

Réduction et polynôme annulateur – TD₁₀

Obtenir des informations à partir d'un polynôme annulateur

Trace, déterminant, rang

Exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = a \times M + \text{tr}(M).I_n$.

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de φ .
2. Déterminer le déterminant de φ .

Exercice 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

Montrer que le rang de A est pair et que la trace de A est un entier.

Diagonalisabilité

Exercice 4 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A^\top = I_n$.

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $u(M) = A \times M$.

1. Montrer que u est un automorphisme si, et seulement si, A est inversible.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $(P(u))(M) = P(A) \times M$.
3. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A).A$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 7 :

Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$A = B + C, \quad A^2 = B + 2C \quad \text{et} \quad A^3 = B + 4C.$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. En déduire que B et C sont diagonalisables.

Exercice 8 :

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_3$ et $A \neq I_3$.

1. Déterminer le spectre réel de A .
2. Déterminer le spectre complexe de A .

Exercice 9 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $n \geq 2$ tels que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre, montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Puissance et inverse

Exercice 10 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \geq 1$. On suppose que $A^{2026} = 0$.
Montrer que $A^n = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On suppose que $f^{2026} = 0$.
Montrer que $f^n = 0$.

Exercice 11 :

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.
On dit que l'inverse de A est un polynôme en A .
2. Traduire le résultat de la question 1. en termes d'endomorphismes.

Équations matricielles

Exercice 12 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2$ et $\text{tr}(A) = n$. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 13 :

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 14 :

1. Donner un polynôme annulateur (non nul) de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$. Montrer que M est diagonalisable et donner les valeurs propres possibles de M .
3. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 15 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B n'ont pas de valeurs propres communes.

1. Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \times M = M \times B$ si, et seulement si, M est la matrice nulle.

Matrices définies par blocs

Exercice 16 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme fixé.

1. Écrire par blocs la matrice $P(M)$ à l'aide de $P(A)$ et $P'(A)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Exercice 17 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Exercice 18 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Exercice 19 :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que M soit diagonalisable.

Trigonalisation

Exercice 20 :

1. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. En déduire les puissances de A .

Exercice 21 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. Justifier que la matrice A est trigonalisable et montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

Montrer que u est trigonalisable.

Exercice 23 :

Soit u et v deux endomorphismes de E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. On suppose que u et v commutent.

1. Justifier que u et v sont trigonalisables.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont triangulaires supérieures.