b) $v_n = 3n^2 - 8n + 1$

(c) (*) $t_n = \left(n^2 - \frac{3}{n^2}\right)(6 - n)$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3 - u_n}{8 - 5u_n}$ pour tout entier naturel n .

L'objectif de cet exercice est d'étudier le comportement global de cette suite.

1. À l'aide du tableur de la calculatrice, donner les valeurs de u_1, u_2 et u_3 (si besoin, arrondis au millièmes) et conjecturer le sens de variation de cette suite.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$ par $f(x) = \frac{3-x}{8-5x}$.
Déterminer la fonction dérivée f' de f puis donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question, une ou plusieurs réponses sont possibles.

Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point et chaque mauvaise réponse enlève 0,5 point.

Sur votre copie, recopier le **numéro de la question** et **la ou les lettres** correspondant aux réponses choisies.

Aucune justification n'est attendue pour cet exercice.

	Énoncé	A	B	C	D
1	La suite (u_n) définie par $u_n = 5 \times (-1)^n$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
2	La suite (v_n) définie par $v_n = n - 5n^2$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
3	La suite (w_n) définie par $w_n = n - 5 \sin(n)$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
4	Pour tout entier naturel n , on considère la propriété $P(n) : n^3 > 3n$	$P(0)$ est vraie	$P(1)$ est vraie	$P(2)$ est vraie	$P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$
5	La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$	Croissante	Décroissante	Majorée par 3	Minorée par 3
6	La suite (a_n) définie telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2n+1} < a_n < \frac{3n+1}{n^2+2}$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
7	La suite géométrique (b_n) de premier terme $b_0 = -3$ et de raison $\frac{1}{4}$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
8	La suite (c_n) définie par $5^n - 7^n$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite

Exercice 2 (5 points)

Calculer les limites des suites suivantes en utilisant la méthode la plus adaptée.

1. $u_n = \frac{5n^2 - 3n}{n^2 + 1}$

2. $v_n = \frac{(-1)^n + 8}{\sqrt{n}}$

3. $w_n = e^n + n^2 + 1$

4. $t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+4}$

$$5. s_n = 5 + 5 \times \frac{1}{4} + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Exercice 3 (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. On souhaite déterminer à partir de quel rang $u_n \geq 20\,000$. Rédiger un algorithme en langage Python permettant de répondre à la question.
6. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n + 1$.
 - (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
 - (b) En déduire que, pour tout entier n , on a : $u_n = 3^n + n - 1$.
 - (c) Déterminer l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n .

BONUS (3 points)

(a_n) est une suite telle que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = \frac{2n+2}{n+2}$$

Déterminer la limite de la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)$.