

Mathématiques – Centrale/Mines – DS₃

*Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).
Numérotez chaque page de votre devoir.
La calculatrice est interdite.*

Problème : Polynômes de Hermite (Centrale PSI 2024)

Notations

- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- Tout au long du sujet, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sera identifié à sa fonction polynomiale.
- Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue est dite intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converge.
- Pour une famille de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on appelle $\text{Vect}(P_n, n \in \mathbb{N})$ l'espace vectoriel engendré par cette famille, c'est-à-dire :

$$\text{Vect}(P_n, n \in \mathbb{N}) = \left\{ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}, g = \sum_{k=0}^N a_k P_k \right\}$$

Le sujet illustre des applications du calcul de l'intégrale de Gauss dans différents domaines.

La partie I est consacrée au calcul de cette intégrale.

La partie II est consacrée à la résolution d'une équation différentielle du second ordre. Elle utilise le résultat final de la partie I. Elle est totalement indépendante des deux parties suivantes.

La partie III est consacrée à l'étude d'un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}[X]$ et d'une suite de polynômes orthogonaux associés à cet endomorphisme. Elle est indépendante de la partie II.

La partie IV est consacrée à montrer des propriétés sur la famille de polynômes construite à la partie III. Le but est d'établir que c'est une famille totale d'un espace préhilbertien. Ce résultat est en fait un résultat général dans la théorie des espaces de Hilbert.

Partie I : Intégrale de Wallis et Intégrale de Gauss

I. A - Intégrale de Wallis

On définit $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

Q1. Étudier la monotonie de la suite (W_n) .

Q2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Q3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

Q4. En déduire que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I. B - Intégrale de Gauss

On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Q5. Justifier l'existence de I .

Q6. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = I$.

Q7. En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin u$, après avoir justifié qu'il est licite, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

Q8. En déduire la valeur de I puis de J .

Partie II : Autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (\text{II.1})$$

On définit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt.$$

Q9. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q10. Montrer que G est solution de (II.1) sur $\mathbb{R}$.

On admet que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}.$$

Q11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\pi (\sin(t))^{2n} dt \right) x^{2n}.$$

Partie III : Étude d'un endomorphisme sur un espace préhilbertien

III. A - Les polynômes d'Hermite.

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x),$$

où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de w .

En particulier : $H_0(x) = 1$.

Q12. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.

Q13. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

Q14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n dont vous déterminerez la parité.

Q15. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de H_n .

III.B - Un produit scalaire.

On note E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) e^{-x^2} dx$ converge.

Q16. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Q17. Montrer que si $(f, g) \in E^2$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$ converge absolument.

Q18. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel contenant $\mathbb{R}[X]$.

Q19. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui à tout $(f, g) \in E^2$ associe $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

On notera $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

III. C - Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

Q20. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \langle P, H_n \rangle$$

Q21. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $\langle P, H_n \rangle = 0$.

Q22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer : $\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle$.

Q24. En déduire la valeur de $\|H_n\|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III. D - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

On note u, v, w les applications définies de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par :

$$u(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad v(P) = 2XP - P', \quad w(P) = P'$$

Q25. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}_n[X]$ est stable par u .

Par la suite, on notera u_n l'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On admet que v et w sont aussi des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$, et on note Id l'application identique de $\mathbb{R}[X]$.

Q26. Établir : $v \circ w = u - \text{Id}$ et $w \circ v = u + \text{Id}$.

Q27. En déduire : $u \circ v - v \circ u = 2v$.

Q28. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si $u(P) = \lambda P$, alors $u(v(P)) = (\lambda + 2)v(P)$.

Q29. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, H_k$ est un vecteur propre de u et déterminer la valeur propre associée.

Q30. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q31. Établir, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$:

$$\langle P', Q' \rangle = \langle u(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q32. Montrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, $\langle u_n(P), Q \rangle = \langle P, u_n(Q) \rangle$.

Q33. Pour les 5/2. Justifier, d'une deuxième manière, que u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u_n .

Q34. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n .

Partie IV : Une famille totale

Dans cette partie, nous conservons les notations de la partie III. L'espace E muni de son produit scalaire et la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ précédemment construite.

Nous allons montrer que

$$(\text{Vect}(H_n, n \in \mathbb{N}))^\perp = \{0\}.$$

On dit dans ce cas là que la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans l'espace préhilbertien E ou encore que c'est une base hilbertienne de E .

Q35. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Pour $f \in E$, montrer que $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit ainsi

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} e^{-t^2} dt$$

$\mathcal{F}$ est une application linéaire sur E , appelée la transformation de Fourier de f sur l'espace préhilbertien E . Nous admettrons pour la suite que $\mathcal{F}$ est injective sur E .

Q36. Montrer que, pour tout entier naturel p , la fonction $x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note $M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \exp(-x^2) dx$. Déterminer la valeur de M_p .

Q37. Soit $f \in E$. Justifier que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} dx$$

Q38. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

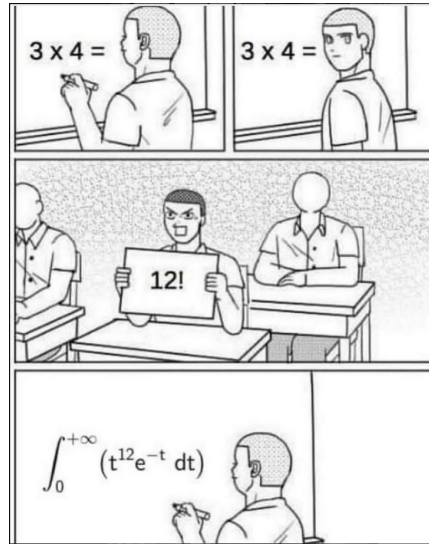
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} x^n dx \right) \xi^n.$$

Dans la suite de la partie, on suppose que $f \in (\text{Vect}(H_n, n \in \mathbb{N}))^\perp$. Le but est de montrer que f est la fonction nulle.

Q39. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-x^2} dx = 0$.

Q40. En déduire que $\mathcal{F}(f)$ est la fonction nulle.

Q41. Conclure.



– Fin du sujet –