

Correction Devoir surveillé n°0 révisions

Exercice 1. On considère les matrices suivantes. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X\}$.

1. On a $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Plusieurs méthodes courtes :

Cette matrice possède deux colonnes égales ($C_1 = C_2$ ou 2 lignes égales ou une ligne de zéro, ou colonnes liées etc..) donc elle est non inversible.

Déterminons $E_2(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0 \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

D'où $E_2(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. NB : on va voir dans le chapitre 2, qu'il ne faudra pas s'arrêter à ce résultat ...

2. On fait une réduite de Gauss, on trouve que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Par calcul direct, on trouve que $\Delta = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, cette matrice est

bien triangulaire supérieure et on remarque que $\Delta = 2I + J$.

4. (a) Par calcul direct, $J^2 = 0$, puis par récurrence immédiate que $J^k = 0$ pour tout entier naturel $k \geq 2$.

(b) A l'aide la formule du binôme de Newton, exprimons Δ^n , $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de I et J.

On a $\Delta = 2I + J$ et 2I et J commutent donc d'après la formule du binôme de Newton, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta^n = (2I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k \text{ car } J^k = 0 \text{ pour tout entier naturel } k \geq 2.$$

D'où pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\Delta^n = (2I + J)^n = \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} J = 2^n I + n 2^{n-1} J = 2^{n-1} (2I + nJ) = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus pour $n = 0$, on a $(2I + J)^0 = I$ et la formule précédente est aussi valable au rang 0. Donc pour tout entier naturel n , $\Delta^n = 2^n I + n 2^{n-1} J$.

(c) On montre par récurrence, grâce à la question 3, que pour tout entier naturel n (à vous de le faire), $A^n = P \Delta^n P^{-1}$.

Puis d'après la question précédente, et par propriétés matricielles : $A^n = P(2^n I + n 2^{n-1} J) P^{-1} = 2^n I + n 2^{n-1} P J P^{-1}$.

Or, comme $\Delta = 2I + J$ alors $J = \Delta - 2I$ d'où $P J P^{-1} = P(\Delta - 2I) P^{-1} = A - 2I$.

Finalement pour tout entier naturel n :

$$A^n = 2^n I + n 2^{n-1} (A - 2I) = 2^{n-1} ((2 - 2n)I + nA) = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. D'après eml 2021 Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. (a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}([N = n]) = \frac{1}{n(n-1)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note : B_k : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »

R_k : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

L'événement $[N = n]$ est réalisé si et seulement si lorsque l'expérience s'arrête, l'urne contient n boules, c'est-à-dire $n - 1$ boules bleues et 1 boules rouges. Autrement dit, $[N = n]$ est réalisé si et seulement si, lorsque l'expérience s'arrête on a ajouté $n - 1 - 1 = n - 2$ boules bleues dans l'urne, c'est-à-dire si et seulement si on a pioché $n - 2$ boules bleues puis la boule rouge. Ainsi :

$$[N = n] = B_1 \cap \dots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$$

On en déduit par la formule des probabilités composées avec $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}) \neq 0$:

$$\mathbb{P}([N = n]) = \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1})$$

$$= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-3}}(B_{n-2}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}}(R_{n-1})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n}$$

Car : $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) = \frac{1}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée..

Plus précisément, si l'événement $B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}$ est réalisé, c'est que les $n - 2$ premiers tirages ont donné une boule bleue.

Dans ce cas, l'événement R_{n-1} est réalisé si et seulement si lors du $(n - 1)^{\text{ème}}$ tirage la boule rouge est tirée dans l'urne contenant n boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:

$$\mathbb{P}([N = n]) = \frac{1}{(n-1)n}.$$

- (b) La v.a.r. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 2} n \mathbb{P}([N = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

Soit $N \geq 2$. $\sum_{n=2}^N n \mathbb{P}([N = n]) = \sum_{n=2}^N n \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$ par décalage d'indice.

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 < 2$). Elle est donc divergente.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} n \mathbb{P}([N = n])$ est divergente.

On en déduit que la v.a.r. N n'admet pas d'espérance.

2. Fonction **Python** complétée qui renvoie une simulation de la variable aléatoire N .

```
import random as rd
def simuleN():%
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.random() < b/(b+1) : #proportion de bleues dans l'urne
        b = b+1 #mise à jour du nombre de boules bleues
    N = b+1 #nombre total de boules bleues à la fin de l'expérience
    return N
```

Exercice 3. Déterminons les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $(E_1) : y' - 3y = e^{-3x} + 6$.

On commence par résoudre son équation homogène associée $(H_1) y' - 3y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est

donc : $\{x \mapsto \lambda e^{3x} | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• On cherche ensuite une solution particulière de (E_1) .

Comme le second membre de (E_1) est une somme, on cherche :

- une solution particulière h_1 de $(E'_1) y' - 3y = e^{-3x}$,

- une solution particulière g_1 de $(E''_1) y' - 3y = 6$.

Par principe de superposition, la fonction $f_1 = h_1 + g_1$ sera une solution particulière de (E_1) .

• Cherchons une solution particulière de (E'_1) .

Comme le second membre de (E'_1) est $x \mapsto e^{-3x}$, on cherche une fonction de la forme $x \mapsto \lambda e^{-3x}$ solution de (E'_1) .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h_1 : x \mapsto \lambda e^{-3x}$. La fonction h_1 est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

h_1 est solution de $(E'_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -3\lambda e^{-3x} - 3\lambda e^{-3x} = e^{-3x} \Leftrightarrow -6\lambda e^{-3x} = e^{-3x} \Leftrightarrow (1 + 6\lambda)e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow (1 + 6\lambda) = 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-3x} \neq 0$) $\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$.

Ainsi, la fonction $h_1 : x \mapsto -\frac{1}{6}e^{-3x}$ est une solution particulière de (E'_1) .

• Cherchons une solution particulière de (E''_1) . g_1 est solution de $(E''_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'_1(x) - 3g_1(x) = 6 \Leftrightarrow -3c = 6 \Leftrightarrow c = -2$.

Ainsi, la fonction $g_1 : x \mapsto -2$ est une solution particulière de (E''_1) .

On en déduit alors l'ensemble des solutions de $(E_1) : \{x \mapsto \lambda e^{3x} - \frac{1}{6}e^{-3x} - 2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. Résolvons $(E_2) : 2y'' - 3y' + y = xe^x$.

• On commence par résoudre son équation homogène associée $(E'_2) : 2y'' - 3y' + y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On détermine donc les racines de son polynôme caractéristique : $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)(x - 1/2)$.

Les racines de son polynôme caractéristique sont donc :

$x_1 = 1$ et $x_2 = 1/2$. Comme $x_1 \neq x_2$, l'ensemble des solutions de (E'_2) est :

$\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{1/2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

• On cherche ensuite une solution particulière de (E_2) .

Comme le second membre de (E_2) est $x \mapsto xe^{1 \times x}$ et que $x_1 = 1$ et $x_2 \neq 1$, on cherche une solution de (E_2) sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $g : x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$ une solution particulière.

La fonction g est bien de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx) \times e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x$$

$$g''(x) = (2ax + (2a + b))e^x + (ax^2 + (2a + b)x + b) \times e^x = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x.$$

Ainsi :

$$2g''(x) - 3g'(x) + g(x) = (2ax + (4a + b))e^x.$$

On obtient :

g est solution de $(E_2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2g''(x) - 3g'(x) + g(x) = xe^x \Leftrightarrow (2ax + (4a + b))e^x = xe^x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax + (4a + b) = x$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-3x} \neq 0$) $\Leftrightarrow 2a = 1, 4a + b = 0 \Leftrightarrow a = 1/2, b = -2$.

Ainsi, la fonction $g : x \mapsto (1/2x^2 - 2x)e^x$ est une solution particulière de (E_2) .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{1/2x} + (1/2x^2 - 2x)e^x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

PROBLEME. D'après EML 1996 et Ecricone 2005

Ce problème est constitué de deux parties totalement indépendantes.

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

1. (a) Montrons que f est paire sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout réel x : si $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = f(x)$$

Donc f est paire.

- (b) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas (car $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} + 1 > 0$).

De plus, on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^{2x} + 1) - e^x e^{2x} 2}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)^2} (1 - e^{2x}) \end{aligned}$$

$f'(x)$ est du signe de $(1 - e^{2x})$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)} > 0$ d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^{2x}$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{2}$	$\searrow 0$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

NB : Pour la limite en $-\infty$: $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \rightarrow 0$ (pas de forme indéterminée) et en $+\infty$ on a par symétrie $f(x) \rightarrow 0$.

- (c) Montrons qu'il existe un unique réel $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\ell) = \ell$.

On étudie les variations de la différence : $g(x) = f(x) - x$, car $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par différence de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} - 1$$

NB : on ne sait pas factoriser simplement...

Mais sur $\mathbb{R}^-$, on a $f(x) > 0$ (d'après la question précédente) donc $f(x) > x$ et $f(x) = x$ n'y a pas de solution.

Sur $\mathbb{R}^+$: $f'(x) \leq 0$ donc $g'(x) < 0$ par somme de nombres négatifs.

On a donc g qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0) \right] =]-\infty, 1/2]$.

Comme $0 \in]-\infty, 1/2]$ alors l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution ℓ sur $\mathbb{R}^+$. Donc

il existe un unique réel $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\ell) = \ell$.

- (d) Justifions que : $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$. (Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$ au centième près).

On a $g(1/2) = f(1/2) - 1/2$.

Or, $f(1/2) = e^{1/2}/(e + 1) \simeq 1,65/3,72$ et $2 \times 1,65 \simeq 3,3 < 3,72$ donc

$g(1/2) = f(1/2) - 1/2 < 0$.

Par conséquent, $g(0) = 1/2 \geq g(\ell) \geq g(1/2)$ et comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'ils en sont éléments, $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

Donc l'équation $f(\ell) = \ell$ a une unique solution ℓ et $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

- (e) Montrons que pour tout réel $x \geq 0$: $|f'(x)| \leq f(x)$.

Pour $x \geq 0$ on a $|f'(x)| = -f'(x)$ et

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= -\frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{-e^x + e^{3x} - e^x(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{(e^{2x} + 1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Et comme f est maximale en 0, (car sa dérivée s'annule en 0 en changeant de signes) on a bien

pour tout réel $x \geq 0$: $|f'(x)| \leq f(x) \leq f(0) = \frac{1}{2}$.

NB : Pour $x \leq 0$ on a $|f'(x)| = f'(x)$ et

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{e^x - e^{3x} - e^x(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{-2e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

(f) Vérifions que $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$.

D'après les variations de f , et f continue on a $f([0, \frac{1}{2}]) = [f(1/2), 1/2]$, or $f(1/2) < 1/2$ d'après 1d) et $f(1/2) \geq 0$.

Ainsi, $f([0, \frac{1}{2}]) = [f(1/2), 1/2] \subset [0, \frac{1}{2}]$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.

— Initialisation : pour $n = 0$ on a $u_0 = 0 \in [0, \frac{1}{2}]$. Donc l'initialisation est vérifiée.

— Hérédité : soit n un entier naturel fixé tel que $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ alors d'après la question 1f), $f(u_n) \in [0, 1/2]$ donc $u_{n+1} \in [0, \frac{1}{2}]$. L'hérédité est vérifiée.

— Conclusion : pour tout entier $n : u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.

(b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \quad \text{puis} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

On a :

- f continue et dérivable sur $[0, 1/2]$

- $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur $[0, \frac{1}{2}]$

- u_n et $\ell \in [0, \frac{1}{2}]$

alors d'après l'inégalité des accroissements finis appliqués à f, u_n, ℓ sur $[0, 1/2]$:

$$|f(u_n) - f(\ell)| = |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$$

On montre alors par récurrence que : pour tout entier n : $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

— Initialisation : pour $n = 0$ $|u_0 - \ell| = \ell \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{0+1}}$ Donc l'initialisation est vérifiée.

— Hérédité : soit n un entier naturel fixé, tel que $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ alors $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$, l'hérédité est vérifiée.

— Conclusion : pour tout entier n : $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

(c) Comme $|\frac{1}{2}| < 1$ on a $(\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Puis par théorème d'encadrement ($0 \leq |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$), $|u_n - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc la suite (u_n) converge vers ℓ .

(d) Informatique :

i. Fonction **Python** f qui prend en entrée un réel x et qui calcule $f(x)$.

```
import numpy as np
def f(x):
    y=np.exp(x)/(1+np.exp(2*x))
    return y
```

- ii. En utilisant la fonction f précédente, fonction **SuiteU** qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n .

```
def suiteU(n) :
    u=0
    for i in range(1,n+1) :
        u=f(u)
    return u
```

- iii. En utilisant la fonction **SuiteU** précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près?

u_n donnera une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près si $|u_n - \ell| \leq 10^{-6}$ ce qui sera réalisé si $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-6}$.

On résout : $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 10^6 \Leftrightarrow (n+1) \ln 2 \geq 6 \ln 10 \Leftrightarrow n \geq \frac{6 \ln 10}{\ln 2} - 1$.
 n étant un entier, on doit prendre la partie réelle du nombre.

```
N = int(np.ceil(6* np.log(10) / np.log(2) - 1))
u = SuiteU(N)
```

Partie B :

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

1. Calculons I_0, I_1 .

φ_0 et φ_1 sont des fonctions continues sur $[0, 1]$ donc les intégrales sont bien définies.

$$\text{On a } I_0 = \int_0^1 \varphi_0(x) dx = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 = \boxed{-\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2}}.$$

$$\text{Puis } I_1 = \int_0^1 \varphi_1(x) dx = \int_0^1 (1-x) e^{-2x} dx,$$

on intègre par parties avec $u(x) = (1-x) : u'(x) = -1 : v'(x) = e^{-2x} : v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} (1-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2} - \frac{1}{4} \\ &= \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2}} \end{aligned}$$

2. Déterminons le signe de I_n pour tout entier naturel n . Tout d'abord φ_n est continue sur $[0, 1]$ en tant que produit et composée de fonctions continues sur $[0, 1]$. Donc I_n est bien définie pour tout entier naturel n . Pour déterminer le signe de I_n , on cherche celui de son contenu :

Pour tout $x \in [0, 1] : (1-x)^n e^{-2x} \geq 0$ donc comme les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$),

on a par positivité de l'intégrale : $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx \geq 0$ pour tout entier naturel n .

3. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \varphi_{n+1}(x) dx - \int_0^1 \varphi_n(x) dx = \boxed{\int_0^1 [\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)] dx}$ (par linéarité de l'intégrale).

- (b) Puis pour comparer I_n et I_{n+1} on compare d'abord leurs contenus :

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) &= (1-x)^{n+1} e^{-2x} - (1-x)^n e^{-2x} = (1-x)^n (1-x-1) e^{-2x} \\ &= -x(1-x)^n e^{-2x} \leq 0 \text{ sur } [0, 1] \end{aligned}$$

Donc $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ sur $[0, 1]$.

Comme les bornes sont croissantes ($0 \leq 1$) alors par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \varphi_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 \varphi_n(x) dx \text{ et par conséquent : } \boxed{\text{la suite } I_n \text{ est décroissante.}}$$

- (c) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

La suite I_n étant décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{I_n \text{ est convergente vers une limite } \ell \geq 0.}$$

- (d) A l'aide d'une intégration par parties, montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

On a $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$ on pose $u(x) = (1-x)^{n+1} : u'(x) = -(n+1)(1-x)^n : v'(x) = e^{-2x} : v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n+1}{2} (1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} [1 - (n+1)I_n] \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n}$$

- (e) D'après la question 3c), I_n converge vers $\ell \geq 0$.

Supposons que $\ell \neq 0$.

Alors, comme $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$ on a en faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité :

$$2\ell = 1 - \ell \times \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1), \text{ or } -\ell \times \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = -\infty$$

On aboutit donc à une absurdité, ($\ell \neq -\infty$) d'où $\ell = 0$.

Conclusion : $\boxed{I_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.}$