

Chapitre 4

Diagonalisation des matrices carrées

Sommaire

4.1 Éléments propres	81
4.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres	81
4.1.2 Sous espace propre	82
4.1.3 Concaténation de sous-espaces propres	82
4.1.4 Polynômes annulateurs	83
4.1.5 Méthodes pour trouver les valeurs propres d'une matrice	84
4.1.6 Déterminer une base des sous-espaces propres d'une matrice	85
4.2 Théorèmes de réduction	85
4.2.1 Matrice diagonalisable	85
4.2.2 Matrices symétriques	86
4.3 Exemples de diagonalisation et applications	87
4.3.1 Cas des matrices carrées d'ordre 2	87
4.3.2 Puissances de matrices	87
4.3.3 Etude du commutant d'une matrice carrée	88
4.3.4 Sujets ECRICOME 2003 / EHDEC 2014	88
4.3.5 Valeurs propres et vecteurs propres avec Python	91

Les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

Ce chapitre a de nombreuses applications que ce soit en analyse pour la résolution des problèmes d'extrema ou en probabilités pour l'étude des chaînes de Markov.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel étant donné, l'idée est de choisir une base dans laquelle sa matrice est diagonale ou, à défaut, aussi simple que possible.

Avertissement, dans le programme ne figure que la diagonalisation des matrices carrées et pas des endomorphismes. Il y a donc des éléments donnés dans ce chapitre qui sont à la marge du programme.

Compétences attendues. $\Rightarrow$ Montrer qu'une matrice carrée A est ou non inversible à l'aide de l'une des méthodes suivantes :

- en faisant un produit matriciel si l'inverse est suggérée,
- à l'aide d'un polynôme annulateur de A
- en exhibant une combinaison linéaire sur les lignes ou les colonnes de A , • en cherchant une réduite de Gauss de A .

$\Rightarrow$ Déterminer les valeurs propres d'une matrice carrée A à l'aide de l'une des méthodes suivantes :

- en utilisant la définition des valeurs propres si les vecteurs propres sont donnés,
- à l'aide d'un polynôme annulateur,
- en cherchant une réduite de Gauss de la matrice $A - \lambda I_n$.
- ⇒ Déterminer les sous-espaces propres d'une matrice.
- ⇒ Déterminer si une matrice A est diagonalisable et, si c'est le cas, expliciter une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
- ⇒ Calculer les puissances d'une matrice carrée A à l'aide de l'une des méthodes suivantes :
 - en déterminant une formule sur les puissances de A puis en la démontrant par récurrence,
 - avec la formule du binôme de Newton
 - à l'aide d'un polynôme annulateur de A
 - en se ramenant aux puissances d'une matrice diagonale

William Rowan Hamilton (4 août 1805 [Dublin] - 2 septembre 1865 [Dublin]).

Sir William Rowan Hamilton est un mathématicien, physicien et astronome irlandais. Il est né le 4 août 1805 à Dublin. Son père est un avocat d'affaires qui parcourt tout le pays. Ne pouvant s'occuper de l'éducation de son fils, il le confie à 3 ans à l'oncle de William, James Hamilton, qui est un prêtre anglican très lettré. A l'instar d'un Gauss, Hamilton est un enfant prodige. On prétend qu'à 3 ans, il sait lire et compter, qu'à 5 ans, il connaît le latin, le grec, et récite Homère, et qu'à 13 ans, il parle autant de langues qu'il a d'années.

L'intérêt pour les mathématiques commence avec l'étude des Principia de Newton à 15 ans, et celle de la Mécanique céleste de Laplace à 17 ans. En 1823, Hamilton entre au prestigieux Trinity College de Dublin. Il s'y révèle un étudiant particulièrement brillant, obtenant pratiquement à chaque examen la note maximale. Une année, cependant, ses résultats sont moins bons. Hamilton est en effet tombé amoureux de la fille d'amis de son oncle. Comme il doit encore étudier 3 ans, il ne peut lui proposer de l'épouser, et finalement elle se marie avec un autre homme, de 15 ans son aîné. Cela engendre une grande déprime chez Hamilton (jusqu'à des pensées suicidaires). Il commence alors également à écrire quelques poèmes, une passion qui perdurera sa vie durant.

Durant les années 1832 à 1835, Hamilton se consacre à obtenir une présentation algébrique des nombres complexes. Cela l'obsède, et il subit une nouvelle crise de dépression, devenant alors alcoolique. Il énoncera par la suite un théorème fondamental concernant la réduction des endomorphismes en dimension 4.

Cayley l'énonce dans le cas général en 1857, mais ne fournit une preuve qu'en dimension 2. C'est à Frobenius en 1878 que l'on doit la première preuve dans le cas général.

Hamilton décède le 2 septembre 1865 d'une crise de goutte.

E est un ev de dimension finie n .

4.1 Eléments propres

4.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définitions 4.1 (🔗valeurs propres et vecteurs propres).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'un réel λ est une valeur propre de la matrice A ssi il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Un vecteur colonne X vérifiant cette égalité est appelé un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .
2. HP : On dit qu'un réel λ est une valeur propre de l'endomorphisme f ssi il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$. Un vecteur x vérifiant cette égalité est appelé un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .
3. L'ensemble des valeurs propres d'une matrice est appelé spectre et est parfois noté $Sp(A)$ (HP : l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est noté $Sp(f)$).

Remarque.

On notera que $AX = \lambda X$ est équivalent à $(A - \lambda I)X = 0$.

EXERCICE 4.1 (HP).

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f(P) = (X-1)P' + P$. On pose $R(X) = (X-1)^2$. Calculer $f(R)$ et en déduire une valeur propre de f .

EXERCICE 4.2.

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que X est un vecteur propre de A et déterminer sa valeur propre associée.

Propriétés 4.1 (HP).

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :

1. λ est une valeur propre de f ssi λ est une valeur propre de A .
2. $x \in E$ est un vecteur propre de f associé à λ ssi le vecteur colonne associé à x dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Remarque.

Ainsi chercher les valeurs propres d'un endomorphisme ou de sa matrice dans une base donnée revient au même!

Théorème 4.2 (🔗 $A - \lambda I$ non inversible).

Le réel λ est valeur propre de A ssi la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

HP : Le réel λ est valeur propre de f ssi $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif $\Leftrightarrow f - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif.

Remarque.

Ce théorème nous permettra de mettre en place la méthode permettant de trouver les valeurs propres.

Corollaire 4.3 (🔗cas de la valeur propre 0).

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 0 est une valeur propre de A ssi A n'est pas inversible.
2. HP : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. 0 est une valeur propre de f ssi f n'est pas bijective.

Propriété 4.4 (🔗 Valeurs propres d'une matrice triangulaire).

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale.

4.1.2 Sous espace propre**Théorème 4.5** (🔗 Sous-espace propre).

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A . On pose : $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda X\}$.
 E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on appelle sous-espace propre de A associé à λ .
2. HP : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de f . On pose : $E_\lambda = \{x \in E / f(x) = \lambda x\}$.
 E_λ est un sous-espace vectoriel de E que l'on appelle sous-espace propre de f associé à λ .

Remarques.

-S'il y a des risques de confusion on pourra noter $E_\lambda(A)$.

-Le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est formé de tous les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ auquel on adjoint le vecteur nul.

On notera bien qu'un sous-espace propre contient toujours au moins le vecteur nul et qu'il n'est jamais réduit à $\{0\}$ par définition.

De plus, E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc la dimension de chaque sous-espace propre vérifie : $\dim(E_\lambda) \geq 1$ et ne peut dépasser n .

- Un grande partie de votre travail consistera à trouver une base de ces sous-espaces propres (voir plus loin).

Propriété 4.6 (HP).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id})$.

De plus si $E_\lambda = \{0_E\}$ alors λ n'est pas une valeur propre de f et sinon λ est une valeur propre de f .

Remarque.

Cette propriété exprime tout simplement la définition des sous-espaces propres d'un endomorphisme sous une autre forme.

4.1.3 Concaténation de sous-espaces propres

On rappelle que E est un ev de dimension finie n .

A désigne une matrice carrée d'ordre n .

Théorème 4.7 (🔗 Concaténation).

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres 2 à 2 distinctes de A et si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p$ sont des familles libres (ou même des bases) des sous-espaces propres de A associés à ces valeurs propres : $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ alors : la famille obtenue en concaténant (ie en juxtaposant) les familles $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p$ est encore une famille libre.

Remarque. Ce théorème nous dit que la famille obtenue $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p)$ est libre, le travail consistera ensuite à voir si cette famille forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Il suffira donc de comparer le cardinal de cette famille avec la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui vaut n .

Propriété 4.8 (🔗 Nombre de valeurs propres possibles).

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de A et $X_1, \dots, X_p$ des vecteurs propres colonne associés. Alors $(X_1, \dots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc A admet au plus n valeurs propres.

4.1.4 Polynômes annulateurs

Définition 4.2 ([Polynôme de matrice](#)).

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et sa matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ relativement à une base de E .

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$. On note $P(A)$ la matrice $P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k$.

Exemple 4.1.

Si $P = 3X^2 - X - 2$, alors $P(A) = 3A^2 - A - 2I$.

Propriétés 4.9 ([Opérations sur les polynômes de matrice](#)).

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, α, β deux nombres réels, on a :

$(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$ et $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

$(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$ et $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

Définition 4.3 ([Polynôme annulateur](#)).

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $P(A) = 0$, on dit que P est un polynôme annulateur de A .

EXERCICE 4.3.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Montrer que P est un polynôme annulateur de A .

EXERCICE 4.4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Montrer que P est un polynôme annulateur de A .

En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I .

Théorème 4.10 ([Spectre de \$A\$ et racines de \$P\(A\)\$](#)).

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si P est un polynôme non nul annulateur de A alors toute valeur propre de A est une racine de P .

Ce qui signifie que les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de P .

Remarque.

Attention toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément des valeurs propres!!!

Ce théorème dit que $Sp(A) \subset \{\text{racines de } P\}$.

Un fois que l'on a trouvé des valeurs propres possible λ , il faut voir si $(A - \lambda I)$ est non inversible.

EXERCICE 4.5.

Déterminer les valeurs propres de la matrice A de l'exo 4.3 et 4.4.

4.1.5 Méthodes pour trouver les valeurs propres d'une matrice

• Point méthode pour trouver les valeurs propres d'une matrice si on ne connaît pas de polynôme annulateur de A

Soit A une matrice carrée. Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $A - \lambda I$ soit non inversible.

1. Si la matrice A est triangulaire, les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de A .
2. Dans le cas général, on détermine une réduite de Gauss de $A - \lambda I$. Les valeurs propres de A sont les valeurs de λ qui annulent les coefficients diagonaux de cette réduite.

• Point méthode pour trouver les valeurs propres d'une matrice si on connaît un polynôme annulateur de A

Soit A une matrice carrée et P un polynôme annulateur de A .

1. On détermine les racines de P : on sait que les valeurs propres de A sont parmi ces racines. Il faut tester si ces racines sont effectivement des valeurs propres de A .
2. Pour le savoir : on peut vérifier que la matrice $A - \lambda I$ est bien non inversible ou bien vérifier que le système $(A - \lambda I)X = 0$ a une infinité de solutions, ce qui permettra d'obtenir les bases des sous-espaces propres.

EXERCICE 4.6 ([Spectre de A](#)).

Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.1.6 Déterminer une base des sous-espaces propres d'une matrice

Un fois que l'on a trouvé les valeurs propres, on ne peut pas donner tous les vecteurs propres car il en existe une infinité. La suite du travail consiste à donner une base des sous-espaces propres associés aux valeurs propres que l'on a trouvé.

EXERCICE 4.7 ([🔗 Sous-espace propre](#)).

Reprenons la matrice A de l'exemple précédent puis déterminons une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 4.

• **Point méthode pour trouver les sous-espaces propres d'une matrice A**

Soit A une matrice carrée. λ une valeur propre de A .

1. Le sous-espace propre de $A : E_\lambda(A)$ associé à la valeur propre λ est constitué des vecteurs colonnes X solutions du système $(A - \lambda I)X = 0$.
2. On écrira $E_\lambda(A)$ sous la forme d'un « vect » en précisant à chaque fois une base de ce « vect ».

4.2 Théorèmes de réduction

4.2.1 Matrice diagonalisable

Définition 4.4 ([🔗 Matrice diagonalisable](#)).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice diagonalisable ssi il existe une matrice P inversible dont les n colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A , et une matrice D diagonale dont les n éléments diagonaux sont les valeurs propres de A (distinctes ou pas) telles que $A = PDP^{-1}$. (Autrement dit A et D sont semblables.)

Remarque. Il n'y a pas unicité pour P et D .

Théorème 4.11 ([🔗 Caractérisation](#)).

A est une matrice diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

Remarque.

La base mentionnée dans ce théorème 4.11 s'obtient en concaténant les bases de chaque sous-espace propre. Comme on sait que la famille obtenue ainsi est libre, il ne restera plus grand chose à faire pour montrer que l'on a vraiment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: comparer cardinal de la famille à n !

• **Point méthode pour obtenir les matrices P et D quand on sait que A est diagonalisable**
 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on a prouvé qu'elle était diagonalisable. Il faut de plus avoir trouvé toutes les valeurs propres et une base de chacun des sous-espaces propres. Il faut savoir que la construction de P ou de D influence la construction de l'autre.

1. On place sur la diagonale de D les valeurs propres de A sachant qu'une valeur propre apparaît un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé.
2. Les colonnes de P sont les vecteurs de base des sous-espaces propres de A , ces vecteurs étant placés dans le même ordre que les valeurs propres auxquelles ils sont associés dans D .

Théorème 4.12 ([4]). *Cas des n valeurs propres* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

4.2.2 Matrices symétriques

Définition 4.5.

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique** si ${}^t A = A$.
 On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n .

Propriétés 4.13.

- $I_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp $A \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$), $A + B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp $A \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$).
- Soient A et B symétriques et commutent alors : $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Si A est symétrique, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n$ est symétrique.
- si A et B symétriques et commutent alors AB est symétrique.

Théorème 4.14 ([4] Matrice symétrique diagonalisable).

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Remarque.

Ce théorème doit être admis d'après le programme officiel et il faut bien penser à l'utiliser quand vous le pouvez. C'est le théorème qui permet de savoir le plus rapidement si une matrice est diagonalisable.

• **Point méthode pour savoir si une matrice est diagonalisable ou pas**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si la matrice est symétrique : A est diagonalisable.
2. Sinon il faut trouver les valeurs propres de A .
3. Si A n'a pas de valeurs propres alors A n'est pas diagonalisable.
4. Si A possède p valeurs propres alors on détermine une base de chacun des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
5. A est diagonalisable ssi la concaténation de ces bases forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

EXERCICE 4.8 (D'après EML).

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable?
2. Montrer que $A^3 = 2A$.
3. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de A .

4.3 Exemples de diagonalisation et applications

4.3.1 Cas des matrices carrées d'ordre 2

Soit une matrice carrée d'ordre 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Propriétés 4.15 (Cas des matrices carrées d'ordre 2).

1. A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
2. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ non inversible. Donc λ est valeur propre de A si et seulement si $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$.

Preuve.

Si A a des valeurs propres, alors elles sont racines de l'équation :

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

En effet, dire que $A - \lambda I_2$ non inversible revient à dire que $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ et on trouve en développant l'équation du second degré : $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$.

Cette preuve sera à écrire à chaque fois pour trouver les valeurs propres de A matrice carrée d'ordre 2. ◇

EXERCICE 4.9.

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables? $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.3.2 Puissances de matrices

Objectif : On se donne une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On cherche à expliciter la matrice A^n quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

• **Point méthode pour calculer A^n quelque soit $n \in \mathbb{N}$**

1. **A l'aide de la méthode de réduction on détermine une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à la matrice A telles que**
 $B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$.
2. **La matrice B étant généralement diagonale ou (au pire) triangulaire, les puissances de la matrice B sont relativement simples à déterminer.**
3. **On utilise alors le résultat général (démontré par récurrence) suivant :**
si $A = PBP^{-1}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

EXERCICE 4.10 ([🔗 Puissance de matrice]).

Déterminer les puissances de la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en utilisant un polynôme annulateur de T (calculer : $T^2 - 3T + 2I$), puis en diagonalisant T .

4.3.3 Etude du commutant d'une matrice carrée

Objectif : On se donne une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On cherche à étudier (base et dimension) l'espace vectoriel $C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

• **Point méthode pour étudier (base et dimension) l'espace vectoriel $C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.**

1. **A l'aide de la méthode de réduction on détermine une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à la matrice A telles que $B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$.**
2. **La matrice B étant généralement diagonale ou (au pire) triangulaire, il est généralement (plus) simple d'étudier le commutant de la matrice B :**
 $C_B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / BM = MB\}.$
3. **Pour cela, il faut poser le problème matriciel et résoudre le système associé à l'équation $BM = MB$.**
4. **On utilise alors le résultat général suivant :**
 $M \in C_A \Leftrightarrow N = P^{-1}MP \in C_B.$
5. **Après avoir caractérisé C_B en explicitant une base, notée $(N_1, N_2, \dots, N_p)$ l'équivalence ci-dessus permet de caractériser C_A , puisqu'alors :**
 $C_A = \text{Vect}(PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, \dots, PN_pP^{-1}).$

4.3.4 Sujets ECRICOME 2003 / EHDEC 2014**EXERCICE 4.11** ([🔗 ECRICOME 2003]).

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcul des puissances de A

1. Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A , avec $\lambda_1 < \lambda_2$
2. La matrice A est-elle inversible? (On ne demande pas la matrice A^{-1}).
3. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de A .
4. Justifier que A n'est pas diagonalisable.
5. Déterminer le vecteur $\vec{u}_1$ de E vérifiant :
 - le vecteur colonne associé à $\vec{u}_1$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1
 - la première composante de $\vec{u}_1$ est 1.
6. Déterminer le vecteur $\vec{u}_2$ de E vérifiant :
 - le vecteur colonne associé à $\vec{u}_2$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2

- la deuxième composante de $\vec{u}_2$ est 1.
7. Soit $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E .
 8. Déterminer la matrice de passage P de la la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ puis la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
 9. Montrer que : $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$
 10. En déduire que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Rappeler la relation matricielle entre A et T .
12. Prouver que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ il existe un réel α_n tel que :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

On donnera le réel α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n

13. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = n2^{n-1}$$

En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n .

2. Matrices commutant avec A .

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble $C(A)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices M telles que :

$$AM = MA$$

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. Pour M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on pose $M' = P^{-1}MP$.

Montrer que :

$$AM = MA \iff TM' = M'T$$

(T est définie dans la question 1.10)

3. Montrer qu'une matrice M' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $TM' = M'T$ si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels.
4. En déduire que M appartient à $C(A)$ si et seulement si il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

5. Déterminer alors une base de $C(A)$ ainsi que la dimension de $C(A)$.

EXERCICE 4.12 ([[🔗](#) EDHEC 2014]).

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation : $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.
 - (b) Etudier la fonction f qui, à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m , ni à calculer M).
 - (c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M .
 - (d) Montrer que A admet trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
 - (e) En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est à dire qui vérifient : $AM = MA$.
 - (a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont des matrices diagonales.
 - (b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
 - i. M est une matrice de E
 - ii. $P^{-1}MP$ commute avec D
 - (c) Etablir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$
 - (d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
 - (e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A , qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est une base de E .

4.3.5 Valeurs propres et vecteurs propres avec Python

Rappels commandes Python et matrices :

• Commandes Python et matrices

```
import numpy as np
```

```
import numpy.linalg as al
```

```
np.array ( [ [ a , b , c ] , [ d , e , f ] ] ) : matrice  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ 
```

```
np . array ( [ [ a , b , c ] ] ) : matrice ligne  $(a \ b \ c)$ 
```

```
np . array ( [ [ a ] , [ b ] ] ) : matrice colonne  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 
```

```
np . zeros ( ( n , n ) ) : matrice carrée nulle d'ordre  $n$ 
```

```
np . ones ( ( n , n ) ) : matrice carrée composée que de 1
```

```
np . eye ( n , n ) : matrice carrée identité
```

```
np . dot ( A , B ) : produit matriciel  $A \times B$ 
```

```
np . transpose ( A ) : transposée de  $A$ 
```

```
a , b = np . shape ( A ) : affecte à  $a$  le nombre de lignes de  $A$  et à  $b$  le nombre de colonnes de  $A$ 
```

```
A [ i , j ] : renvoie le coefficient  $a_{i,j}$  de  $A$ 
```

```
A [ i , : ] : extrait la ligne d'indice  $i$  sous forme de vecteur
```

```
A [ : , j ] : extrait la colonne d'indice  $j$  sous forme de vecteur
```

```
al . inv ( A ) : donne l'inverse de  $A$ 
```

```
al . matrix_rank ( A ) : renvoie le rang de  $A$ 
```

```
al . matrix_power ( A , n ) : renvoie  $A^n$ 
```

```
al . solve ( A , b ) renvoie la solution du système  $Ax = b$ 
```

• Commandes Python pour valeurs propres et vecteurs propres

```
import numpy as np
```

```
import numpy.linalg as al
```

A est une matrice carrée d'ordre n

```
al . eig ( A ) : renvoie deux valeurs, un vecteur dont les éléments sont les valeurs propres de  $A$  et une matrice dont la  $i$ -ème colonne est un vecteur propre de  $A$  associé à la  $i$ -ème valeur propre.
```

Par exemple :

```
import numpy as np
```

```
import numpy.linalg as al
```

```
A = np.array ([ [3,1],[1,3] ])
```

```
Sp, vp = al.eig ( A )
```

```
print ( Sp , vp )
```

```
[4.2.] [[0.70710678 - 0.70710678]
```

```
[0.70710678 0.70710678]]
```


Feuille d'exercices n°4

DIAGONALISATION DES MATRICES CARRÉES.

Exercice 1. Trouver les valeurs propres

1. Montrer que le polynôme $P(x) = x^2 + x - 6$ est annulateur de la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire que H admet au plus 2 valeurs propres que l'on précisera.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^2 , en déduire un polynôme annulateur de A . Montrer que A admet au plus deux valeurs propres.
3. Soit A une matrice associée à f un endomorphisme d'un ev E de dimension n telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que A n'admet aucune valeur propre.
Attention HP : Soit f un endomorphisme d'un ev E tel que $f \circ f = -id$. Montrer que f n'admet aucune valeur propre.
4. Déterminer le spectre de la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$?
6. Soit l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x + y - z \\ x + y - z \end{pmatrix}$. f est-il injectif? Que peut-on en déduire sur le spectre de K matrice associée à f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 2. Vecteur propre

1. Vérifier que le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice H associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f((x, y, z)) = (2x - z, y, 3x - 2z)$. **Atten-**

tion HP : Vérifier que le vecteur $u = (1, 0, 3)$ est un vecteur propre de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f((x, y, z)) = (2x - z, y, 3x - 2z)$.

2. Soit l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_4[x]$ qui à tout polynôme P , de degré inférieur ou égal à 4, associe le polynôme : $\Phi(P)(x) = xP'(x)$.

(a) Donner la matrice H associée dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[x]$ à Φ .

(b) Donner le vecteur colonne T associé au polynôme $t(x) = x^3$.

(c) Montrer que T est un vecteur propre de H .

3. Vérifier que le vecteur $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $R = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Vérifier que le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Sous-espace propre

1. Montrer que 1 est valeur propre de la matrice A (dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) associé à l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ y \\ 3x - 2z \end{pmatrix}$. Déterminer une base et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

2. Montrer que 2 est valeur propre de la matrice B (dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$) associée à l'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ définie par : pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, $g(P)(x) = xP'(x) + P''(x)$. Déterminer $E_2(B)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

Exercice 4. Éléments propres par réduite de Gauss

1. Quels sont les éléments propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

2. Quels sont les éléments propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Exercice 5. Diagonalisable?

1. Soit Φ un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[x]$, tel que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_4[x]$, $\Phi(P)(x) = P(x+1)$.

(a) Déterminer M , la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[x]$.

(b) En déduire les valeurs propres de M .

(c) M est-elle diagonalisable?

2. La matrice $Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

3. Soit l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ x+y-z \end{pmatrix}$ et K sa matrice associée (dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$). K est-elle diagonalisable?
4. La matrice $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

Exercice 6. Diagonalisation

1. La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Si oui diagonaliser T .
2. Déterminer une base de vecteurs propres pour la matrice associée (dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) à l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, défini par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+2y+6z \\ x+2y+4z \end{pmatrix}$ et donner la matrice de f dans cette nouvelle base.
3. Construire une base b de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice K de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ x+y-z \end{pmatrix}$ est diagonale. Expliciter la matrice K .
4. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 puis diagonaliser B .
5. Soient $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $T = PDP^{-1}$. (sans calculer P^{-1}).

Exercice 7. ECRICOME 2007

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

La matrice A suivante étant donnée

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

on définit l'application ϕ_A par :

$$\begin{aligned} \phi_A : M_2(\mathbb{R}) &\rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \phi_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

Diagonalisation de A .

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A .
2. Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :

$$A = PDP^{-1}$$

Donner l'écriture matricielle de P^{-1} .

Étude de ϕ_A .

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Donner la matrice H de ϕ_A dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
3. ϕ_A est-il bijectif?
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'une matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ vérifie $\phi_A(M) = \lambda M$ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle :

$$DN - ND = \lambda N$$

$$5. \text{ On pose } N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- (a) Trouver l'ensemble des matrices N telles que $DN - ND = 0$.
 - (b) En déduire que la famille (A, M_1) avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ est une base de $\text{Ker}(\phi_A)$.
6. Etablir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de H . En déduire les valeurs propres possibles de H .
 7. Proposer un programme Python, permettant d'avoir la matrice H , les valeurs propres et vecteurs propres de H .
 8. La matrice H associée à ϕ_A est-elle diagonalisable?

Exercice 8. ECRICOME 2014

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1)$$

On note $\text{Ker}(f)$ le noyau de f et $\text{Im}(f)$ son image. Si λ est une valeur propre de A , on désigne par $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ .

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
2. Justifier que f n'est pas bijectif.
3. A est-elle inversible? En déduire, *sans le moindre calcul*, une valeur propre de A .
4. Prouver que les vecteurs colonnes U et V associés à u et v sont deux vecteurs propres de A .
Préciser la valeur propre λ (respectivement μ) associée à U (respectivement à V).
Donner la dimension de l'espace propre $E_\lambda(A)$ (respectivement $E_\mu(A)$).
5. A est-elle diagonalisable?
6. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :

$$f(t) = t + v$$

7. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, telle que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions 1, 2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f$$

1. Montrer que :

$$f \circ g = g \circ f$$

En déduire que :

$$f(g(u)) = 0 \quad \text{et} \quad f(g(v)) = g(v)$$

2. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.
 3. On note N la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6. Justifier que :

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

où a et b sont les deux réels définis à la question précédente (II.2) et c, d, e des réels.

4. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$?

Indication : Utiliser les matrices de f et g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6.

Exercice 9. EDHEC 2014

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation : $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.
 (b) Etudier la fonction f qui, à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m , ni à calculer M).
 (c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M .
 (d) Montrer que A admet trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- (e) En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est à dire qui vérifient : $AM = MA$.

- (a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont des matrices diagonales.

- (b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
- M est une matrice de E
 - $P^{-1}MP$ commute avec D
- (c) Etablir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :
- $$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$
- $$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$
- (d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
- (e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A , qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est une base de E .

Exercice 10. EDHEC 2012

1. Montrer que, si la matrice associée à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable, alors la matrice associée à l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable.
On rappelle que $f^2 = f \circ f$.

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.

Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique

de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. (a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A .
- (b) Donner une base (u) de $\ker(g - Id)$.
- (c) Déterminer $\ker(g + Id)$.
- (d) En déduire que la matrice A associée à g n'est pas diagonalisable.
3. (a) Résoudre l'équation, $A^2 X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$, que peut-on en déduire pour A^2 ?
- (b) Déduire de 3a) une base $(v; w)$ de $\ker(g^2 + Id)$.
- (c) Montrer que la famille $(u; v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (d) Écrire la matrice de g^2 dans la base $(u; v; w)$ et conclure.

Exercice 11. HEC 2011

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

2. Vérifier que 1 est une valeur propre de A et déterminer un vecteur-colonne propre associé.
3. Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de $\mathbb{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout (i, j) de $[[1, n]]^2$, $a_{i,j} \geq 0$;
- A admet la valeur propre 1 et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne propre associé à cette valeur propre.

Etude de $\mathcal{S}_n$

1. L'ensemble $\mathcal{S}_n$, muni des lois usuelles sur les matrices, est-il un espace vectoriel?
2. Démontrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n$ est une matrice de $\mathcal{S}_n$.
3. Soit A un élément de $\mathcal{S}_n$ et λ une valeur propre de A .
 - (a) Démontrer qu'il existe un vecteur-colonne propre $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ , pour lequel il existe un entier k de $[[1, n]]$, vérifiant $v_k = 1$ et pour tout i de $[[1, n]]$, $|v_i| \leq 1$.
 - (b) En déduire que l'on a : $|\lambda| \leq 1$ et $|\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$.
4. Démontrer que si les éléments diagonaux d'une matrice A de $\mathcal{S}_n$ sont tous strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$, la matrice A est inversible.

Exercice 12. HEC 2005

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E .

L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*) : f \circ f = 4\text{Id}$

A. Étude du cas $n = 2$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2})$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f .
2. On note $F = \ker(f - 2\text{Id})$ et $G = \text{Im}(f - 2\text{Id})$.
 - (a) Montrer que G est engendré par le vecteur u . En déduire la dimension de F et donner une base de F .
 - (b) A est-elle diagonalisable?
 - (c) Donner le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -2 .
3. Diagonaliser A : donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B. Étude du cas général.

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation (*).

1. (a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f
- (b) En considérant la matrice dans la base canonique de f notée M , donner un polynôme annulateur de M . Déterminer les valeurs propres possibles de M .
- (c) Vérifier que 2Id et -2Id satisfont l'équation (*).

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\text{Id}$ et $f \neq -2\text{Id}$ et on note $F = \ker(f - 2\text{Id})$ et $G = \ker(f + 2\text{Id})$.

2. Soit x un élément de E . Montrer que $(f(x) - 2x)$ appartient à $\ker(f + 2\text{Id})$ et que $(f(x) + 2x)$ appartient à F .

En déduire que $G \subset \ker(f + 2\text{Id})$ et que $\text{Im}(f + 2\text{Id}) \subset F$.

HP : Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f .

3. Soit x un vecteur de $\ker(f + 2\text{Id})$.
 - (a) Exprimer $(f - 2\text{Id})(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G , puis que $G = \ker(f + 2\text{Id})$
 - (b) **HP : Montrer que f est diagonalisable.**

Exercice 13. ESSEC 2010**Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres**

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- (Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;
 (Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.
2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.
3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
 - (a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.
 - (b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

4. (a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.
- (b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.
- Cette matrice est-elle diagonalisable?
6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.
- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t .
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.
- (b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

- Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M .
- Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
 - Montrer les inclusions $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et $\ker(u^2) \subset \ker(u^3)$.
 - Montrer que les noyaux $\ker(u^2)$ et $\ker(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.
 - Montrer que les noyaux $\ker(u)$ et $\ker(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.
 - Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.
- Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.
 - Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.
 - Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.
 - On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.
 - En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.
 - Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

