

Espaces vectoriels normés – TD₈

Normes

Exercice 1 :

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer sa boule unité fermée.

Exercice 2 :

Pour tout $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n |a_k|^2} \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Vérifier que ce sont des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.
3. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
4. Vérifier que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\|A \times X\|_\infty \leq N(A) \times \|X\|_\infty$.
5. En déduire que, pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leq N(A)$.
6. Montrer que $N(A) = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|A \times X\|.$

Exercice 4 :

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On pose :

$$\forall f \in E, \quad N_1(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \, dt \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .
2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $N_2(f) \leq N_1(f)$.
3. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on note $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(\pi \times n \times x)$.
Exprimer $N_1(f_n)$ et $N_2(f_n)$ en fonction de n .
4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 5 :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})^p$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} N : \quad \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) &\mapsto \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^p x_k \times g_k(t) \right| \, dt. \end{aligned}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la famille $(g_1, \dots, g_p)$ pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Réponse

On vérifie sans peine que N est positive, homogène et vérifie l'inégalité triangulaire.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $N(x_1, \dots, x_p) = 0$

L'application $t \mapsto \left| \sum_{k=1}^p x_k \times g_k(t) \right|$ est positive continue et d'intégrale nulle.

Donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $\left| \sum_{k=1}^p x_k \times g_k(t) \right| = 0$.

Donc, l'application $\sum_{k=1}^p x_k \times g_k$ est nulle.

💡 On reconnaît une combinaison linéaire nulle des fonction $g_1, \dots, g_p$.

Supposons que la famille $(g_1, \dots, g_p)$ est libre.

On en déduit que $x_1 = \dots = x_p = 0$.

Donc, $(x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0)$.

Si la famille $(g_1, \dots, g_p)$ est libre, alors N est une norme.

Réciproquement, on suppose que N est une norme.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^p x_k \times g_k = 0$.

On en déduit que $N(x_1, \dots, x_p) = \int_0^1 0 dt = 0$.

Donc, par le caractère défini, $(x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0)$.

Ainsi, la famille $(g_1, \dots, g_p)$ est libre.

Si N est une norme, alors la famille $(g_1, \dots, g_p)$ est libre.

Suites d'éléments d'un espace vectoriel

Exercice 6 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

1. On suppose que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Peut-on conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?
2. On suppose que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Peut-on conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?

Réponse

1. Non. Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$.
- 2.

Exercice 7 :

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{6} \times u_n - \frac{1}{2} \times v_n + 1 \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3} \times u_n + \frac{1}{6} \times v_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A \times X_n + B$.
2. Montrer que l'équation $Y = A \times Y + B$, d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, admet une unique solution L qu'on déterminera.
3. Montrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\|A \times X\|_\infty \leq k \times \|X\|_\infty$. ($\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme ∞ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.)
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|X_n - L\|_\infty \leq k^n \times \|X_0 - L\|_\infty$.
5. En déduire que la suite (X_n) converge et déterminer sa limite.

Réponse

1. On trouve $A = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on reconnaît une suite arithmético-géométrique matricielle.

2. On note $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a :

$$Y = A \times Y + B \iff \begin{cases} x &= \frac{1}{6} \times x - \frac{1}{2} \times y + 1 \\ y &= \frac{1}{3} \times x + \frac{1}{6} \times y + \frac{1}{2} \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} x &= \frac{21}{31} \\ y &= \frac{27}{31} \end{cases}$$

3. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a :

$$AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \times x - \frac{1}{2} \times y \\ \frac{1}{3} \times x + \frac{1}{6} \times y \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\left| \frac{1}{6} \times x - \frac{1}{2} \times y \right| \leq \frac{1}{6} \times |x| + \frac{1}{2} \times |y| \leq \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \|X\|_\infty \leq \frac{2}{3} \|X\|_\infty,$$

et

$$\left| \frac{1}{3} \times x + \frac{1}{6} \times y \right| \leq \frac{1}{3} \times |x| + \frac{1}{6} \times |y| \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) \|X\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|X\|_\infty \leq \frac{2}{3} \|X\|_\infty.$$

D'où,

$$\|AX\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|X\|_\infty.$$

4. Par récurrence sur n .

Initialisation. $n = 0$. On a k^0 , donc, $\|X_n - L\|_\infty \leq k^n \times \|X_0 - L\|_\infty$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\|X_n - L\|_\infty \leq k^n \times \|X_0 - L\|_\infty$.

Par **Q2**, et **Q3**,

$$\|X_{n+1} - L\|_\infty = \|AX_n + B - (AL + B)\|_\infty = \|A(X_n - L)\|_\infty \leq k\|X_n - L\|_\infty.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\|X_{n+1} - L\|_\infty \leq k^{n+1}\|X_0 - L\|_\infty.$$

5. Par théorème d'encadrement, $\|X_n - L\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

$$X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L.$$

Exercice 8 : Méthode à retenir

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|\cdot\|$.

Nous allons montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que le nombre de $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $A - x.I_n$ est non inversible est fini.
2. En déduire qu'il existe un entier $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, la matrice $A_k = A - \frac{1}{k}.I_n$ est inversible.
3. Conclure.

Topologie

Exercice 9 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Pour toute partie A de E , on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A . On dit que $\overset{\circ}{A}$ est l'intérieur de A .

1. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
2. Soit A une partie de E . Montrer que A est un ouvert de E si, et seulement si, $A = \overset{\circ}{A}$.
3. Soit A une partie de E . Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A .

Exercice 10 :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E . On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A . Montrer que si A est convexe, alors $\bar{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ sont convexes.

Exercice 11 :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F une partie fermée de E .

On note $O_n = \bigcup_{x \in F} B_o\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, O_n est un ouvert de E .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F \subset O_n$.
3. Montrer que $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$.

Exercice 12 :

Soit E un espace vectoriel normé et N_1 et N_2 deux normes sur E . On note B_{N_1} (resp. B_{N_2}) la boule unité fermée pour la norme N_1 (resp. N_2).

Montrer que $B_{N_1} \subset B_{N_2}$ si, et seulement si, $N_2 \leq N_1$.

Exercice 13 :

Soit E un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$ un ouvert de E .

1. Soit $b \in E$. Montrer que $C = \{a + b | a \in A\}$ est un ouvert de E .
2. Soit $B \subset E$ non vide. Montrer que $D = \{a + b | (a, b) \in A \times B\}$ est un ouvert de E .

Exercice 14 :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Montrer que $\sup(A) \in \overline{A}$.

Exercice 15 :

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que F est convexe.
2. Montrer que F est un fermé de E .
3. On suppose qu'il existe x_0 un point intérieur à F . Montrer que $F = E$.

Réponse

1. Soit $(x, y) \in F^2$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E , pour tout $t \in [0, 1]$, $t.x + (1-t).y \in F$. Donc, $[x, y] \subset F$. Donc, F est convexe.
2. Soit (x_n) une suite d'éléments de F qui converge. On note ℓ sa limite.
On sait que E est de dimension finie, donc F aussi. On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F qu'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_p)$ une base de E .
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $(x_n^1, \dots, x_n^q, x_n^{q+1}, \dots, x_n^p)$ les suites coordonnées de x_n dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.
La suite (x_n) converge, donc les coordonnées $(x_n^1), \dots, (x_n^p)$ dans la base $\mathcal{B}$ aussi. On note $y_1, \dots, y_p$ leurs limites respectives.
Par unicité de la limite $\ell = y_1.e_1 + \dots + y_p.e_p$.
De plus, on sait que, pour tout $k > q$ et $n \in \mathbb{N}$, $x_n^k = 0$ (car $x_n \in F$ et $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F). Donc, pour tout $k > q$, $y_k = 0$.
Donc, $\ell = y_1.e_1 + \dots + y_q.e_q \in F$.
Ainsi, par caractérisation séquentielle des fermés, F est un fermé de E .
3. L'inclusion $F \subset E$ est toujours vraie. Montrons l'autre inclusion.
Soit $y \in E$.
On sait que $x \in \overset{o}{F}$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_o(x_0, r) \subset F$.
On note $z = x_0 + \frac{r}{2(1+\|y\|)}y$. On a alors $\|z - x_0\| = \frac{r}{2(1+\|y\|)} \times \|y\| \leq \frac{r}{2} < r$.
Donc, $z - x_0 \in B_o(x_0, r)$. Or, $B_o(x_0, r) \subset F$, donc $z - y \in F$.
De plus, $x_0 \in F$. D'où, comme F est un sous-espace vectoriel de E , $y = \frac{2(1+\|y\|)}{r} \cdot (z - x_0) \in F$.
Donc, $E \subset F$. Puis, $E = F$.

Exercice 16 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note

$$E_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n \text{ et } P \text{ est unitaire et scindé sur } \mathbb{R}\}.$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme unitaire de degré n .

Montrer que $P \in E_n$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

2. Montrer que E_n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.