

Réduction #2

Feuille d'exercices #04

⊗ Partie A – Sous-espaces stables

★★ **Exercice 1** — Soient E un $\mathbb{C}$ -e.v. de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par u .
2. En considérant $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$ où λ est une valeur propre de u , en déduire qu'il existe un hyperplan stable par u .
3. Ces propriétés restent-elles vraies lorsque E est un $\mathbb{R}$ -e.v.?

★★ **Exercice 2** — Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, d'indice de nilpotence n . Montrer qu'il existe exactement $n+1$ sous-espaces u -stables.

★★ **Exercice 3** — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + u - 2\text{id}_E = 0$. Déterminer les sous-espaces de E stables par u .

★★ **Exercice 4** — Soient $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note H l'hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation $LX = 0$, et $u: X \in \mathbb{K}^n \mapsto AX$. Montrer que H est stable par u si et seulement si $L^\top$ est vecteur propre de $A^\top$.

★★ **Exercice 5** — Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par f .
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable. Est-ce vrai pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

⊗ Partie B – Polynômes annulateurs et équations matricielles

★★ **Exercice 6** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose A nilpotente. Montrer de deux manières que $A^n = 0$.
2. On suppose A inversible. Montrer de deux manières que A^{-1} est un polynôme en A , puis comparer les polynômes minimaux de A et A^{-1} .

★ **Exercice 7** — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, tel que $AB = P(A)$ et $P(0) \neq 0$. Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

★ **Exercice 8** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'ensemble des polynômes P pour lesquels $P(A)$ est nilpotente.

★ **Exercice 9** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + 6I_n$. Que dire de $\det(A)$?

★ **Exercice 10** — Trouver $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A = 0$ et $\text{Tr}(A) = 0$.

★ **Exercice 11** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 4A$. Montrer que $\text{Tr}(A) \in 2\mathbb{Z}$.

★ **Exercice 12** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

★★ **Exercice 13** — Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ existe-t-il un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f^3 - f = \text{id}$ et $\text{Tr}(f) \in \mathbb{Q}$?

★ **Exercice 14** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non scalaire telle que $A^3 + A^2 - I_n = 0$.

1. Montrer que $\det(A) > 0$.
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

★★ **Exercice 15** — Déterminer les réels α tels que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A^2 = \alpha A - I_n \implies \det(A) > 0$$

★ **Exercice 16** — Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle, de rang 2 et telle que $A^3 \neq 0$. Étudier la diagonalisabilité de A .

⊗ Partie C – Polynôme minimal

★ **Exercice 17** — Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sont-elles diagonalisables?

Réponses : $\pi_A = X(X-2)(X-4)$, $\pi_B = X(X-4)$, $\pi_C = (X-2)(X-1)^2$ et $\pi_D = (X-1)^3$.

★ **Exercice 18** — Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -e.v. E tel que $u^2 = 3u - 3\text{id}_E$. Quel est le polynôme minimal de u ?

★ **Exercice 19** — Soient E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dim. finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal π_f est irréductible de degré 2. Montrer que n est pair et que $\chi_f = \pi_f^{n/2}$.

★★ **Exercice 20** — Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. En restreignant u à son image, montrer que $\deg(\pi_u) \leq \text{rg}(u) + 1$.

★★ **Exercice 21** — Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On suppose que F et G sont des supplémentaires de E stables par u . On note $v = u|_F$ et $w = u|_G$ et μ le polynôme minimal d'un endomorphisme.
 - Justifier que χ_v et χ_w divisent χ_u . Faire de même avec μ_v, μ_w et μ_u .
 - Montrer que $\mu_u = \text{ppcm}(\mu_v, \mu_w)$.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u) \in \text{GL}(E)$ ssi $P \wedge \mu_u = 1$.

★★ **Exercice 22** — Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u) \in \text{GL}(E)$ si et seulement si $P \wedge \pi_u = 1$.
- Si $u \in \text{GL}(E)$, montrer que u^{-1} est un polynôme en u ; comparer π_u et $\pi_{u^{-1}}$.

★★ **Exercice 23** — *Matrices par blocs*

- Soit $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale par blocs. Comparer les polynômes caractéristiques et minimaux de A et $A_1, \dots, A_p$.
- Faire de même avec une matrice triangulaire par blocs.

★★★ **Exercice 24** — *Polynôme minimal ponctuel*

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $x \in E$ non nul, on considère l'ensemble $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0_E\}$.

- Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de I_x , noté $\pi_{u,x}$, tel que pour tout $P \in I_x$, $\pi_{u,x} \mid P$. Montrer en outre que $\pi_{u,x} \mid \pi_u$.
- Montrer que si $x, y \in E \setminus \{0\}$ vérifient $\pi_{u,x} \wedge \pi_{u,y} = 1$, $\pi_{u,x+y} = \pi_{u,x} \times \pi_{u,y}$.
- Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. On pourra considérer le vecteur $x_i \in \text{Ker}(u - \lambda_i)^{d_i} \setminus \text{Ker}(u - \lambda_i)^{d_i-1}$ et la factorisation $\pi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{d_i}$.

⊗ Partie D – Polynômes d'endomorphismes et réduction

★★ **Exercice 25** — Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Déterminer l'idéal annulateur de A et la dimension de $\mathbb{R}[A]$.
- Calculer A^n , déterminer la dimension du commutant de A et résoudre l'équation $M^2 = A$.

★★ **Exercice 26** — Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On montrera qu'il y a exactement deux solutions que l'on explicitera à l'aide du développement en série entière de $\sqrt{1+x}$.

★★ **Exercice 27** — Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \text{GL}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable.

★ **Exercice 28** — Soient E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie et f un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

- Montrer que $\text{Im}(f)$ est le noyau d'un polynôme en f .
- Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E où la matrice de f est de la forme :

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } A \text{ inversible}$$

★★ **Exercice 29** — Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ telle que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que seuls les polynômes en u commutent avec u .

★★ **Exercice 30** — Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal $(X-1)^2$.

1. On pose $g = f - \text{id}_E$. Comparer $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$.
2. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

★★ **Exercice 31** — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que AB et BA ont même spectre.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P annule AB ssi P annule BA .
3. En déduire que AB est diagonalisable ssi BA est diagonalisable.

★★ **Exercice 32** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(P) \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P(M)$.
2. On suppose que toutes les valeurs propres de A sont simples. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = P(M)$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice dont toutes les valeurs propres sont simples et telle que A et M sont co-diagonalisables. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = Q(M)$.

★★ **Exercice 33** — Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose dans cette question u diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.
 - a) Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_p \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i$$

- b) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $P_i \in \mathbb{K}[X]$ tel que $u_i = P_i(u)$.
2. Soient réciproquement $u_1, \dots, u_p \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) u_i$.
Montrer que u est diagonalisable et que $\text{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

★★ **Exercice 34** — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r telle que $AC = CB$. Prouver que $\deg(\chi_A \wedge \chi_B) \geq r$.

★★ **Exercice 35** — Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, établir l'équivalence des assertions :

- (i) $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$ (ii) $\chi_A(B) \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$ (iii) $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), C \neq 0, AC = CB$

Y a-t-il unicité de la matrice C ?

★★★ **Exercice 36** — Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\mathcal{K} = \{\text{Ker}(P(u)) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathcal{I} = \{\text{Im}(P(u)) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ sont des ensembles finis de même cardinal.

★ **Exercice 37** — Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi A et B le sont.
2. Montrer de même que M est trigonalisable ssi A et B le sont.

★★ **Exercice 38** — Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{bmatrix} I_n & A \\ -A & I_n \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de B en fonction de ceux de A^2 .
2. Montrer que si A est diagonalisable, alors B l'est aussi.

★★ **Exercice 39** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, déterminer dans les trois cas suivants $P(B)$ puis donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que la matrice B soit diagonalisable : $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$.

★★ **Exercice 40** — Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et les deux applications φ et ψ définies par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM \quad \text{et} \quad \psi(M) = MA$$

1. Montrer que $\pi_\varphi = \pi_\psi = \pi_A$. En déduire que φ et ψ sont diagonalisables si, et seulement si, A est diagonalisable.
2. Montrer que φ, ψ et A partagent les mêmes valeurs propres. Décrire les sous-espaces propres de φ et ψ en fonction des sous-espaces propres de A .

★ **Exercice 41** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice d'un projecteur. On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM + MA$. Justifier la diagonalisabilité de φ à l'aide d'un polynôme annulateur.

★★★ Exercice 42 — Existence d'une matrice qui annule un polynôme

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer dans les trois cas suivants s'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P(A) = 0$, en discutant éventuellement selon les valeurs de n .

- (i) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (ii) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (iii) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $P = X^3 - X - 1$

★★ Exercice 43 — Diagonalisation simultanée

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes diagonalisables vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation à u et v .
2. En déduire que $u \circ v$ et $u + v$ sont diagonalisables.

★★ Exercice 44 — Trigonalisation simultanée

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes qui commutent d'un $\mathbb{C}$ -e.v. de dim. n .

1. Montrer par récurrence sur n l'existence d'un vecteur propre commun.
2. Montrer qu'il existe une base commune de trigonalisation.

★★★ Exercice 45 — Crochet de Lie

Soient E un $\mathbb{C}$ -e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

1. On suppose dans cette question qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $[f, g] = \alpha f$.
 - a) Calculer $[f^p, g]$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que f est nilpotente.
On pourra considérer des éléments propres de $u \mapsto u \circ g - g \circ u$.
 - b) Montrer que f et g sont trigonalisables dans une même base.
2. On suppose désormais qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ tel que $[f, g] = \alpha f + \beta g$.
Montrer que f et g sont trigonalisables dans une même base.

★★ Exercice 46 — Soient G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $f = \sum_{g \in G} g$.

1. Donner un exemple non trivial d'un tel sous-groupe.
2. Trouver un polynôme annulateur de f .
3. Déterminer $\mathrm{Sp}(f)$ puis exprimer l'unique sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle en fonction des éléments de G .

★★★ Exercice 47 — Lemme de Serre

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont l'inverse est aussi à coefficients entiers.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe.
2. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ d'ordre fini et $p \geq 3$ premier. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tels que $A = I_n + pM$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.
3. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.