

TD M2 - Loi de la quantité de mouvement

Table des matières

1	Tir d'un projectile	1
2	Plateau vibrant	3
3	Pendule simple	3
4	Chute d'un caillou dans un puits	5
5	Glissement avec frottements solide	6

1 Tir d'un projectile

Un obus de masse $m = 1 \text{ kg}$ est tiré par un char à la date $t = 0$ au niveau du sol à partir d'un point O qui sera pris comme origine du repère cartésien tel que l'axe (Oz) coïncide avec la verticale ascendante. Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ est uniforme tout au long de la trajectoire avec $\|\vec{g}\| = g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et les forces de frottement sont négligées (figure 1). Le vecteur vitesse initial contenu dans le plan (Oxz) a pour norme $\|\vec{v}_0\| = v_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$ et sa direction variable est telle que $(\vec{e}_x, \vec{v}_0) = \alpha$

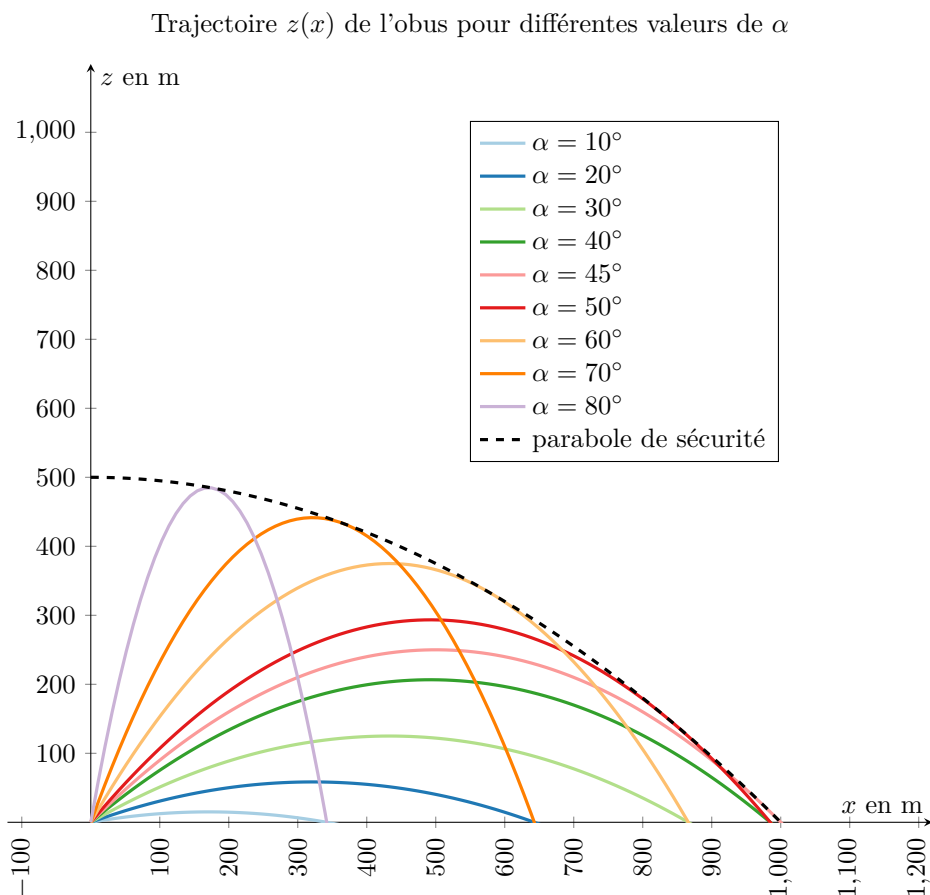


Figure 1 – Chute libre parabolique sans frottements

1.1. Déterminer les équations $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement de l'obus puis l'équation de sa trajectoire $z(x)$, en fonction de v_0 , g et α .

1.2. Exprimer en fonction de v_0 , g et α , le temps t_s nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude et les coordonnées de ce point S ainsi atteint. Faire l'application numérique pour $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$ et $\alpha_3 = 90^\circ$.

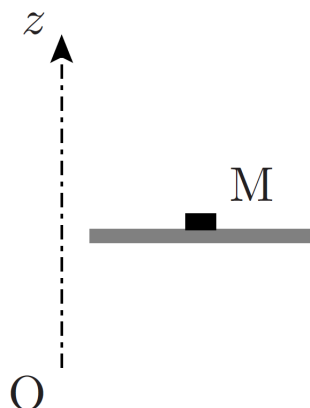
1.3. Déterminer la portée maximale x_p du tir quand la cible est située à la même altitude que le char.

1.4. La norme du vecteur vitesse v_0 étant fixée, déterminer la (les) valeur(s) de l'angle α permettant d'atteindre une cible située à la même altitude que le char et à une distance $d < x_p$ de l'origine du tir.

1.5. La norme du vecteur vitesse v_0 étant donnée, montrer qu'une cible de coordonnées (x_c, z_c) peut être atteinte si $\tan(\alpha)$ vérifie une équation du second degré que l'on précisera en fonction de v_0 , g , x_c et z_c . On rappelle que $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$.

1.6. En étudiant le signe du discriminant Δ de cette équation du second degré en $\tan(\alpha)$, trouver l'équation de la **parabole de sécurité**, qui délimite l'ensemble des points accessibles par le projectile de ceux qui ne le sont pas, toujours pour une vitesse initiale de norme v_0 donnée.

2 Plateau vibrant



On dépose sur un plateau horizontal un objet M de masse m . Le plateau a un mouvement de translation sinusoïdal vertical : la cote $z(t)$ de tout point du plateau, mesurée suivant un axe (Oz) ascendant, est de la forme $z(t) = Z_m \cos(2\pi ft)$ où Z_m représente l'amplitude du mouvement et f sa fréquence. On note $\vec{R}(t) = R(t)\vec{u}_z$ la réaction exercée par le plateau sur l'objet M au cours du mouvement.

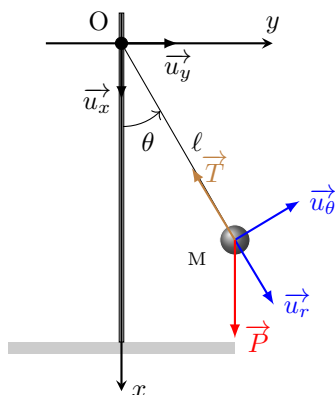
2.1. On suppose le contact entre l'objet et le plateau constamment maintenu. Déterminer l'expression de la réaction $R(t)$ en fonction de m , g , Z_m et f .

2.2. Quelle est l'expression de la valeur minimale de $R(t)$ au cours du temps, notée R_{min} .

2.3. À quelle condition sur f le contact entre l'objet et le plateau est-il effectivement constamment maintenu ?

2.4. Sous cette hypothèse, pour quelles positions du plateau la réaction $R(t)$ est-elle minimale au cours du mouvement ?

3 Pendule simple



On considère un pendule simple de longueur $\ell = 80$ cm auquel on a accroché un mobile M de masse $m = 100$ g. On donne le module du champ de pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et les frottements sont négligés. On lâche M sans vitesse initiale avec un angle $\theta_0 = 10^\circ$. On note $T = \|\vec{T}\|$ la norme de la tension du fil.

3.1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ puis l'écrire avec l'approximation des petits angles : $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$. La résolution numérique de l'équation différentielle non linéarisée est présentée sur la figure 2.

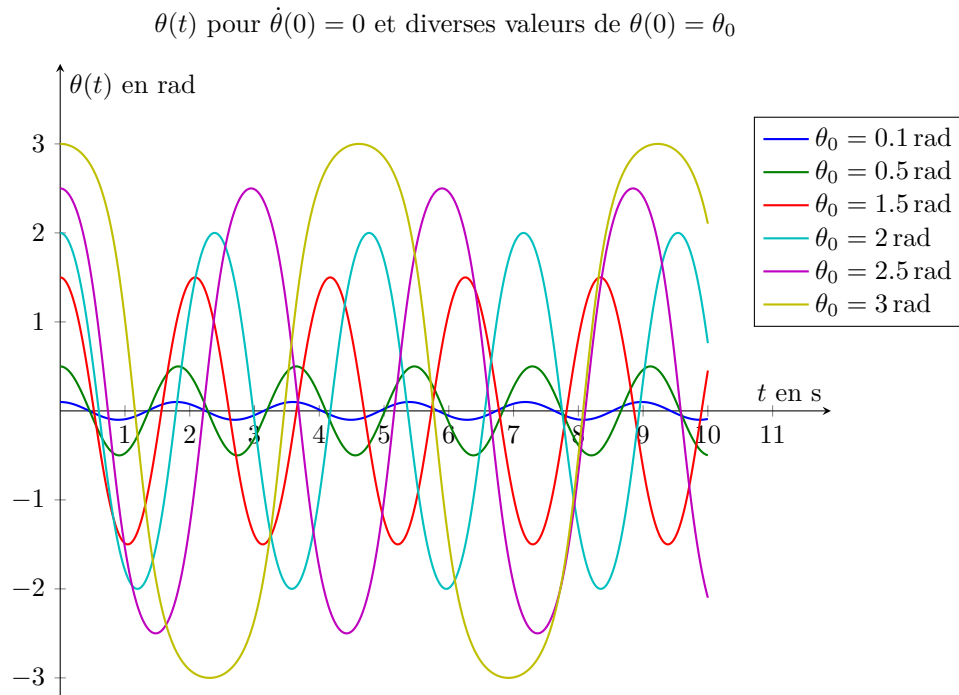


Figure 2 – Tracé des solutions de l'équation différentielle pour diverses conditions initiales

3.2. Résoudre cette équation différentielle linéarisée et calculer la période propre $\mathcal{T}_0$ du mouvement.

3.3. En intégrant l'équation du mouvement non linéarisée entre $t_0 = 0$ et t quelconque, après l'avoir multipliée par $\dot{\theta}(t)$, montrer que :

$$\ell \dot{\theta}^2(t) = 2g (\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0))$$

Bien entendu, quand nous l'aurons étudiée au prochain chapitre, on préférera utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour trouver cette relation.

3.4. Exprimer la norme de la tension du fil $T(\theta)$ en fonction de θ , m , g et θ_0 . Quand est-elle maximale ? Calculer la valeur correspondante T_{max} .

3.5. Commenter l'allure des courbes de la figure 2 et du diagramme de phase de la figure 3.

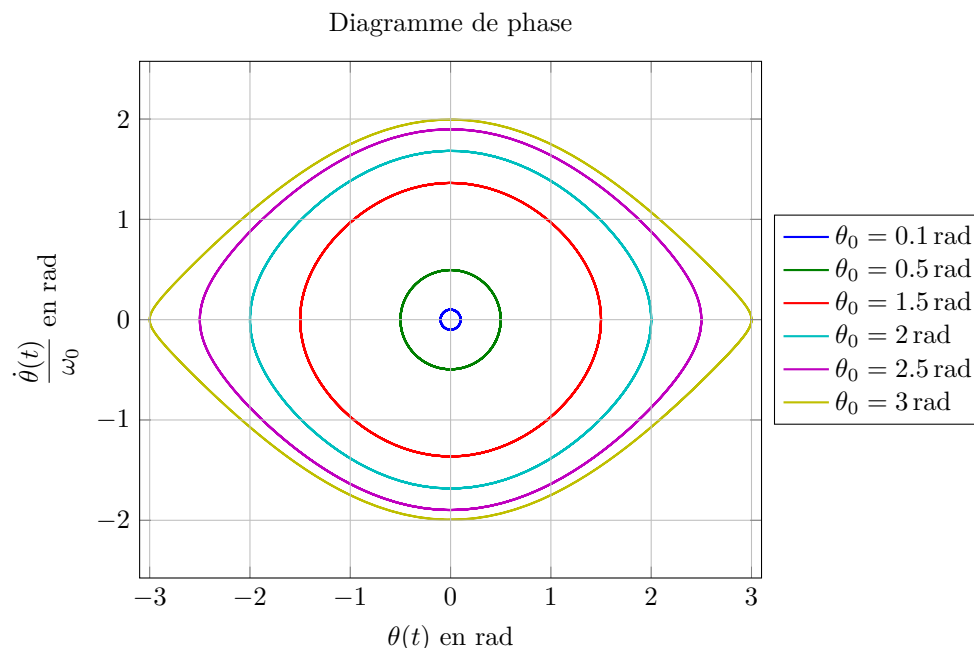


Figure 3 – Diagramme de phase du pendule pour diverses conditions initiales

4 Chute d'un caillou dans un puits

Un garçon jette, sans vitesse initiale, un caillou de masse m dans un puits très profond. La surface de l'eau se trouve à une profondeur h du point de lancé du caillou. Les frottements de l'air sont négligés et l'évolution du caillou dans l'eau se fait en présence d'une force de frottement du type $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. On donne $m = 200 \text{ g}$, $\alpha = 0,2 \text{ kg.s}^{-1}$ et $h = 8 \text{ m}$. L'axe (Oz) est pris vertical ascendant avec pour origine la surface de l'eau du puits.

4.1. Exprimer la vitesse algébrique du caillou $v(t) = \dot{z}(t)$ lors de sa chute dans l'air et déterminer l'instant t_1 et sa vitesse algébrique v_1 lors du contact avec l'eau.

4.2. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $v(t) = \dot{z}(t)$ pour $t > t_1$ et montrer que $v(t)$ atteint une vitesse limite v_ℓ que l'on déterminera, puis résoudre cette équation différentielle pour exprimer $v(t)$ en fonction de v_1 , t_1 , v_ℓ et $\tau = \frac{m}{\alpha}$.

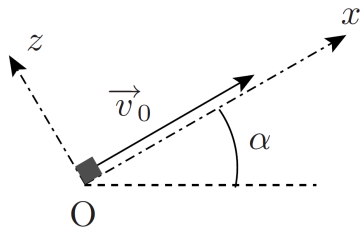
4.3. Tracer le graphe de la vitesse $v(t)$ en fonction du temps (cas a).

4.4. Quelle devrait être la hauteur h_ℓ du lâché pour que dans l'eau, le caillou évolue avec un mouvement rectiligne uniforme? Tracer le graphe de $v(t)$ correspondant (cas b).

4.5. Tracer l'allure de $v(t)$ dans le cas où $h < h_\ell$ (cas c).

4.6. Trouver l'expression de $z(t)$ pour $t > t_1$.

5 Glissement avec frottements solide



Un petit parallélépipède, assimilable à un point matériel M de masse m , est lancé depuis le point origine O d'un plan (Oxy) incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, avec un vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ dirigé suivant la ligne de plus grande pente (Ox) et vers le haut. La position du point M à l'instant t est repérée par son abscisse $x(t)$. On tient compte des forces de frottement solide avec un coefficient de frottement f , par contre les frottements fluide de l'air peuvent être négligés.

- 5.1. Montrer qu'au début du mouvement, c'est-à-dire tant qu'il y a glissement vers le haut, l'accélération $\ddot{x}$ du mobile est du type $\ddot{x} = -Kg$. Exprimer K en fonction de α et f .
- 5.2. Quelle distance d le mobile parcourt-il avant que sa vitesse ne s'annule ?
- 5.3. À quelle condition sur l'angle α le mobile s'arrête-t-il définitivement ?