

Loi marginale, loi conjointe et corrélation

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Mobiliser – Soit (X, Y) un couple de v.a.d. dont la loi est donnée par

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} \quad \forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

1. Déterminer la loi de X . Déterminer $\mathbb{E}[X]$ et $V(X)$.
2. Montrer que X et Y suivent la même loi. En déduire $\mathbb{E}[Y]$ et $V(Y)$.
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
4. Calculer $V(4X - 5Y)$.
5. Soit $c \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$. Calculer $P(\min(X, Y) < c)$.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Soient a et b deux nombres entiers tels que $0 < a < b$ et $\lambda > 0$. On considère un vecteur aléatoire (X, Y) dont la loi de probabilité est définie par :

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \quad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

1. Déterminer la loi marginale de Y . Donner $\mathbb{E}(Y)$, $Var(Y)$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = j$.
3. Déterminer la loi marginale de X .

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p . On note $V = \inf(X, Y)$ et $W = X - Y$. Déterminer la loi du couple (V, W) .

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] – Modéliser – Calculer –

On jette n fois un dé à 6 faces. On note X le nombre de 1 et Y le nombre de 2. Déterminer le coefficient de corrélation entre X et Y .

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] – Cours – Chercher –

Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Poisson respectivement $\mathcal{P}(\lambda_1)$, $\mathcal{P}(\lambda_2)$, $\mathcal{P}(\lambda_3)$.

1. Déterminer $P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1)$
2. Déterminer la covariance de $U = X_1 + X_2$, $V = X_1 + X_3$.
3. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur l'ensemble $S = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$, au sens où

$$P(X = i, Y = j) = \frac{1}{4} \quad \forall (i, j) \in S$$

1. Calculer la loi de X et de Y ainsi que leurs espérances.
2. Calculer la covariance des variables X et Y . Celles-ci sont-elles indépendantes ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Conditions

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] – Cours – Chercher – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que

$$p(X = -1) = p_1, \quad p(X = 1) = p_2 \quad \text{où } p_1, p_2 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\mathcal{L}(Y) = \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$$

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
2. On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z = \begin{cases} \theta_1 & \text{si } X + Y = 0 \\ \theta_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ_1, θ_2 sont des réels distincts fixés.

- a) Montrer que la loi de Z est indépendante de p_1 et p_2 .
- b) Déterminer les valeurs de θ_1 et θ_2 de sorte que $\mathbb{E}[Z] = 3$ et $V(Z) = 2$

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – Mobiliser – Calculer – Soit (X, Y) un couple de v.a.d. indépendantes telles que

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \quad Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$$

Donner la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = n$.

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Soient $p \in [0; 1]$, X une v.a.d. suivant une loi géométrique de paramètre p et Y une v.a.d. telle que la loi de Y sachant ($X = k$) soit une loi $\mathcal{B}(k, p)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer la loi de Y . On admettra à cet effet que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – *Calculer* –

Depuis sa première plantation de haricots, lorsque Jack fait pousser de nouveaux plants, certains haricots sont magiques, d'autres non. La probabilité pour qu'un haricot soit magique est $p = 0, 1$.

Jack cueille sept haricots au hasard. On note X le nombre de haricots magiques.

1. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Jack place ces sept haricots dans un chapeau, puis en prend deux au hasard. On note Y le nombre de haricots magiques parmi les deux choisis.

2. Établir une formule donnant $P(Y_{/(X=x)} = k)$ pour toutes les valeurs x de X ainsi que pour tout $k \in \text{Supp}(Y_{/(X=x)})$ valable pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$.

3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y . Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – *Calculer* – Dans le trou-

peau de vaches limousines de Robert, le nombre de naissances par an suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 12$. Sachant que la probabilité pour un veau d'être une future génisse est $p = 0, 52$, on note Y le nombre de naissances et X le nombre de futures génisses parmi ces naissances.

1. Déterminer la loi de X .

2. Déterminer la loi de $Y - X$.

3. Montrer que les variables X et $Y - X$ sont indépendantes.

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – *Mobiliser* – Le compor-

tement au volant des personnages officiels n'est pas toujours un bon exemple : quand un gendarme relève un excès de vitesse, il peut tomber sur un député avec la probabilité p ou même sur un ministre avec la probabilité q . (On rappelle qu'un ministre ne peut être en même temps député.)

On considère n excès de vitesses verbalisés, en notant X le nombre de députés et Y le nombre de ministres en infraction.

1. Déterminer la loi de la variable X .

On note Z_k le nombre de ministres en infraction sachant que k députés ont été pris en infraction.

2. Déterminer la loi de la variable Z_k .

3. Montrer que la loi de probabilité du couple (X, Y) est définie par

$$p(X = i, Y = j) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p^i q^j (1-p-q)^{n-i-j} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, i+j \leq n$$

4. On note T_k la proportion $\frac{Y}{X+Y}$ de ministres parmi les dignitaires pris en flagrant délit d'excès de vitesse "sachant qu'il y a k dignitaires en cause ($X+Y = k, k \in \mathbb{N}^*$)".

a) Déterminer la loi de probabilité de T_k

b) Calculer $\mathbb{E}[T_k]$

Sommes et manipulations de v.a.d.

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Calculer* – À un péage au-

toroutier, n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois

barrières de péage numérotées 1, 2, 3 mises à leur disposition. On note X_i la va-

riable aléatoire dénombrant les voitures ayant franchi la barrière i .

1. Déterminer la loi de X_1 .

2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$

3. En déduire la covariance de X_1 et X_2 .

4. Les variables X_1, X_2 sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – *Chercher* – ☆

Soient $p, q \in]0; 1[$, et X, Y deux v.a. indépendantes telles que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(q)$.

1. On pose $Z = XY$. Calculer $\mathbb{E}[Z]$.

2. On pose $W = X + Y$.

a) Déterminer la loi de W .

b) Déterminer $\mathbb{E}[W]$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que W suive une loi binomiale. Dans ce cas, donner les paramètres de la loi. ☆

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – *Calculer* – Le poin-

çonneur des lilas perfore en moyenne un ticket de première classe pour neuf de deuxième classe.

Le nombre de faux tickets qu'il reconnaît dans une journée suit une loi de Poisson de moyenne 3. Il les glisse dans sa poche en refusant le passage au fraudeur.

En quittant son service, il vide sa poche. Quatre confettis qu'y sont glissés par hasard.

Calculer la probabilité pour que le nombre de confettis de deuxième classe qu'il y trouve soit strictement supérieur au nombre de faux tickets.

(On rappelle que lorsque les tickets étaient poinçonnés, la pince produisait des confetti.)

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – *Cours* – B. brise en moyenne trois

verres et une assiette par mois. Soit X le nombre de verres et Y le nombre d'assiettes victimes de sa maladresse en un mois.

1. En se basant sur le fait que les bris sont indépendants les uns des autres, établir les lois de probabilité des variables X et Y .

2. On note T le nombre total de verres et d'assiettes cassées. Quelle est la loi de probabilité de T ?
3. Calculer la probabilité d'avoir en un mois ni bol ni assiette cassée.

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] – *Calculer* – On jette un dé équilibré à 6 faces et on note X le nombre obtenu. Ensuite, on jette X fois une pièce de monnaie équilibrée et on note Y le nombre de "piles" obtenus.

1. Rappeler $E(X)$ et calculer $E(X^2)$, $V(X)$.
2. Calculer la loi conjointe du vecteur (X, Y)
3. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$
4. Déterminer le coefficient de corrélation entre X et Y .

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Soient X, Y deux v.a.d. indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs p_1, p_2 . Soit $Z = X - Y$. Donner l'espérance et la loi de Z .

Indications

Exercice 2 [Correction]

1. Reconnaître une loi de cours
2. Reconnaître une loi de cours

Exercice 3 [Correction]

Séparer les cas d'étude de valeurs de W positives et négatives.

Exercice 4 [Correction]

On pourra par exemple passer par $X + Y$.

Exercice 8 [Correction]

S'intéresser tout d'abord à la loi de $X + Y$.

Exercice 14 [Correction]

2. a) c'est une somme de binomiales mais attention, elles ne sont pas indépendantes !

Exercice 15 [Correction]

Après avoir modélisé la situation avec X, Y , décomposer en éléments de type $P(X = x, Y = y)$.

Exercice 1

1. $X \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. D'où $\mathbb{E}[X] = 2$ et $V(X) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$.
2. La loi du couple est symétrique. $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] = 2$. De même pour la variance.
3. $P(X = i \cap Y = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^j = P(X = i)P(Y = j) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}^*$
Les variables sont indépendantes.
4. Les variables sont indépendantes, ainsi
 $V(4X - 5Y) = 4^2V(X) + (-5)^2V(Y) = (16 + 25)V(X) = 82$.
5. $P(\min(X, Y) < c) = 1 - P(\min(X, Y) \geq c) = 1 - P((X \geq c) \cap (Y \geq c)) = 1 - P(X \geq c)^2$.
Or, $P(X \geq c) = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{c-1}$, d'où

$$P(\min(X, Y) < c) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2(c-1)}$$

Exercice 2

1. Dans tous les cas, on note que $X \leq Y$.

• Loi de Y :

Soit $y \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = y, X = k) \\ &= \sum_{k=0}^y P(Y = y, X = k) \\ &= \sum_{k=0}^y e^{-b\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \binom{y}{k} a^k (b-a)^{y-k} \\ &= e^{-b\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \underbrace{\sum_{k=0}^y \binom{y}{k} a^k (b-a)^{y-k}}_{b^y} \\ &= e^{-b\lambda} \frac{(b\lambda)^y}{y!} \end{aligned}$$

D'où $Y \rightarrow \mathcal{P}(b\lambda)$

• Espérance et variance de Y : On sait que $\mathbb{E}(Y) = V(Y) = b\lambda$

2. Soit $x \in \mathbb{N}$. On a

$$P_{Y=j}(X = x) = \frac{P(X = x, Y = j)}{P(Y = j)}$$

Si $x > y$, on obtient $P_{Y=j}(X = x) = 0$.

Si $x \leq y$, on a

$$\begin{aligned} \frac{P(X = x, Y = j)}{P(Y = j)} &= \frac{e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{x} a^x (b-a)^{j-x}}{e^{-b\lambda} \frac{(b\lambda)^j}{j!}} \\ &= \frac{\binom{j}{x} a^x (b-a)^{j-x}}{b^{j-x}} \\ &= \binom{j}{x} \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(1 - \frac{a}{b}\right)^j \end{aligned}$$

Conclusion : X sachant $Y = j$ suit une loi $\mathcal{B}\left(\frac{a}{b}, j\right)$.

3. Soit $x \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
P(X = x) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = k, Y = j) \\
&= \sum_{j=x}^{+\infty} e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{x} a^x (b-a)^{j-x} \\
&= e^{-b\lambda} a^x \sum_{j=x}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \frac{j!}{x!(j-x)!} (b-a)^{j-x} \\
&= e^{-b\lambda} \frac{a^x}{x!} \sum_{j=x}^{+\infty} \lambda^j \frac{1}{(j-x)!} (b-a)^{j-x} \\
&= e^{-b\lambda} \frac{a^x}{x!} \lambda^x \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} (b-a)^j}_{e^{\lambda(b-a)}} \\
&= e^{-b\lambda} \frac{a^x}{x!} \lambda^x e^{\lambda(b-a)} = \frac{(a\lambda)^x}{x!} e^{-a\lambda}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{X \rightarrow \mathcal{P}(a\lambda)}$$

Exercice 3

• On a $\text{Supp}(V, W) = \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.

Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$. On a

$$P(V = i, W = j) = P(\inf(X, Y) = i \cap X - Y = j)$$

★ Si $j \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
P(V = i, W = j) &= P(V = i, X - Y = \underbrace{j}_{\geq 0} \text{ (donc } X \geq Y)) \\
&= P(Y = i, X - Y = j) \\
&= P(Y = i, X = i + j) \\
&= P(Y = i)P(X = i + j) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ ind.}) \\
&= pq^{i-1}pq^{i+j-1} \\
&= p^2q^{2i+j-2}
\end{aligned}$$

★ Si $j < 0$, on a

$$\begin{aligned}
P(V = i, W = j) &= P(V = i, X - Y = \underbrace{j}_{< 0} \text{ (donc } X < Y)) \\
&= P(X = i, X - Y = j) \\
&= P(X = i, Y = i - j) \\
&= P(X = i)P(Y = i - j) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ ind.}) \\
&= pq^{i-1}pq^{i-j-1} \quad (\text{car } i - j > i > 0.) \\
&= p^2q^{2i-j-2}
\end{aligned}$$

★ Conclusion :

$$\boxed{P(V = i, W = j) = p^2q^{2i+|j|-2}}$$

Exercice 4

Il est clair que $X, Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ où $p = 1/6$.

• Méthode 1 : par calcul direct

★ Remarque : On peut calculer la loi conjointe de (X, Y) de manière directe. On obtient

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j > n \\ \left(\frac{1}{6}\right)^{i+j} \frac{4^{n-i-j}}{6} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

★ Covariance de X et Y :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ijP(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ijP(X = i)P_{X=i}(Y = j) \\ &= \sum_{i=0}^n iP(X = i) \underbrace{\sum_{j=0}^n jP_{X=i}(Y = j)}_{E(Y/X=i)} \end{aligned}$$

Or, $Y/X = i \rightsquigarrow \mathcal{B}(1/5, n - i)$, c'est-à-dire $1/5(n - i)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i=0}^n iP(X = i) \frac{1}{5}(n - i) \\ &= \frac{1}{5} \sum_{i=0}^n iP(X = i)(n - i) \\ &= \frac{1}{5} \left(\underbrace{n \sum_{i=0}^n iP(X = i)}_{E(X)} - \underbrace{\sum_{i=0}^n i^2 P(X = i)}_{E(X^2)} \right) \\ &= \frac{1}{5} (n^2 p - (V(X) + E(X)^2)) \\ &= \frac{1}{5} (n^2 p - (npq + n^2 p^2)) \\ &= \dots = \frac{n(n-1)}{36} \end{aligned}$$

On en déduit

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \dots = -\frac{n}{36}$$

★ Coefficient de corrélation de X et Y :

$$r(X, Y) = \frac{-n/36}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-n/36}{npq} = -\frac{1}{5}$$

• Méthode 2 : en utilisant la loi de $X + Y$:

X et Y ne sont pas deux variables indépendantes, mais on peut quand même connaître facilement la loi de $X + Y$. En effet $X + Y$ est le nombre de "1 ou 2" (succès de probabilité $\frac{1}{3}$) dans une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes. On a donc

$$X + Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$$

Or, d'après la formule de cours :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

D'où

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2} (V(X + Y) - V(X) - V(Y)) = \frac{1}{2} \left(n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - 2n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \right) = -\frac{n}{36}$$

et donc

$$r(X, Y) = \frac{-n/36}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-n/36}{npq} = -\frac{1}{5}$$

Exercice 5

1. D'après le cours, comme X_1, X_2, X_3 sont indépendantes, on sait que

$$X_1 + X_2 + X_3 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

d'où

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1) &= P(X_1 + X_2 + X_3 = 0) + P(X_1 + X_2 + X_3 = 1) \\ P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1) &= \boxed{e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} (1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \end{aligned}$$

2. U et V admettent un moment d'ordre 2. Alors UV est intégrable et

$$E(UV) = E(X_1^2 + X_1X_3 + X_2X_1 + X_2X_3) = E(X_1^2) + E(X_1X_3) + E(X_2X_1) + E(X_2X_3)$$

Par indépendance, on a

$$E(UV) = E(X_1^2) + E(X_1)E(X_3) + E(X_2)E(X_1) + E(X_2)E(X_3)$$

De même, on a

$$E(U)E(V) = E(X_1)^2 + E(X_1)E(X_3) + E(X_2)E(X_1) + E(X_2)E(X_3)$$

D'où

$$Cov(U, V) = E(UV) - E(U)E(V) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = V(X_1) = \lambda_1$$

3. Non, sinon on aurait $Cov(U, V) = 0$.

Exercice 6

1. Après calcul, on obtient X, Y de même loi avec

$$Supp(X) = Supp(Y) = \{-1, 0, 1\}$$

avec

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}, P(X = -1) = \frac{1}{4}, P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

2. Les variables étant finies, on sait que la covariance existe et que

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Par formule de cours, on sait que

$$\mathbb{E}[XY] = 1 \times 0 P(X = 1, Y = 0) + (-1) \times 0 P(X = -1, Y = 0) + 0 \times 1 P(X = 0, Y = 1) + 0 \times (-1) P(X = 0, Y = -1) = 0$$

D'où De plus,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = -P(X = -1) + 1P(X = 1) = 0$$

$$Cov(X, Y) = 0$$

3. Non, les variables ne sont pas indépendantes. en effet, par exemple

$$P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 0)$$

Exercice 7

1.

k	-2	-1	0	1	2
$P(S = k)$	$\frac{p_1}{3}$	$\frac{1-p_2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1-p_1}{3}$	$\frac{p_2}{3}$

2. a) Loi de Z :

k	θ_1	θ_2
$P(Z = k)$	$\frac{p_1}{3}$	$\frac{2}{3}$

b) Le calcul donne

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{\theta_1 + 2\theta_2}{3} \quad \mathbb{E}[Z^2] = \frac{\theta_1^2 + 2\theta_2^2}{3}$$

et les données de l'énoncé $\mathbb{E}[Z] = 3$ et $\mathbb{E}[Z^2] = 11$ donnent

$$(\theta_1, \theta_2) \in \{(5, 2); (1, 4)\}$$

Exercice 8

$$X_{/X+Y=n} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$$

Exercice 9

• D'après l'énoncé, $Supp(Y) = \mathbb{N}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme $Supp(X) = \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = n, X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \underbrace{P_{X=k}(Y = n)}_{=0 \text{ si } n > k} \end{aligned}$$

★ Si $n = 0$, on a

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P_{X=k}(Y = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p \binom{k}{0} p^0 q^{k-0} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p q^k = p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} \\ &= p q \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\ &= p q \frac{1}{1 - q^2} \\ &= \frac{q}{1 + q} \end{aligned}$$

★ Si $n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k) P_{X=k}(Y = n) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-1} p \binom{k}{n} p^n q^{k-n} \\ &= \frac{p^{n+1}}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) q^{2k-n-1} \end{aligned}$$

Or, on rappelle que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

D'où, pour $x = q^2$, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)q^{2k-2n} = \frac{n!}{(1-q^2)^{n+1}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \frac{p^{n+1}}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)q^{2k-n-1} \\ &= \frac{p^{n+1}}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)q^{2k-2n}q^{n-1} \\ &= \frac{p^{n+1}q^{n-1}}{n!} \frac{n!}{(1-q^2)^{n+1}} \\ &= \frac{p^{n+1}q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} \\ &= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} \end{aligned}$$

• Conclusion :

$$P(X = n) = \begin{cases} \frac{q}{1+q} & \text{si } n = 0 \\ \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Exercice 10

1. $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(7, p)$.

2. Tout d'abord, notons que

- $\text{Supp}(X) = \{0, 1, \dots, 7\}$.

- $\text{Supp}(Y_{/(X=x)}) = \{0, \dots, \min(2, x)\}$. Soit $k \in \{0, 1, 2\}$.

On note qu'il y a équiprobabilité sur les choix des combinaisons possibles.

Ainsi, pour tout $k \in \text{Supp}(Y_{/(X=x)})$, on a

$$P(Y_{/(X=x)} = k) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de combinaisons}}$$

Or, on prend 2 éléments parmi 7. Il y a donc $\binom{7}{2}$ possibilités au total.

Les cas favorables sont ceux où on choisit k haricots magiques parmi les x de départ et $2 - k$ non magiques parmi les $7 - x$ autres. Ainsi

$$P(Y_{/(X=x)} = k) = \frac{\binom{x}{k} \binom{7-x}{2-k}}{\binom{7}{2}}$$

On remarque également que la formule reste vraie si $k \leq 2$ mais $k > x$ car dans ce cas, $\binom{x}{k} = 0$. On peut donc procéder comme si on avait $\text{Supp}(Y_{/(X=x)}) = \{0, \dots, 2\}$

3. Étant donné les lois conditionnelles précédentes, comme $\{(X = x)\}_{x=0,\dots,7}$ est un système complet d'événements, on a

$$P(Y = k) = \sum_{x=0}^7 P(Y = k, X = x)$$

d'où

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{x=0}^7 P(Y = k, X = x) \\ &= \sum_{x=0}^7 P(X = x)P_{X=x}(Y = k) = \sum_{x=0}^7 \binom{7}{x} p^x (1-p)^{7-x} \frac{\binom{x}{k} \binom{7-x}{2-k}}{\binom{7}{2}} \\ &= \sum_{x=0}^7 \frac{1}{\binom{7}{2}} \binom{7}{x} \binom{x}{k} \binom{7-x}{2-k} p^x (1-p)^{7-x} \end{aligned}$$

Or, pour que $\binom{7-x}{2-k} \neq 0$ ssi $7-x \geq 2-k$, i.e. $x \leq 5$. D'où

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=k}^6 \frac{2!5!}{7!} \frac{7!x!}{x!(7-x)!k!(x-k)!} \frac{(7-x)!}{(2-k)!(7-x-2+k)!} p^x (1-p)^{7-x} \\ &= \frac{2!5!}{k!(2-k)!} \sum_{x=k}^5 \frac{1}{(x-k)!(5-(x-k))!} p^x (1-p)^{7-x} \\ &= \frac{2!5!}{k!(2-k)!} \sum_{x=0}^{5-k} \frac{1}{i!(5-i)!} p^{i+k} (1-p)^{7-i-k} \\ &= \frac{2!}{k!(2-k)!} p^k (1-p)^{2-k} \underbrace{\sum_{x=0}^{5-k} \frac{5!}{i!(5-i)!} p^i (1-p)^{5-i}}_{=1} \end{aligned}$$

D'où

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(2, p)$$

Les tirages se faisant deux fois de suite au hasard, on peut oublier le premier tirage et considérer directement que Y suit une loi binomiale.

Exercice 11

1. On connaît la loi de X sachant $Y = y$ pour y fixé, c'est

$$X_{/(Y=y)} \rightsquigarrow \mathcal{B}(y, p)$$

A priori, $\text{Supp}(X) = \mathbb{N}$. Soit donc $x \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y=0}^{+\infty} P(X = x, Y = y) = \sum_{y=x}^{+\infty} P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{y=x}^{+\infty} P(Y = y)P_{Y=y}(X = x) = \sum_{y=x}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \\ &= e^{-\lambda} p^x \sum_{y=x}^{+\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \frac{y!}{x!(y-x)!} (1-p)^{y-x} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{x!} \sum_{y=x}^{+\infty} \frac{\lambda^y}{(y-x)!} (1-p)^{y-x} = \frac{e^{-\lambda}}{x!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+x} (1-p)^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{x!} (p\lambda)^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{x!} (p\lambda)^x e^{\lambda p(1-p)} = \frac{e^{\lambda(-1+1-p)}}{x!} (p\lambda)^x = e^{\lambda p} \frac{(p\lambda)^x}{x!} \end{aligned}$$

D'où

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$$

2. On sait que $Y - X$ est une variable positive et entière. On utilise encore le système complet lié à Y :

$$\begin{aligned} P(Y - X = k) &= \sum_{y=0}^{+\infty} P(Y - X = k, Y = y) \\ &= \sum_{y=k}^{+\infty} P(X = y - k, Y = y) \\ &= \sum_{y=k}^{+\infty} P(Y = y)P_{Y=y}(X = y - k) \\ &= \sum_{y=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \binom{y}{y-k} p^{y-k} (1-p)^{y-(y-k)} \\ &= \sum_{y=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \frac{y!}{k!(y-k)!} p^{y-k} (1-p)^k \\ &= e^{-\lambda} \frac{(1-p)^k}{k!} \sum_{y=k}^{+\infty} \frac{\lambda^y}{(y-k)!} p^{y-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(1-p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+k}}{j!} p^j \\ &= e^{-\lambda} \frac{(1-p)^k}{k!} \lambda^k e^{\lambda(1-p)} \end{aligned}$$

D'où

$$Y - X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda(1-p))$$

3. Soient $x, k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 P(X = x, Y - X = k) &= P(X = x, Y = k + x) \\
 &= P(Y = k + x) P_{Y=k+x}(X = x) \\
 &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+x}}{(k+x)!} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+x}}{(k+x)!} \frac{(k+x)!}{x!(k+x-x)!} p^x (1-p)^{k+x-x} \\
 &= e^{-\lambda} \lambda^{k+x} \frac{1}{x!k!} p^x (1-p)^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X = x) P(Y - X = k) &= e^{\lambda p} \frac{(p\lambda)^x}{x!} e^{\lambda(1-p)} \frac{(1-p)^k \lambda^k}{k!} \\
 &= e^{\lambda} \frac{p^x \lambda^x (1-p)^k \lambda^k}{x!k!} \\
 &= P(X = x, Y - X = k)
 \end{aligned}$$

Exercice 12

1. Clairement, on a $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$
2. Les contrôles se faisant au hasard, on peut considérer que la proportion restante de ministres est de $\frac{q}{1-p}$. Ainsi, Z_k suivrait une loi binomiale

$$Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n - i, \frac{q}{1-p}\right)$$

3.
 - Si $i + j > n$, l'événement est impossible.
 - Si $i + j \leq n$, l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ signifie que sur les n contrevenants indépendants, il faut choisir
 - ★ les i députés ($\binom{n}{i}$ choix possibles) avec probabilité p ,
 - ★ puis les j ministres ($\binom{n-i}{j}$ choix possibles restants) avec probabilité q ,
 - ★ tous les autres étant automatiquement ni l'un ni l'autre (avec probabilité $1 - p - q$).
 D'où

$$p(X = i, Y = j) = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} p^i q^j (1-p-q)^{n-i-j}$$

4. a)
 - Étant donné que $X + Y = k$, on a $\text{Supp}(T_k) = \left\{ \frac{i}{k} \mid i = 0, \dots, k \right\}$.

$$\begin{aligned}
 P_{(X+Y=k)}\left(T_k = \frac{i}{k}\right) &= \frac{P(T_k = \frac{i}{k} \cap X + Y = k)}{P(X + Y = k)} \\
 &= \frac{P(Y = i \cap X = k - i)}{P(X + Y = k)}
 \end{aligned}$$

Or, $X + Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p + q)$, d'où après simplification,

$$P(T_k = \frac{i}{k}) = \binom{k}{i} \frac{p^i q^{k-i}}{(p+q)^k}$$

- b) Dans la question précédente, on a vu que

$$kT_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(k, \frac{p}{p+q})$$

d'où $\mathbb{E}[kT_k] = k \frac{p}{p+q}$ ce qui donne finalement

$$\mathbb{E}[T_k] = \frac{p}{p+q}$$

Exercice 13

1.

X_1 compte le nombre de succès “franchir la barrière 1” de probabilité $\frac{1}{3}$ dans une série de n expérience identiques et indépendantes “la voiture n choisit une des trois barrières.” Ainsi,

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$$

2. X_2 suit le même principe que X_1 . Ainsi,

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$$

$X_1 + X_2$ compte de la même manière le nombre de de succès “franchir la barrière 1 ou 2” de probabilité $\frac{2}{3}$ dans une série de n expérience identiques et indépendantes “la voiture n choisit une des trois barrières.” Ainsi,

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{2}{3})$$

3. D'après le cours, on sait que, comme les trois variables sont finies, leur covariance existe et

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= \frac{1}{2} (V(X+1+X_2) - V(X_1) - V(X_2)) \\ &= \frac{1}{2} \left(n \frac{2}{3} \frac{1}{3} - 2n \frac{1}{3} \frac{2}{3} \right) \\ &= -n \frac{1}{9} \end{aligned}$$

ii.e.

$$\boxed{\text{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}}$$

4. Non

Exercice 14

1. Les variables X et Y sont indépendantes. Ainsi, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = pq$.

2. a) • $\text{Supp}(X+Y) = \{0; 1; 2\}$.

• $X+Y$:	$Y \backslash X$	0	1
	0	0	1
	1	1	2

loi du couple :

$Y \backslash X$	0	1
0	$(1-p)(1-q)$	$p(1-q)$
1	$(1-p)q$	pq

La loi de W est donc :

k	0	1	2
$p(W=k)$	$(1-p)(1-q)$	$p+q-2pq$	pq

- b) $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = p+q$.

- c) • Supposons que W suive une loi binomiale. On note δ la probabilité de succès. On a donc

$$W \rightsquigarrow \mathcal{B}(2, \delta)$$

D'après la question précédente, comme

$$2\delta = \mathbb{E}[W] = p+q$$

on a

$$\delta = \frac{p+q}{2}$$

On a donc

$$\left(\frac{p+q}{2} \right)^2 = P(W=1) = pq$$

Ce qui donne

$$(p-q)^2 = 0$$

et donc

$$\boxed{p=q}$$

- Supposons que $p=q$. On sait alors que $\boxed{W \rightsquigarrow \mathcal{B}(2, 2p)}$.

Exercice 15

Soit X le nombre de faux tickets de la journée.

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(3)$$

Soit Y le nombre de confettis de deuxième classe sur les 4 confettis trouvés.

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(4, \frac{9}{10})$$

X et Y sont indépendantes.

On cherche $P(X < Y)$:

Comme $\text{Supp}(Y) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On note $p = \frac{9}{10}$.

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \sum_{y=1}^4 P(X < y \cap Y = y) = \sum_{y=1}^4 \sum_{x=0}^{y-1} P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^4 \sum_{x=0}^{y-1} P(X = x)P(Y = y) = \sum_{y=1}^4 P(Y = y) \sum_{x=0}^{y-1} P(X = x) \\ &= \sum_{y=1}^4 P(Y = y) \underbrace{\sum_{x=0}^{y-1} e^{-3} \frac{3^x}{x!}}_{e^{-3} \frac{1-3^y}{1-3}} \\ &= \frac{e^{-3}}{2} \sum_{y=0}^4 P(Y = y)(3^y - 1) \\ &= \frac{e^{-3}}{2} \left(\sum_{y=1}^4 3^y P(Y = y) - \underbrace{\sum_{y=1}^4 P(Y = y)}_{1-P(Y=0)} \right) \\ &= \frac{e^{-3}}{2} \left(\sum_{y=1}^4 3^y P(Y = y) - 1 + P(Y = 0) \right) \\ &= \frac{e^{-3}}{2} \left(\sum_{y=0}^4 3^y P(Y = y) - 1 \right) \\ &= \frac{e^{-3}}{2} \left(\underbrace{\sum_{y=0}^4 \binom{4}{y} (3p)^y (1-p)^{4-y}}_{(3p+1-p)^4} - 1 \right) = \frac{e^{-3}}{2} ((2p+1)^4 - 1) \simeq 0.56 \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{P(X < Y) = \frac{9}{10} e^{-3}}$$

Exercice 16

1. $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(3) \quad Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(1)$
2. On a $T = X + Y$, avec X et Y indépendantes. Ainsi, on a que

$$X + Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(1 + 3) = \mathcal{P}(4)$$

3. $P(T = 0) = e^{-4}$.

Exercice 17

1. On pose $n = 6$.
 - $E(X) = \frac{n+1}{2}$
 - $E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{7 \times 13}{6}$
 - $V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{35}{12}$
2.
 - Support de X : $\{1, \dots, 6\}$.
 - Support de Y : $\{0, \dots, 6\}$.
 - Valeur de $P(X = k, Y = j)$:
 - On note que $Y \leq X$ par construction. Ainsi, si $(k, l) \notin \{1, \dots, 6\} \times \{0, \dots, 6\}$ ou $k < j$, on a

$$P(X = k, Y = j) = 0$$

- On suppose $(k, l) \in \{1, \dots, 6\} \times \{0, \dots, 6\}$ et $k \geq j$.

On a

$$P(X = k, Y = j) = P_{X=k}(Y = j)P(X = k)$$

Or, X admet une loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$ et la loi de Y sachant $(X = k)$ est $\mathcal{B}(p, k)$, avec $p = \frac{1}{2}$. d'où

$$P(X = k, Y = j) = \frac{1}{6} \binom{k}{j} p^k$$

- Conclusion :

$$P(X = k, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } (k, l) \notin \{1, \dots, 6\} \times \{0, \dots, 6\} \text{ ou } k < j \\ \frac{1}{6} \binom{k}{j} p^k & \text{sinon} \end{cases}$$

3. On connaît la loi de X et la loi de Y sachant X . Il suffit donc de connaître l'espérance et la variance de ces deux lois pour répondre à la question.

• Espérance :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{j=0}^6 jP(Y=j) \\
 &= \sum_{j=0}^6 j \sum_{k=1}^6 P_{X=k}(Y=j)P(X=k) \quad (\text{formule des proba totales}) \\
 &= \sum_{k=1}^6 \sum_{j=0}^6 jP_{X=k}(Y=j)P(X=k) \\
 &= \sum_{k=1}^6 P(X=k) \underbrace{\sum_{j=0}^6 jP_{X=k}(Y=j)}_{\text{espérance de } \mathcal{B}(p,k)} \\
 &= \sum_{k=1}^6 P(X=k)pk \\
 &= p \underbrace{\sum_{k=1}^6 P(X=k)k}_{\text{espérance de } X} = 7/4
 \end{aligned}$$

• Variance :

$$\begin{aligned}
 E(Y^2) &= \sum_{j=0}^6 j^2 P(Y=j) \\
 &= \sum_{j=0}^6 j^2 \sum_{k=1}^6 P_{X=k}(Y=j)P(X=k) \quad (\text{formule des proba totales}) \\
 &= \sum_{k=1}^6 \sum_{j=0}^6 j^2 P_{X=k}(Y=j)P(X=k) \\
 &= \sum_{k=1}^6 P(X=k) \underbrace{\sum_{j=0}^6 j^2 P_{X=k}(Y=j)}_{E((Y_{/(X=k)})^2)}
 \end{aligned}$$

Or, $Y_{/(X=k)}$ suit une loi $\mathcal{B}(k,p)$, ainsi,

$$E((Y_{/(X=k)})^2) = V(Y_{/(X=k)}) + E(Y_{/(X=k)})^2 = kpq + (kp)^2 = kp(1-p+kp)$$

d'où

$$\begin{aligned}
 E(Y^2) &= \sum_{k=1}^6 P(X=k)p(kq+k^2p) \\
 &= \underbrace{pq \sum_{k=1}^6 kP(X=k)}_{E(X)} + \underbrace{p^2 \sum_{k=1}^6 k^2 P(X=k)}_{E(X^2)} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{7}{2} + \frac{7 \times 13}{6} \right) = \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$V(Y) = \frac{14}{3}$$

4. • $E(XY)$:

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{k=1}^6 \sum_{j=0}^6 kjP(X=k, Y=j) \\
 &= \sum_{k=1}^6 kP(X=k) \underbrace{\sum_{j=0}^6 jP_{X=k}(Y=j)}_{\text{espérance de } \mathcal{B}(p,k)} \\
 &= \sum_{k=1}^6 kP(X=k)pk \\
 &= p \underbrace{\sum_{k=1}^6 k^2 P(X=k)}_{E(X^2)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{7 \times 13}{6} = \frac{91}{12}
 \end{aligned}$$

• $\text{Cov}(X, Y)$:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{91}{12} - \frac{7}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{35}{24}$$

• $r(X, Y)$:

$$r(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\frac{35}{24}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\sqrt{\frac{14}{3}}} \simeq 0,3959$$

Exercice 18

$$\text{Supp}(Z) = \mathbb{Z}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\text{Supp}(Y) = \mathbb{N}^*$, on peut écrire, par système complet

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X - Y = k) \\ &= \sum_{y=1}^{+\infty} P(X - Y = k \cap Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^{+\infty} P(X - y = k \cap Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^{+\infty} P(X = k + y)P(Y = y) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{aligned}$$

Or

$$P(X = k + y) = \begin{cases} 0 & \text{si } k + y < 1 \\ (1 - p_1)^{k+y-1}p_1 & \text{si } k + y \geq 1 \end{cases}$$

i.e.

$$P(X = k + y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 - k \\ (1 - p_1)^{k+y-1}p_1 & \text{si } y \geq 1 - k \end{cases}$$

et

$$P(Y = y) = (1 - p_2)^{y-1}p_2$$

d'où

$$P(Z = k) = \sum_{y=\max(1, 1-k)}^{+\infty} (1 - p_1)^{k+y-1}p_1(1 - p_2)^{y-1}p_2$$

Ainsi, si $k \geq 0$: alors $1 - k \leq 1$ et donc

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{y=1}^{+\infty} (1 - p_1)^{k+y-1}p_1(1 - p_2)^{y-1}p_2 \\ &= (1 - p_1)^k p_1 p_2 \sum_{y=1}^{+\infty} ((1 - p_1)(1 - p_2))^{y-1} \\ &= (1 - p_1)^k p_1 p_2 \frac{1}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)} \\ &= (1 - p_1)^k \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \end{aligned}$$

si $k < 0$, alors $1 - k > 1$ et donc

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{y=1-k}^{+\infty} (1 - p_1)^{k+y-1}p_1(1 - p_2)^{y-1}p_2 \\ &= (1 - p_1)^k p_1 p_2 \sum_{y=1-k}^{+\infty} ((1 - p_1)(1 - p_2))^{y-1} \\ &= (1 - p_1)^k p_1 p_2 \sum_{j=0}^{+\infty} ((1 - p_1)(1 - p_2))^j \\ &= \frac{1}{(1 - p_2)^k} p_1 p_2 \sum_{j=0}^{+\infty} ((1 - p_1)(1 - p_2))^j \\ &= (1 - p_2)^{-k} p_1 p_2 \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \end{aligned}$$

Remarque : pour $k < 0$, on aurait pu dire également que

$$P(Z = k) = P(Y - X = -k)$$

avec maintenant k positif. Par symétrie du problème en X et Y en échangeant p_1 et p_2 , la formule est donc la même que pour $P(X - Y = |k|)$, mais en échangeant p_1 et p_2 ...

En conclusion :

$$P(Z = k) = \begin{cases} (1 - p_1)^k \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} & \text{si } k \geq 0 \\ (1 - p_2)^{|k|} \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

De plus, par linéarité de l'espérance, comme les espérances de Y et X sont connues :

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$$