

Objectifs du chapitre :

- Maîtriser les définitions et modes de génération d'une suite (explicite, par récurrence)
- Reconnaître et exploiter les suites arithmétiques et géométriques
- Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique
- Étudier le sens de variation et la convergence d'une suite
- Déterminer la limite d'une suite
- Appliquer les suites à des problèmes concrets : intérêts composés, amortissements, modèles d'évolution

Situation professionnelle**Investissement et amortissement dans le bâtiment**

Un chef d'entreprise du bâtiment contracte un emprunt de 120 000 € pour l'achat d'un engin de chantier. Le remboursement s'effectue par mensualités constantes sur 5 ans au taux annuel de 3,6 %. Comment calculer le montant de chaque mensualité ?

Comment évolue le capital restant dû au fil des mois ?

Par ailleurs, un technicien en génie climatique observe que la température d'un local non chauffé diminue de 8 % par heure lorsque la température extérieure est de 5 °C.

Comment modéliser cette évolution ?

Ces deux problèmes se résolvent grâce aux **suites numériques**.

1. Généralités sur les suites

DÉFINITION — SUITE NUMÉRIQUE

Une **suite numérique** est une application de \mathbb{N} (ou d'une partie de \mathbb{N}) dans \mathbb{R} . On la note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) . Le nombre réel u_n est appelé le **terme de rang n** (ou terme général) de la suite.

1.1 Modes de génération

DÉFINITION — SUITE DÉFINIE EXPLICITEMENT

Une suite est définie de manière **explicite** lorsque u_n est exprimé directement en fonction de n :

$$u_n = f(n)$$

On peut alors calculer n'importe quel terme indépendamment des autres.

EXEMPLE

La suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 - 2n + 1$ est explicite.

On calcule directement : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_5 = 3 \times 25 - 10 + 1 = 66$.

DÉFINITION — SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE

Une suite est définie par **récurrence** lorsqu'on connaît :

- un ou plusieurs termes initiaux (par exemple u_0),
- une relation de récurrence qui donne u_{n+1} en fonction de u_n (et éventuellement de n).

$$u_{n+1} = g(u_n) \quad \text{avec } u_0 \text{ donné}$$

EXEMPLE

Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Alors : $u_1 = 2 \times 5 - 3 = 7$, $u_2 = 2 \times 7 - 3 = 11$, $u_3 = 2 \times 11 - 3 = 19$.

ATTENTION

Avec une définition par récurrence, pour calculer u_{100} , il faut d'abord calculer tous les termes de u_0 à u_{99} . Ce n'est pas le cas avec une définition explicite.

MINI-EXERCICE 1

Calculer des termes de suites

1) Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n + 3}$. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_{10} .

2) Soit (v_n) définie par $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = 0,9 v_n + 5$. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .

2. Suites arithmétiques

DÉFINITION

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r (appelé **raison**) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** la raison r .

PROPRIÉTÉ — TERME GÉNÉRAL

Si (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors :

$$u_n = u_0 + n r$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_p + (n - p) r$$

Terme général d'une suite arithmétique

$$u_n = u_0 + n r$$

EXEMPLE — AMORTISSEMENT LINÉAIRE

Un équipement de chantier d'une valeur de 45 000 € est amorti linéairement sur 9 ans.

Chaque année, sa valeur diminue de $\frac{45\,000}{9} = 5\,000$ €.

Soit V_n la valeur résiduelle après n années : $V_0 = 45\,000$ et $r = -5\,000$.

Alors $V_n = 45\,000 + n \times (-5\,000) = 45\,000 - 5\,000 n$.

Après 6 ans : $V_6 = 45\,000 - 30\,000 = 15\,000$ €.

2.1 Somme des termes consécutifs

PROPRIÉTÉ — SOMME DES N PREMIERS TERMES

La somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_0, u_1, \dots, u_n) est :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n + 1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Autrement dit : nombre de termes \times moyenne du premier et du dernier terme.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

MÉTHODE — CALCULER UNE SOMME DE TERMES D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

1. Vérifier que la suite est bien arithmétique (différence constante).
2. Identifier le premier terme, le dernier terme et le nombre de termes.
3. Appliquer la formule $S = \frac{\text{nb de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$.

EXEMPLE — SOMME DE GAUSS

Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

C'est une suite arithmétique de raison 1. Premier terme : 1, dernier terme : 100, nombre de termes : 100.

$$S = \frac{100 \times (1 + 100)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5\,050.$$

MINI-EXERCICE 2

Suite arithmétique et amortissement

Un menuisier agenceur achète une raboteuse à 12 000 €. Elle perd 1 500 € de valeur chaque année (amortissement linéaire).

- 1) Exprimer la valeur résiduelle V_n en fonction de n .
- 2) Au bout de combien d'années la machine est-elle totalement amortie ?
- 3) Calculer la somme des valeurs résiduelles de l'année 0 à l'année 8 : $V_0 + V_1 + \dots + V_8$.

3. Suites géométriques

DÉFINITION

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel $q \neq 0$ (appelé **raison**) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

On passe d'un terme au suivant en **multipliant** par la raison q .

ATTENTION

Pour qu'une suite géométrique soit bien définie, tous ses termes doivent être **non nuls**. Si un seul terme est nul, la suite ne peut pas être géométrique (on ne peut pas diviser par zéro pour retrouver q).

PROPRIÉTÉ — TERME GÉNÉRAL

Si (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Terme général d'une suite géométrique

$$u_n = u_0 \times q^n$$

EXEMPLE — INTÉRÊTS COMPOSÉS

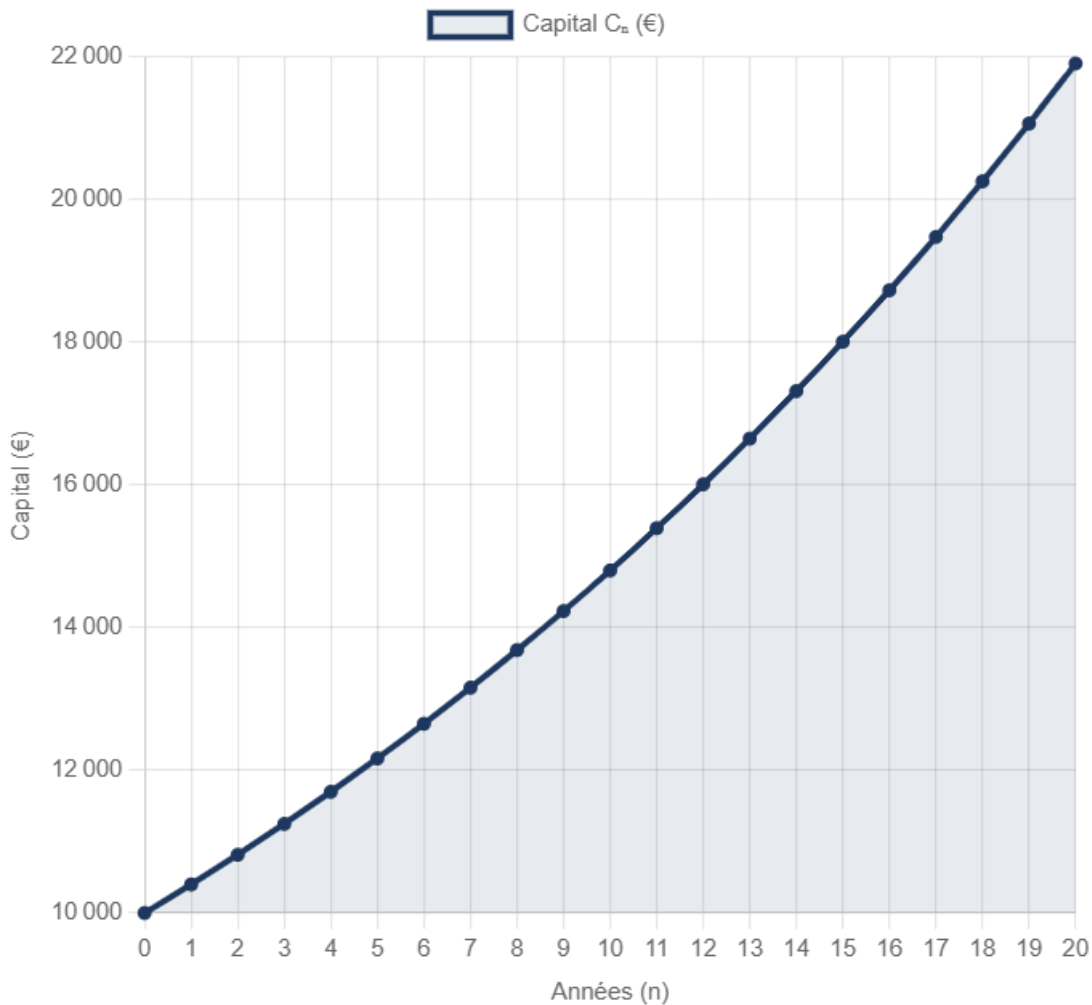
Un artisan du bâtiment place 10 000 € à un taux annuel de 4 % (intérêts composés).

Soit C_n le capital après n années. Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

Donc $C_n = 10\,000 \times 1,04^n$. C'est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 10\,000$ et de raison $q = 1,04$.

Après 10 ans : $C_{10} = 10\,000 \times 1,04^{10} \approx 14\,802$ €.

Évolution d'un capital de 10 000 € à 4 % d'intérêts composés



3.1 Somme des termes consécutifs

PROPRIÉTÉ — SOMME DES $(N+1)$ PREMIERS TERMES

Si $q \neq 1$, la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique est :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique ($q \neq 1$)

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

ATTENTION — NOMBRE DE TERMES

Dans la formule, l'exposant de q est le **nombre de termes** de la somme, pas le rang du dernier terme. Si on somme de u_0 à u_n , il y a $(n+1)$ termes, donc l'exposant est $(n+1)$.

MÉTHODE — CALCULER UNE SOMME DE TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

1. Vérifier que la suite est géométrique (rapport constant).
2. Identifier le premier terme, la raison q et le nombre de termes.
3. Appliquer : $S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$.

EXEMPLE — TOTAL DES INTÉRÊTS

Reprenons le placement de 10 000 € à 4 %. Calculons la somme des capitaux annuels sur 5 ans (pour un calcul fiscal par exemple) :

$$S = C_0 + C_1 + \dots + C_4 = 10\,000 \times \frac{1 - 1,04^5}{1 - 1,04}$$

$$S = 10\,000 \times \frac{1 - 1,2166\dots}{-0,04} = 10\,000 \times \frac{-0,2166\dots}{-0,04} \approx 54\,163 \text{ €}.$$

MINI-EXERCICE 3

Suite géométrique et évolution de température

Un technicien en génie climatique observe que la température intérieure d'un local non chauffé passe de 20 °C à $18,4\text{ °C}$ en une heure lorsque la température extérieure est de 0 °C . On modélise la température intérieure par une suite géométrique (T_n) où T_n est la température (en °C) après n heures.

- 1) Calculer la raison q de cette suite géométrique.
- 2) Exprimer T_n en fonction de n .
- 3) Quelle sera la température après 5 heures ? Après 10 heures ?

4. Sens de variation d'une suite

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

MÉTHODE — ÉTUDIER LE SENS DE VARIATION

On dispose de plusieurs techniques :

1. **Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$** : si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n , la suite est croissante.
2. **Étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$** (pour une suite à termes strictement positifs) : si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite est croissante.
3. **Étude de la fonction associée** : si $u_n = f(n)$ et f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est croissante.

PROPRIÉTÉ — CAS DES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Type de suite	Croissante si...	Décroissante si...
Arithmétique de raison r	$r > 0$	$r < 0$
Géométrique de raison $q, u_0 > 0$	$q > 1$	$0 < q < 1$
Géométrique de raison $q, u_0 < 0$	$0 < q < 1$	$q > 1$

MINI-EXERCICE 4

Sens de variation

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$ pour $n \geq 0$.

5. Limites de suites

DÉFINITION — SUITE CONVERGENTE

On dit qu'une suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ si, à partir d'un certain rang, les termes u_n deviennent aussi proches de ℓ que l'on veut. On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

La suite est dite **convergente** et ℓ est sa **limite**.

DÉFINITION — SUITE DIVERGENTE

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**. Elle peut :

- tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ (divergence vers l'infini),
- osciller sans tendre vers aucune limite (ex. : $u_n = (-1)^n$).

5.1 Limites de référence

Limites de référence à connaître

Suite	Condition	Limite
q^n	$-1 < q < 1$	0
q^n	$q > 1$	$+\infty$
q^n	$q = 1$	1 (suite constante)
q^n	$q \leq -1$	pas de limite
$\frac{1}{n}$		0
$\frac{1}{n^2}$		0
n, n^2, \sqrt{n}		$+\infty$

5.2 Limites des suites arithmétiques et géométriques

PROPRIÉTÉ — LIMITE D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $r = 0$, la suite est constante : $u_n = u_0$ pour tout n .

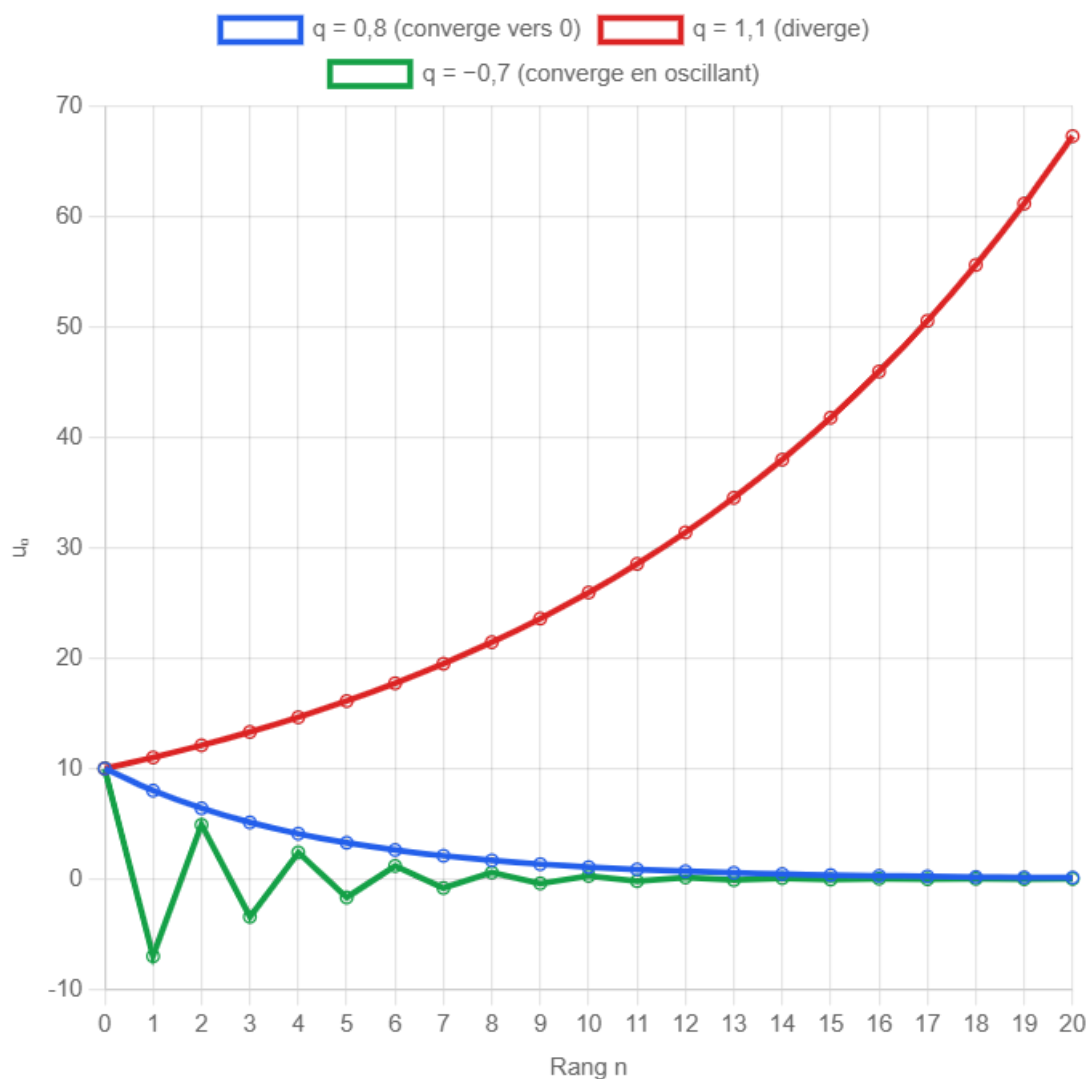
Une suite arithmétique non constante diverge toujours.

PROPRIÉTÉ — LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- Si $-1 < q < 1$ (ou $|q| < 1$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$: la suite **converge vers 0**.
- Si $q > 1$, la suite **diverge vers $\pm\infty$** (selon le signe de u_0).
- Si $q = 1$, la suite est constante.
- Si $q \leq -1$, la suite n'a **pas de limite**.

Comportement de la suite géométrique $u_n = u_0 \times q^n$ selon la valeur de q



Bleu : $q = 0,8$ (convergente) — Rouge : $q = 1,1$ (divergente) — Vert : $q = -0,7$ (convergente en oscillant)

5.3 Recherche de seuil — Approche algorithmique et tableur

MÉTHODE — DÉTERMINER UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME OU D'UN TABLEUR

Lorsqu'on cherche le plus petit entier n tel que $u_n \leq A$ (ou $u_n \geq A$), on peut utiliser :

1. **Un tableur** : on crée une colonne pour n et une colonne pour u_n , puis on repère visuellement (ou avec une mise en forme conditionnelle) le rang cherché.
2. **Un algorithme** (pseudo-code ou Python) : on utilise une boucle tant que qui incrémente n jusqu'à ce que la condition soit vérifiée.

Cette méthode est particulièrement utile quand la résolution algébrique (par logarithme) n'est pas demandée ou quand la suite est définie par récurrence.

EXEMPLE — RECHERCHE DE SEUIL

Problème : La suite géométrique (u_n) est définie par $u_n = 1000 \times 0,95^n$. À partir de quel rang a-t-on $u_n < 100$?

Approche tableur :

Cellule A	Cellule B	Formule en B
A1 : n	B1 : u_n	
A2 : 0	B2 : 1000	=1000*0,95^A2
A3 : =A2+1	B3 : =1000*0,95^A3	recopier vers le bas

On recopie vers le bas et on cherche la première valeur de u_n inférieure à 100.

Approche algorithmique (Python) :

```
n = 0
u = 1000
while u >= 100:
    n = n + 1
    u = 1000 * 0.95**n
print("Le plus petit rang est n =", n)
```

Résultat : On trouve $n = 45$, car $u_{44} = 1000 \times 0,95^{44} \approx 103,5$ et $u_{45} = 1000 \times 0,95^{45} \approx 98,3 < 100$.

Vérification algébrique : $0,95^n < 0,1 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,95)} \approx 44,9$, soit $n = 45$. ✓

5.4 Opérations sur les limites

PROPRIÉTÉ — OPÉRATIONS

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ (avec $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$), alors :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$

ATTENTION — FORMES INDÉTERMINÉES

Certaines combinaisons de limites ne permettent pas de conclure directement. Les **formes indéterminées** sont :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

Dans ces cas, il faut transformer l'expression (factoriser, diviser par le terme dominant...) pour lever l'indétermination.

MÉTHODE — LIMITE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Pour calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_p n^p + \dots}{b_q n^q + \dots}$:

1. Identifier le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
2. Factoriser par n^p au numérateur et n^q au dénominateur.
3. Simplifier et appliquer les limites de référence.

Résultat :

la limite est celle du quotient des termes de plus haut degré $\frac{a_p n^p}{b_q n^q}$.

EXEMPLE

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 5n - 1}{2n^2 + 7}$.

Les termes dominants sont $3n^2$ et $2n^2$. On factorise :

$$\frac{3n^2 + 5n - 1}{2n^2 + 7} = \frac{n^2 \left(3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}$$

MINI-EXERCICE 5

Calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n - 3}{2n + 1}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{3n + 2}$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 \times 0,95^n + 7)$

5.5 Théorèmes de convergence

THÉORÈME — SUITE CROISSANTE MAJORÉE

Toute suite **croissante et majorée** converge.

Toute suite **décroissante et minorée** converge.

THÉORÈME DES GENDARMES (THÉORÈME D'ENCADREMENT)

Si, à partir d'un certain rang, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

6. Applications professionnelles

6.1 Intérêts composés

MODÈLE — INTÉRÊTS COMPOSÉS

Un capital C_0 est placé à un taux d'intérêt annuel t (en décimal). Après n années, le capital acquis est :

$$C_n = C_0 \times (1 + t)^n$$

C'est une suite géométrique de raison $q = 1 + t > 1$: le capital croît indéfiniment.

EXEMPLE — INVESTISSEMENT EN MATÉRIAUX

Un entrepreneur investit 25 000 € dans un stock de matériaux de construction. Cet investissement se valorise de 3,5 % par an en raison de la hausse des prix.

Valeur après n ans : $V_n = 25\,000 \times 1,035^n$.

Après 8 ans : $V_8 = 25\,000 \times 1,035^8 \approx 25\,000 \times 1,3168 \approx 32\,921$ €.

Le gain réalisé est de $32\,921 - 25\,000 = 7\,921$ €.

6.2 Amortissement d'un emprunt par annuités constantes

MODÈLE — ANNUITÉ CONSTANTE

Un emprunt de montant C_0 est remboursé par n annuités constantes a à un taux annuel t . Le montant de l'annuité est :

$$a = C_0 \times \frac{t}{1 - (1 + t)^{-n}}$$

EXEMPLE — EMPRUNT POUR L'ACHAT D'UN ENGIN DE CHANTIER

Un chef d'entreprise emprunte $C_0 = 120\,000$ € sur 5 ans au taux annuel $t = 3,6\% = 0,036$.

Annuité constante :

$$a = 120\,000 \times \frac{0,036}{1 - 1,036^{-5}} = 120\,000 \times \frac{0,036}{1 - 0,8379} = 120\,000 \times \frac{0,036}{0,1621} \approx 26\,653 \text{ €}.$$

Il remboursera environ **26 653 €** par an pendant 5 ans, soit un total de 133 265 €, dont 13 265 € d'intérêts.

6.3 Modèle d'évolution — Refroidissement

Modélisation du refroidissement d'un bâtiment

Un technicien en génie climatique étudie la perte de chaleur d'un bâtiment dont le chauffage est en panne. La température intérieure T_n (en °C) après n heures peut être modélisée par :

$$T_n = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}}) \times q^n$$

avec T_0 la température initiale, T_{ext} la température extérieure et $0 < q < 1$ un coefficient dépendant de l'isolation du bâtiment.

EXEMPLE — REFROIDISSEMENT D'UN LOCAL

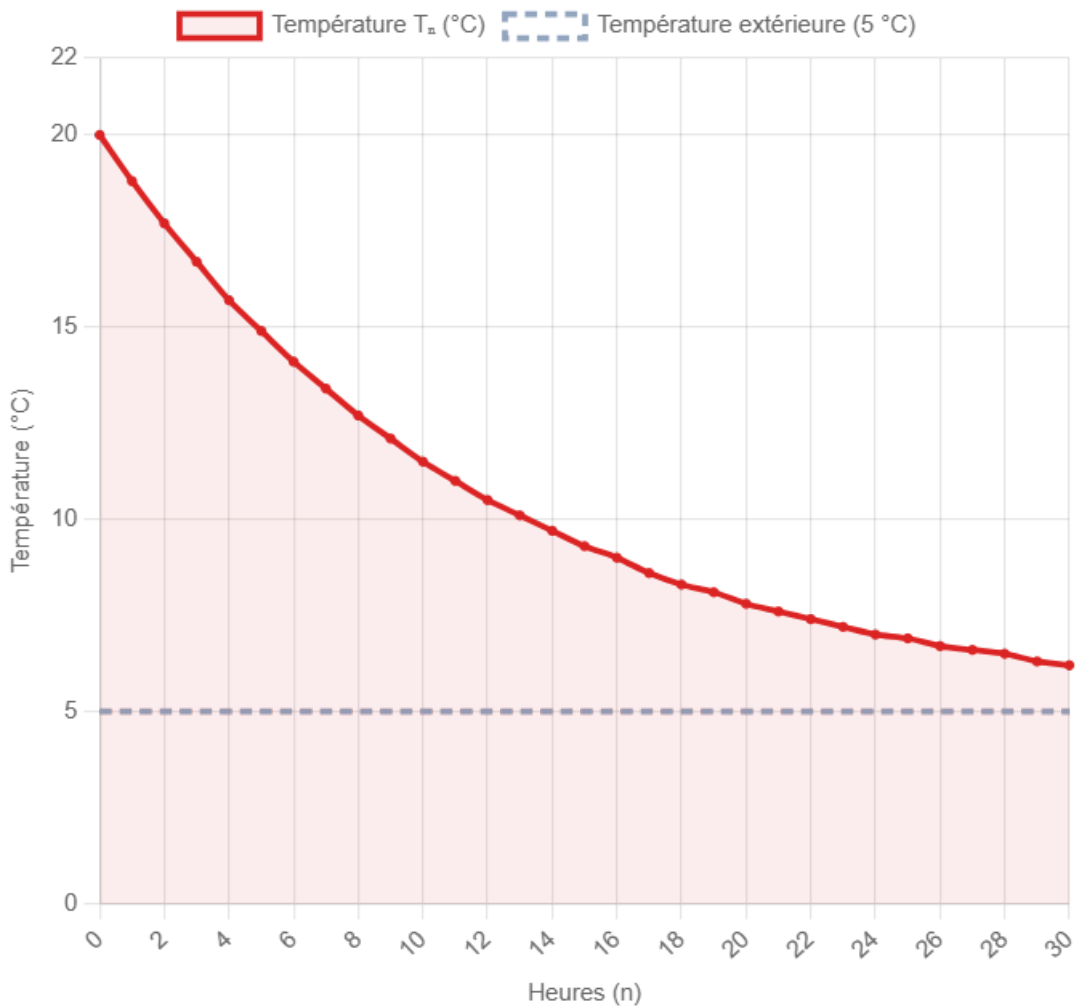
Données : $T_0 = 20 \text{ °C}$, $T_{\text{ext}} = 5 \text{ °C}$, $q = 0,92$ (bâtiment moyennement isolé).

$$T_n = 5 + 15 \times 0,92^n$$

n (heures)	0	1	2	5	10	20
T_n (°C)	20,0	18,8	17,7	14,9	11,5	7,6

Comme $|q| = 0,92 < 1$, on a $0,92^n \rightarrow 0$, donc $T_n \rightarrow 5 \text{ °C}$. La température intérieure converge vers la température extérieure.

Refroidissement d'un bâtiment — $T_n = 5 + 15 \times 0,92^n$



MINI-EXERCICE 6

Application — Emprunt et intérêts

Un artisan emprunte 50 000 € au taux annuel de 4 % pour acheter un véhicule utilitaire. Il rembourse par annuités constantes sur 4 ans.

1) Calculer le montant de l'annuité constante.

2) Compléter le tableau d'amortissement :

Année	Capital restant dû (début)	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	50 000	?	?	?
2	?	?	?	?
3	?	?	?	?
4	?	?	?	?

L'essentiel du chapitre

Suite arithmétique (raison r)

- Récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$
- Terme général : $u_n = u_0 + nr$
- Somme : $S = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$
- Diverge toujours (si $r \neq 0$)

Suite géométrique (raison q)

- Récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$
- Terme général : $u_n = u_0 \times q^n$
- Somme : $S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- Converge vers 0 si $|q| < 1$

Compétences travaillées :

- Reconnaître le type d'une suite et calculer ses termes
- Calculer des sommes de termes consécutifs
- Étudier le sens de variation et la convergence
- Résoudre des problèmes concrets (intérêts, amortissements, évolutions)

NIVEAU 1 Connaître et appliquer directement

Exercice 1 Reconnaître le type de suite

Pour chacune des suites suivantes, indiquer si elle est arithmétique, géométrique, ou ni l'un ni l'autre. Préciser la raison le cas échéant.

a) $u_n = 7 + 3n$

b) $v_n = 5 \times 2^n$

c) $w_n = n^2 + 1$

d) $t_0 = 100$ et $t_{n+1} = t_n - 8$

e) $s_0 = 1000$ et $s_{n+1} = 0,95 s_n$

Mes calculs :

Exercice 2 Calcul de termes

- 1) (u_n) est arithmétique avec $u_0 = 12$ et $r = -2,5$. Calculer u_5 , u_{10} et u_{20} .
- 2) (v_n) est géométrique avec $v_0 = 800$ et $q = 0,9$. Calculer v_1 , v_5 et v_{10} .
- 3) (w_n) est arithmétique avec $w_3 = 17$ et $w_7 = 29$. Déterminer r , w_0 et w_{15} .

Mes calculs :

Exercice 3 Calcul de sommes

- 1) Calculer $S = 5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 62$.
- 2) Calculer $S = 3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 3 \times 2^9$.
- 3) Calculer $\sum_{k=0}^n 4 \times 0,5^k$ en fonction de n , puis déterminer sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Mes calculs :

Exercice 4**Limites directes**

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - 100)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 \times 0,8^n$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n + 1}{n - 3}$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (12 - 5 \times 0,6^n)$

Mes calculs :

Exercice 5 Intérêts composés — Placement financier

Un artisan place 15 000 € sur un livret à intérêts composés au taux annuel de 2,8 %.

- 1) Exprimer le capital C_n après n années.
- 2) Calculer le capital après 6 ans.
- 3) Au bout de combien d'années le capital dépassera-t-il 20 000 € ? (On pourra utiliser la calculatrice ou le logarithme.)
- 4) Calculer la somme des capitaux de l'année 0 à l'année 5 : $C_0 + C_1 + \dots + C_5$.

Mes calculs :

Exercice 6**Sens de variation et limites**

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{2n^2 - 3}{n^2 + n}$.

- 1) Calculer u_1, u_2, u_5 et u_{10} .
- 2) Étudier le sens de variation de (u_n) en calculant le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 4) La suite est-elle majorée ? Minorée ? Bornée ?

Mes calculs :

Exercice 7**Évolution de la production d'un atelier**

Un atelier de menuiserie produit 240 panneaux la première semaine. Chaque semaine, la production augmente de 15 panneaux grâce à l'optimisation du processus.

- 1) Modéliser la production de la semaine n ($n \geq 1$) par une suite (P_n) . Quelle est sa nature ?
- 2) Quelle sera la production lors de la 12e semaine ?
- 3) Calculer la production totale sur les 12 premières semaines.
- 4) À partir de quelle semaine la production dépassera-t-elle 400 panneaux ?

Mes calculs :

Exercice 8 Amortissement d'un emprunt par annuités constantes

Une entreprise de travaux publics emprunte 200 000 € pour l'achat d'une grue. Le taux annuel est de 4,2 % et l'emprunt est remboursé en 8 annuités constantes.

- 1) Calculer le montant de l'annuité constante a .
- 2) Construire le tableau d'amortissement pour les trois premières années.
- 3) Calculer le coût total du crédit (total des intérêts versés).
- 4) Si l'entreprise souhaite que l'annuité ne dépasse pas 30 000 €, quelle durée minimale doit-elle choisir ?

Mes calculs :

Exercice 9**Suite définie par récurrence — Convergence**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .

2) On admet que (u_n) converge vers une limite ℓ . Déterminer ℓ en résolvant $\ell = 0,7\ell + 6$.

3) On pose $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

5) Retrouver la limite de (u_n) à partir de l'expression explicite.

Mes calculs :

Exercice 10**Refroidissement d'un bâtiment en panne de chauffage**

La chaudière d'un immeuble de bureaux tombe en panne. La température intérieure, initialement à $21\text{ }^{\circ}\text{C}$, diminue selon le modèle :

$$T_n = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}}) \times q^n$$

où $T_{\text{ext}} = 2\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $q = 0,88$ (n en heures).

- 1) Exprimer T_n numériquement.
- 2) Compléter le tableau pour $n = 0, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20$.
- 3) Déterminer la limite de T_n quand $n \rightarrow +\infty$. Interpréter.
- 4) Au bout de combien d'heures la température passera-t-elle sous $14\text{ }^{\circ}\text{C}$? (Utiliser la calculatrice ou le logarithme.)
- 5) Le technicien doit intervenir avant que la température ne descende sous $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ pour éviter le gel des canalisations. De combien de temps dispose-t-il ?

Mes calculs :

Exercice 11**Limites — Formes indéterminées**

Lever l'indétermination et calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{5n^3 + 3n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$

Mes calculs :

Exercice 12 Modélisation — Concentration d'un polluant

Un bassin de rétention d'eaux pluviales contient initialement 500 mg/L de polluant. Chaque jour, un système de filtration élimine 15 % du polluant, mais les eaux de ruissellement apportent 20 mg/L de polluant supplémentaire.

On note P_n la concentration (en mg/L) au jour n .

- 1) Justifier que $P_{n+1} = 0,85 P_n + 20$.
- 2) Calculer les concentrations P_0 à P_5 .
- 3) Déterminer la limite ℓ de (P_n) en admettant sa convergence.
- 4) Poser $v_n = P_n - \ell$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de P_n .
- 5) Au bout de combien de jours la concentration sera-t-elle inférieure à 150 mg/L ?
- 6) La norme autorise une concentration maximale de 140 mg/L pour le rejet dans le milieu naturel. Le système de filtration est-il suffisant à long terme ?

Mes calculs :

Exercice 13**Comparaison de deux offres d'emprunt**

Un entrepreneur du bâtiment hésite entre deux offres pour financer l'achat d'un chariot élévateur à 40 000 € :

- **Offre A** : taux annuel 3 %, remboursement en 5 annuités constantes.
- **Offre B** : taux annuel 2,5 %, remboursement en 7 annuités constantes.

- 1) Calculer le montant de l'annuité pour chaque offre.
- 2) Calculer le coût total du crédit pour chaque offre.
- 3) Quelle offre est la moins coûteuse en termes d'intérêts ? Quel autre critère pourrait influencer le choix ?

Mes calculs :

Exercice 14**Suite et théorème de convergence**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

- 1) Calculer u_1, u_2 et u_3 (valeurs approchées au centième).
- 2) Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite.
- 3) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 3$.
- 4) Montrer que la suite est croissante en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- 5) En déduire que la suite converge, puis déterminer sa limite.

Mes calculs :

Exercice 15**Problème de synthèse — Rentabilité d'un panneau solaire**

Un technicien en énergie installe des panneaux solaires sur le toit d'un entrepôt. Le coût d'installation est de 18 000 €. La première année, les panneaux permettent une économie de 2 400 € sur la facture d'électricité. Cependant, le rendement des panneaux diminue de 1,5 % par an.

On note E_n l'économie réalisée lors de la n -ième année ($n \geq 1$).

1) Justifier que (E_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

2) Exprimer E_n en fonction de n .

3) Calculer l'économie totale cumulée sur les n premières années :

$$S_n = E_1 + E_2 + \cdots + E_n.$$

4) Déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'investissement soit rentabilisé ($S_n \geq 18\,000$).

5) Calculer l'économie totale théorique sur une durée infinie. L'investissement est-il toujours rentable ?

6) Un concurrent propose des panneaux à 15 000 € avec une économie initiale de 1 900 € et une perte de rendement de 1 % par an. Quelle offre est la plus avantageuse à long terme ?

Mes calculs :

Exercice 16 Seuil d'une suite géométrique — Tableur et algorithme

Un technicien en génie climatique modélise la concentration résiduelle d'un produit de traitement dans un circuit de chauffage. Après chaque purge hebdomadaire, la concentration est multipliée par 0,88. La concentration initiale est de 500 mg/L.

On pose $C_n = 500 \times 0,88^n$ la concentration après n purges.

1) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir au dixième) :

n	0	5	10	15	20	25	30
C_n	500

2) La norme impose que la concentration soit inférieure à 50 mg/L avant le rejet. Déterminer, à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme, le nombre minimal de purges nécessaires.

3) **Tableur** : Décrire la feuille de calcul que vous utiliseriez (contenu des cellules A1, B1, A2, B2, formule à recopier).

4) **Algorithme** : Écrire un programme Python qui affiche le rang n cherché.

5) Vérifier le résultat par le calcul algébrique (logarithme).

Mes calculs :

Exercice 17**Seuil d'une suite définie par récurrence — Algorithme**

Un bassin de rétention contient initialement 400 mg/L de polluant. Chaque jour, un système de filtration élimine 12 % du polluant, mais l'apport quotidien est de 15 mg/L. On modélise la concentration par :

$$P_0 = 400 \quad \text{et} \quad P_{n+1} = 0,88 P_n + 15$$

- 1) Calculer P_1 , P_2 et P_3 (arrondir au dixième).
- 2) Déterminer la limite ℓ de cette suite (en admettant sa convergence).
- 3) Cette suite n'étant pas explicite, on ne peut pas résoudre algébriquement $P_n < 150$. Écrire un algorithme en Python qui détermine à partir de quel jour n la concentration passe sous 150 mg/L.
- 4) Adapter l'algorithme pour afficher le tableau des valeurs P_0, P_1, \dots jusqu'au rang trouvé.

Mes calculs :

MATHÉMATIQUES

01

Suites numériques

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

Exercice 1 — Modes de génération (3 pts)

Soit la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 5$.

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 . (2 pts)
- Soit la suite (v_n) définie explicitement par $v_n = \frac{n^2 - 1}{n + 2}$. Calculer v_0 et v_3 . (1 pt)

Exercice 2 — Suite arithmétique (4 pts)

Une machine de production est amortie linéairement : sa valeur résiduelle (en €) forme une suite arithmétique (u_n) telle que $u_0 = 18\,000$ et de raison $r = -1\,200$ (perte annuelle).

- Exprimer u_n en fonction de n , puis calculer u_5 . (1,5 pt)
- Au bout de combien d'années la valeur résiduelle s'annule-t-elle ? (1 pt)
- Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$ (les 11 premiers termes). (1,5 pt)

Exercice 3 — Suite géométrique (4 pts)

Un capital de 8 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. On note C_n le capital (en €) après n années : $C_0 = 8\,000$.

- Justifier que (C_n) est géométrique et préciser sa raison q . (1 pt)
- Exprimer C_n en fonction de n , puis calculer C_5 (arrondir à l'euro). (1,5 pt)
- Calculer la somme $C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ (les 5 premiers termes). Arrondir à l'euro. (1,5 pt)

Exercice 4 — Sens de variation (4 pts)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n + 1}{n + 1}$.

- Calculer u_0 , u_1 et u_2 . (1,5 pt)

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$. En déduire le sens de variation de (u_n) . (2,5 pts)

Exercice 5 — Limites (5 pts)

Déterminer les limites suivantes en justifiant.

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n - 7}{2n + 3}$ (1,5 pt)

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5}{3n + 1}$ (1,5 pt)

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5 \times 0,8^n - 2)$ (1 pt)

d. On donne la suite géométrique $u_n = 3 \times 1,5^n$. La suite converge-t-elle ? Justifier. (1 pt)
