

Déterminants

Feuille d'exercices #02

★ **Exercice 1** — Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

★ **Exercice 2** — Calculer de même les déterminants suivants.

$$A_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad B_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad C_n = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \quad E_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix} \quad F_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$G_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad H_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & \lambda_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad I_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

★ **Exercice 3** — Déterminant de Vandermonde et applications

- Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. On appelle déterminant de Vandermonde le nombre complexe défini par :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Prouver que $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

- On considère $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}^n$ distincts. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\alpha_i x})_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
- Démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ prenant des valeurs données en n points donnés distincts.

★ **Exercice 4** —

- Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Calculer $\det(A)$.
- Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.
- Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Montrer que $2^{n-1} \mid \det(C)$.
- Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que D est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(D) = \pm 1$.

★★ **Exercice 5** — Polynômes de Tchebychev

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
 - En déduire que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
 - Montrer que T_n vérifie l'équation $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta_0, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos(\theta_0) & \cos(\theta_1) & \cdots & \cos(\theta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(n\theta_0) & \cos(n\theta_1) & \cdots & \cos(n\theta_n) \end{vmatrix}$$

★★ **Exercice 6** — Soient n un entier pair et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,j} = \pm 1$ si $i \neq j$ et $m_{i,i} = 0$, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que M est inversible.

★★ **Exercice 7** — Donner le déterminant des applications définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$M \mapsto M^\top \quad \text{et} \quad M \mapsto AM \quad (A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$$

★★ **Exercice 8** — Déterminer le coefficient constant et le coefficient du terme de degré n du polynôme défini par $P(t) = \det(A + tB)$, où $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★★ **Exercice 9** — Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \det(A + xJ) = \det(A)$$

★★ **Exercice 10** — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = r$. Montrer que $x \mapsto \det(xA + B)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à r .

★★ **Exercice 11** — Soient $u, n \in \mathcal{L}(E)$ telles que u et n commutent et n nilpotent, avec $\dim(E) < +\infty$. Montrer que $\det(u + n) = \det(u)$.

On pourra considérer les représentations matricielles des restrictions de u et n à $\text{Im}(n)$ et raisonner par récurrence; les 5/2 proposeront deux autres preuves.

★★ **Exercice 12** — Soit $n \geq 2$. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

On pourra montrer que $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$ puis travailler avec une matrice équivalente.

★★ **Exercice 13** — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A + X) = \det(B + X)$$

Montrer que $A = B$.

★★ **Exercice 14** — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{rg}(B) = 1$. Montrer que $\det(A + B)\det(A - B) \leq \det(A)^2$.

★★ **Exercice 15** — Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exprimer le déterminant de la matrice $XX^\top + I_n$ en fonction du scalaire $X^\top X$.

★ **Exercice 16** — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B)\det(A - B) \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \det(A + iB)\det(A - iB)$$

★ **Exercice 17** — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$. Trouver un contre-exemple lorsque $AB \neq BA$.

★★ **Exercice 18** — Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$.

$$1. \text{ Montrer que } \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC).$$

2. Montrer que ce résultat subsiste lorsque D n'est pas inversible.

★★★ **Exercice 19** — *Fonctions multiplicatives*

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application φ étant supposée non constante.

- Donner deux exemples et calculer dans le cas général $\varphi(O)$ et $\varphi(I_n)$.
- Déterminer $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \varphi(A) = 0\}$.

★ **Exercice 20** — *Identité de Bézout matricielle*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$.

Déterminer deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

★★★ **Exercice 21** — Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Calculer $\text{Com}(\text{Com}A)$ lorsque A est inversible.
- Montrer que si $\text{rg} A \leq n - 2$, alors $\text{Com}A = 0$.
- Montrer que si $\text{rg} A = n - 1$, alors $\text{rg}(\text{Com}A) = 1$.
- Dans le cas général, montrer que $\text{Com}(\text{Com}A) = (\det A)^{n-2}A$.

★★★ **Exercice 22** — *Déterminant de Smith*

On considère $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $t_{i,j} = 1$ si i divise j , $t_{i,j} = 0$ sinon, ainsi que $D = \text{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$ où φ représente l'indicatrice d'Euler.

- Expliciter la matrice $T^\top D T$. On rappelle l'égalité $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.
- En déduire le déterminant de la matrice $M = (m_{i,j})$ définie par $m_{i,j} = i \wedge j$.

★ **Exercice 23** — $\mathbb{R}$ -similitude et $\mathbb{C}$ -similitude

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = P^{-1}AP$.

On note P_1 la partie réelle de P et P_2 sa partie imaginaire.

1. Établir les égalités $P_1B = AP_1$ et $P_2B = AP_2$.
2. Montrer que $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ n'est pas nulle sur $\mathbb{R}$. Qu'en conclure?

★★ **Exercice 24** — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients sont positifs et vérifient $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer par récurrence que $|\det(A)| \leq 1$.

★★★ **Exercice 25** — Groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour le produit matriciel puis qu'il est engendré par les matrices $I_n + \lambda E_{i,j}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M a un inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(M) = \pm 1$.
3. Prouver que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices $I_n + E_{i,j}$, où $i \neq j$.

★★ **Exercice 26** — Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_i(X) = (X + a_i)^n$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

★★★ **Exercice 27** — Résultant

Pour deux polynômes $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$ et $S = \sum_{i=0}^q b_i X^i$ ($a_p, b_q \neq 0$), à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos, on appelle résultant de P et Q le déterminant :

$$\mathrm{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & \vdots & b_q & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}$$

$\xleftarrow{\quad q \quad} \quad \quad \quad \xleftarrow{\quad p \quad}$

1. En considérant l'application définie pour tous $(U, V) \in \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X]$ par $\varphi(U, V) = UP + VQ$, montrer que $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$ ssi $P \wedge Q = 1$.
2. Établir une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ pour que le polynôme $P = X^4 + aX + b$ admette une racine multiple.