

I	Rappels de Sup	4
I.1	Théorème fondamental de l'analyse et conséquences	4
I.2	Calculs de primitives et intégrales	5
I.3	Sommes de Riemann	9
I.4	Étudier une fonction ou une suite définie par une intégrale	10
II	Intégration des fonctions continues par morceaux	14
II.1	Fonctions continues par morceaux	14
II.2	Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux	16
II.3	Changement de variables	20
III	Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$	21
III.1	Définition	21
III.2	Intégrales de référence	23
III.3	Propriétés de l'intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$	24
IV	Intégrale sur un intervalle quelconque	29
IV.1	Définition	29
IV.2	Intégrales de référence	31
IV.3	Propriétés des intégrales généralisées	33
IV.4	Cas des fonctions à valeurs positives	35
IV.5	Cas des fonctions à valeurs complexes	36
V	Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	37
V.1	Définitions	37
V.2	Théorèmes de comparaison	41
	Cas où $I = [a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$	41
	Cas où $I =]-\infty, b]$, avec $b \in \mathbb{R}$	45
	Cas où $I = [a, b[$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$	46
	Cas où $I =]a, b]$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$	48
	Cas où $I =]a, b[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$	50
VI	Changement de variable et intégration par parties	52
VI.1	Changement de variable	52
VI.2	Intégration par parties	54
VII	Annexes	56
VII.1	Testons l'IA sur ce chapitre	56
VII.2	À la fin de ce chapitre,...	57

Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :

- étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;
- définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;
- compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme ;
- étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
----------	--------------------------

a) Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
--	--

b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite convergente si $\int_a^x f(t) dt$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée. Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
--	---

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles. Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$ Changement de variable : si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, et si f est continue sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u) du$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.	Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b , en a . La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité. La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.
---	--

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

CONTENUS

La convergence absolue implique la convergence.

Inégalité triangulaire.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f est continue, intégrable et positive sur I , et si $\int_I f(t) dt = 0$, alors f est identiquement nulle.

Théorème de comparaison :

pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f .
- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g .

Fonctions de référence :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

- intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;
- étude de l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Notations $\int_I f$, $\int_I f(t) dt$.

Pour $I = [a, b[$, (respectivement $]a, b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$.

L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée.

Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.

Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+ .

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Rappels de Sup

I.1. Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Théorème 2.1 – Théorème fondamental de l'analyse

Si f est une fonction continue un intervalle I et si a est un point de I , alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Démonstration

On note $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

► Montrons que F est bien définie.

Soit $x \in I$. La fonction f est continue sur I donc en particulier sur le segment d'extrémités a et x . Ainsi $F(x)$ existe.

► Montrons que F est une primitive de f .

Soit $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par la relation de Chasles, on a :

$$F(x_0 + h) - F(x_0) - h \times f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - h \times f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt.$$

D'où,

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - h \times f(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right|.$$

La fonction f est continue sur I , donc en x_0 . D'où, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I$, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Dans la suite, on suppose de plus que $h \in [-\eta, \eta]$ et $x_0 + h \in I$.

- Cas 1 : $h \geq 0$. Pour tout $t \in [x_0, x_0 + h]$, on a $|t - x_0| \leq |h| \leq \eta$. D'où, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \underset{\text{car } h \geq 0}{=} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \leq h \times \varepsilon \leq |h| \times \varepsilon.$$

- Cas 2 : $h < 0$. Pour tout $t \in [x_0 + h, x_0]$, on a $|t - x_0| \leq |h| \leq \eta$. D'où, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Dans ce cas, par croissance de l'intégrale,

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \underset{\text{car } h < 0}{=} \int_{x_0+h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon dt \leq -h \times \varepsilon \leq |h| \times \varepsilon.$$

Ainsi,

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - h \times f(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq |h| \times \varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, par définition, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Donc, F est une primitive de f .

► F s'annule en a .

Par définition de F , on a : $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$. Donc, F s'annule en a .

► Unicité.

Soit G une autre primitive de f qui s'annule en a . On sait que F et G diffèrent d'une constante. Or, $G(a) = F(a) = 0$. Donc, $F = G$. $\square$

Remarque 2.1

On rappelle que si f est une fonction continue sur I , alors les primitives de f diffèrent d'une constante : si F et G sont des primitives de f , alors il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $F = G + C$.

Corollaire 2.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I .
- Soit f une fonction continue sur I . On considère F une primitive de f sur I . On a :

$$\forall (a, b) \in I \times I, \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \stackrel{\text{Notation}}{=} [F(t)]_a^b.$$

- Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . On a :

$$\forall (a, b) \in I \times I, \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Démonstration

- Conséquence du théorème fondamental de l'analyse.
- Soit $(a, b) \in I \times I$. Considérons G l'unique primitive sur I de f qui s'annule en a . Alors, F est G différent d'une constante. Donc

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) = G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

- Conséquence du point précédent (une primitive de f' est f).

□

I.2. Calculs de primitives et intégrales



Exercice 2.1

Déterminer une primitive de $x \mapsto x \times e^{3x}$.

Résolution

On procède par intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} \boxed{u(t) = t} & u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{1}{3} \times e^{3t} & \boxed{v'(t) = e^{3t}} \end{array}$$

On a :

$$\int^x t \times e^{3t} dt = \frac{x}{3} \times e^{3x} - \int^x \frac{1}{3} \times e^{3x} dt = \frac{x}{3} \times e^{3x} - \frac{1}{9} \times e^{3x}.$$



Exercice 2.2

Déterminer une primitive de Arcsin.

Résolution

On procède par intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} \boxed{u(t) = \text{Arcsin}(t)} & u'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ v(t) = t & \boxed{v'(t) = 1} \end{array}$$

On a :

$$\int^x \text{Arcsin}(t) dt = x \times \text{Arcsin}(x) - \int^x t \times \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \times \text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}.$$

🦋 Exercice 2.3

Calculer $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} dt$ avec le changement de variable $t = \sin(x)$.

Résolution

On a $\begin{array}{c|cc} t & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \hline x & -\frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{6} \end{array}$ et $dt = \cos(x) dx$.

Donc, par la formule de changement de variable :

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-(\sin(x))^2} \times \cos(x) dx.$$

De plus, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$, on a : $\cos(x) \geq 0$ et $\sqrt{1-(\sin(x))^2} = \sqrt{(\cos(x))^2} = |\cos(x)| = \cos(x)$.

D'où,

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos(x))^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x)+1}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2x)}{2} + x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}+2}{8}.$$

🦋 Exercice 2.4

Calculer $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx$ avec le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Résolution

On a $\begin{array}{c|cc} x & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{array}$ et $dt = \frac{1}{2} \times \left(1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right) dx$.

De plus, on a

$$\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \times \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}.$$

D'où,

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{2} \times \left(1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)$$

Par la formule de changement de variable, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{2} \times \left(1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right) dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \frac{\ln(3)}{2}.$$

🦋 Exercice 2.5

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^{2x} \times \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Résolution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \underbrace{e^{2x}}_{\in \mathbb{R}} \times \operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^{(2+i)x})$

Une primitive de $x \mapsto e^{(2+i)x}$ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{2+i} \times e^{(2+i)x} = \frac{2-i}{5} \times e^{2x} \times (\cos(x) + i \sin(x))$.

Donc, une primitive de f est $F : x \mapsto \frac{e^{2x}}{5} \times (2 \cos(x) + \sin(x))$.

Exercice 2.6

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Déterminer toutes les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-a}$.

Résolution

On note $a = \alpha + i\beta$ sous forme algébrique (α et β sont donc des réels). On a :

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha - i\beta} = \frac{x - \alpha + i\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{x - \alpha}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + i \frac{\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

D'où,

$$\int^x f(t) dt = \int^x \frac{t - \alpha}{(t - \alpha)^2 + \beta^2} dt + i \int^x \frac{\beta}{(t - \alpha)^2 + \beta^2} dt.$$

On note $u(t) = (t - \alpha)^2 + \beta^2$, on a $u'(t) = 2(t - \alpha)$. D'où,

$$\int^x \frac{t - \alpha}{(t - \alpha)^2 + \beta^2} dt = \int^x \frac{1}{2} \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \frac{1}{2} \times \ln(u(x)) = \frac{1}{2} \times \ln((x - \alpha)^2 + \beta^2).$$

De plus,

$$\int^x \frac{\beta}{(t - \alpha)^2 + \beta^2} dt = \int^x \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left(\frac{t - \alpha}{\beta}\right)^2 + 1} dt = \text{Arctan}\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right).$$

Donc,

$$\int^x f(t) dt = \frac{1}{2} \times \ln((x - \alpha)^2 + \beta^2) + i \text{Arctan}\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right).$$

Ainsi,

Les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} \times \ln((x - \alpha)^2 + \beta^2) + i \text{Arctan}\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right) + C$ où $C \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.7

Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 6x + 8}$ sur un intervalle bien choisi.

Résolution

Le discriminant de $x^2 + 6x + 8 = 0$ est $\Delta = 4$.

Donc, les solutions de $x^2 + 6x + 8 = 0$ sont -4 et -2 . De plus, on a $x^2 + 6x + 8 = (x + 2) \times (x + 4)$.

La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, -4[\cup]-4, -2[\cup]-2, +\infty[$.

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \frac{1}{(x + 2) \times (x + 4)} = \frac{\alpha}{x + 2} + \frac{\beta}{x + 4}$ (*).

On multiplie (*) par $x + 2$ et on évalue en -2 . On a alors $\alpha = \frac{1}{2}$.

On multiplie (*) par $x + 4$ et on évalue en -4 . On a alors $\beta = -\frac{1}{2}$.

Donc, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x + 4}.$$

► Sur $I_1 =]-\infty, -4[$, les primitives de f sur I_1 sont $x \mapsto \frac{1}{2} \times \ln(|x + 2|) - \frac{1}{2} \times \ln(|x + 4|) + C = \ln\left(\sqrt{\left|\frac{x + 2}{x + 4}\right|}\right) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

► Sur $I_2 =]-4, -2[$ et $I_3 =]-2, +\infty[$, on trouve les mêmes primitives.

Exercice 2.8

Déterminer les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 6x + 9}$ sur un intervalle bien choisi.

Résolution

Le discriminant de $x^2 + 6x + 9 = 0$ est $\Delta = 0$.

Donc, la solution de $x^2 + 6x + 8 = 0$ est -3 . De plus, on a $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.
La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$.

- Sur $I_1 =]-\infty, -3[$. Les primitives de f sur I_1 sont $x \mapsto -\frac{1}{x+3} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
- Sur $I_2 =]-3, +\infty[$, on trouve les mêmes primitives.



Exercice 2.9

Déterminer les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 6x + 11}$ sur un intervalle bien choisi.

Résolution

On a $x^2 + 6x + 11 = (x + 3)^2 + 2 > 0$.

La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 11} = \frac{1}{(x + 3)^2 + 2}$.

On factorise le dénominateur par 2 :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}.$$

On note $u(x) = \frac{x+3}{\sqrt{2}}$. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D'où,

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2} \times u'(x)}{(u(x))^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times u'(x) \times \text{Arctan}'(u(x)).$$

Ainsi, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{Arctan}(u(x)) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{Arctan}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.



Exercice 2.10

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^3 - x^2 - 6x}$ sur $]0, 3[$.

Résolution

Pour cela, décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{X^4 - X^3 + 1}{X^3 - X^2 - 6X}$.

On a $X^3 - X^2 - 6X = X \times (X^2 - X - 6) = X \times (X + 2) \times (X - 3)$ et ce polynôme est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Par théorème, il existe c_1, c_2 et c_3 des réels tels que :

$$\frac{X^4 - X^3 + 1}{X \times (X + 2) \times (X - 3)} = E + \frac{c_1}{X} + \frac{c_2}{X + 2} + \frac{c_3}{X - 3},$$

où E est le quotient dans la division euclidienne de $X^4 - X^3 + 1$ par $X^3 - X^2 - 6X$.

On a : $X^4 - X^3 + 1 = X \times (X^3 - X^2 - 6X) + 6X^2 + 1$ et $\deg(6X^2 + 1) < \deg(X^3 - X^2 - 6X)$.

Donc $E = X$ et

$$\frac{X^4 - X^3 + 1}{X \times (X + 2) \times (X - 3)} = X + \frac{c_1}{X} + \frac{c_2}{X + 2} + \frac{c_3}{X - 3}. \quad (\star)$$

On calcule c_1 .

On multiplie $(\star)$ par X , puis on évalue en 0. Il vient :

$$\frac{1}{(1 + 2) \times (1 - 3)} = c_1.$$

Donc, $c_1 = -\frac{1}{6}$.

On calcule c_2 .

On multiplie $(\star)$ par $X + 2$, puis on évalue en -2 . Il vient :

$$\frac{25}{(-2) \times (-2 - 3)} = c_2.$$

Donc, $c_2 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$.

On calcule c_3 .

On multiplie (★) par $X - 3$, puis on évalue en 3. Il vient :

$$\frac{55}{3 \times (3+2)} = c_2.$$

Donc, $c_2 = \frac{11}{3}$.

Ainsi,

$$\frac{X^4 - X^3 + 1}{X^3 - X^2 - 6X} = X - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{X} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{X+2} + \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{X-3}.$$

Donc,

$$\int^x f(t) dt = \int^x t - \frac{1}{6} \times \frac{1}{t} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t+2} + \frac{11}{3} \times \frac{1}{t-3} dt = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(|x|)}{6} - \frac{5 \ln(|x+2|)}{2} + \frac{11 \ln(|x-3|)}{3}.$$



Exercice 2.11

Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \frac{3x-1}{(x-2) \times (x^2+1)}$ sur $] -\infty, 2[$ et $] 2, +\infty[$.

Indication déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\frac{3x-1}{(x-2) \times (x^2+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b \times x + c}{x^2+1}$

Résolution

On suit l'indication donnée par l'énoncé :

$$\frac{3x-1}{(x-2) \times (x^2+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b \times x + c}{x^2+1} = \frac{(a+b) \times x^2 + (c-2b) \times x + a-2c}{(x-2) \times (x^2+1)}.$$

En identifiant les coefficients :

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ c-2b &= 3 \\ a-2c &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -b \\ c+2a &= 3 \\ a-2c &= -1 \end{cases}$$

En ajoutant 2 fois la deuxième équation à la troisième, on trouve $5a = 5$, donc, $a = 1$.

D'où, $b = -1$ et $c = 1$.

Donc,

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{-x+1}{x^2+1} = \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}.$$

Donc, les primitives de f sur $] -\infty, 2[$ sont $x \mapsto \ln(|x-2|) - \frac{1}{2} \ln(|x^2+1|) + \text{Arctan}(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

On trouve les mêmes primitives sur $] 2, +\infty[$.

I.3. Sommes de Riemann



Théorème 2.2 – Sommes de Riemann

Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$ des réels. On a :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$



Exercice 2.12

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.

Résolution

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

En notant $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on a : pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or, f est continue sur $[0, 1]$, donc par théorème (somme de Riemann),

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

De plus,

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi,

$$(u_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers } \frac{\pi}{4}.$$

I.4. Étudier une fonction ou une suite définie par une intégrale



Exercice 2.13

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t}{1+t+t^2+t^3} dt$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $f'(x)$ et en déduire une expression simple de f .

Résolution

1. Soit $x > 0$.

La fonction $g : t \mapsto \frac{t}{1+t+t^2+t^3}$ est continue sur $\left[\frac{1}{x}, x\right]$ (en effet sur cet intervalle $t > 0$ et $1+t+t^2+t^3 \neq 0$).

Donc,

$$f(x) \text{ existe.}$$

Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right).$$

De plus, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (car primitive d'une fonction continue). Donc,

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ (composée).}$$

2. Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = G'(x) + \frac{1}{x^2} \times G'\left(\frac{1}{x}\right) = g'(x) + \frac{1}{x^2} \times g'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1+x+x^2+x^3} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{x}{1+x+x^2+x^3} + \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1+x}{(1+x) \times (1+x^2)}.$$

Donc,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \text{Arctan}(x) + C$.

Or, $f(1) = \int_1^1 g(t) dt = 0$, donc, $0 = \frac{\pi}{4} + C$.

Ainsi, $C = -\frac{\pi}{4}$ et :

$$\text{pour tout } x > 0, f(x) = \text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{4}.$$



Exercice 2.14

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition I de f .
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
- Montrer que f est impaire.
- Déterminer le développement limité à l'ordre 10 en 0 de f .
- En déduire la tangente de f en 0 et la position relative du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
- Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de f en $+\infty$.

Résolution

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

On note g la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

La fonction g est continue sur $[x, 2x]$ (sur cet intervalle on a $1+t^4 > 0$).

Donc, $f(x)$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment. Ainsi,

$$f \text{ est définie sur } I = \mathbb{R}.$$

- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc possède des primitives sur cet intervalle. On note G l'une d'elles.

Comme G est une primitive de g , on a :

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t) dt = G(2x) - G(x).$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (composée).

Donc, G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Donc,

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ (composée et combinaison linéaire)}.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, (💡 Attention à bien reconnaître les composées)

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, un ensemble **symétrique par rapport à 0**.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

On applique le changement de variable $t = -u$. On a : $\begin{array}{c|c} t & -x \\ \hline u & x \end{array}$ $\begin{array}{c} -2x \\ \hline 2x \end{array}$ et $dt = -du$.

D'où,

$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^4}} \times (-1) du = - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} du = -f(x).$$

Donc,

f est impaire.

4. On commence par déterminer le développement limité de g à l'ordre 9 en 0.

$$g(t) = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

De plus, $\begin{cases} (1+u)^{-\frac{1}{2}} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2) \\ t^4 \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$, donc, $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t^4}{2} + \frac{3t^8}{8} + o(t^8)$.

Or, g est paire, donc (les coefficients des puissances impaires dans le développement limité en 0 sont nuls),

$$g(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t^4}{2} + \frac{3t^8}{8} + o(t^9).$$

En primitivant (💡 Attention à ne pas oublier $G(0)$), on a :

$$G(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} G(0) + x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{24} + o(t^{10}).$$

Or, $2x \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, donc,

$$G(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} G(0) + 2x - \frac{32x^5}{10} + \frac{512x^9}{24} + o(x^{10}).$$

Donc,

$$f(x) = G(2x) - G(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{31x^5}{10} + \frac{511x^9}{24} + o(x^{10}).$$

Remarque : on ne connaît pas la valeur de $G(0)$ mais ce n'est pas grave, il y a une simplification.

5. On a :

$$Desf(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x).$$

Donc,

L'équation de la tangente en 0 est $y = x$.

De plus,

$$f(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{31x^5}{10} + o(x^5).$$

Donc,

$$f(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{31x^5}{10} \begin{cases} > 0 & \text{si } x < 0 \\ < 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On en déduit que la courbe traverse la tangente en 0. Plus précisément, au voisinage de 0^- , la courbe de f est au dessus de la tangente, et au voisinage de 0^+ , la courbe de f est sous la tangente.

6. **Attention!** On ne peut pas utiliser ici un DL de $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ en 0, en effet, on a $\frac{1}{u} \leq t \leq \frac{2}{u}$ avec u proche de 0, donc t est « grand »!

💡 On se ramène en 0 en utilisant $u = \frac{1}{x}$ où $u \rightarrow 0^+$.

Soit $u > 0$. On a

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \int_{\frac{1}{u}}^{\frac{2}{u}} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

On applique le changement de variable $t = \frac{1}{v}$. On a : $\frac{t}{v} \mid \frac{1}{u} \quad \frac{2}{u}$ et $dt = -\frac{1}{v^2} dv$.

Donc,

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \int_u^{\frac{u}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{v}\right)^4}} \times \frac{-1}{v^2} dv = -\int_u^{\frac{u}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+v^4}} dv = \int_{\frac{u}{2}}^u \frac{1}{\sqrt{1+v^4}} dv.$$

On reconnaît $g(v)$ dans l'intégrale, donc,

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = G(u) - G\left(\frac{u}{2}\right).$$

Or,

$$G(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^5}{10} + o(u^5),$$

et, comme $\frac{u}{2} \underset{u \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$G\left(\frac{u}{2}\right) \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{u}{2} - \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^5}{10} + o(u^5) \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{u}{2} - \frac{u^5}{2^5 \times 10} + o(u^5).$$

Donc,

$$f\left(\frac{1}{u}\right) \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{u}{2} - \frac{2^5 - 1}{2^5 \times 10} \times u^5 + o(u^5) \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{u}{2} - \frac{31}{320} \times u^5 + o(u^5).$$

Ainsi, comme $u = \frac{1}{x}$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2x} - \frac{31}{320x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right).$$



Exercice 2.15

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e$.

Résolution

1. On a :

$$|I_n| \leq \int_0^1 \left| \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \right| dx$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$, $\left| \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \right| \leq \frac{e^x}{n!}$.

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$|I_n| \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^x dx \leq \frac{e-1}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, par encadrement,

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $u(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v(x) = e^x$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $u'(x) = \frac{(1-x)^n}{n!}$ et $v'(x) = e^x$.

Donc, par **intégration par parties**,

$$I_n = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} \times e^x \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} \times e^x dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}.$$

3. D'après la question précédente, pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$. *Attention ! La relation précédente est vraie pour $k \geq 1$!*

On a : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n (I_{k-1} - I_k)$.

On reconnaît une somme télescopique : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + I_0 - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 + I_0 = 1 + \int_0^1 e^x dx = 1 + e - 1 = e$.

II. Intégration des fonctions continues par morceaux

II.1. Fonctions continues par morceaux



Définition 2.1 – Subdivision

Soient $a < b$ des réels.

- Une **subdivision du segment** $[a, b]$ est un $(n+1)$ -uplet $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ tel que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$.
- On note $\text{supp}(\sigma) = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, l'ensemble des points de la subdivision σ .
- Le réel $\delta(\sigma) = \max_{0 \leq k < n} (a_{k+1} - a_k)$ est l'écart maximal entre deux points successifs de la subdivision. On l'appelle le **pas** (ou **module**) de la subdivision σ .

💡 Exemple 2.1 – Subdivision régulière

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_k = a + k \times \frac{b-a}{n}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ appelée **subdivision régulière**.

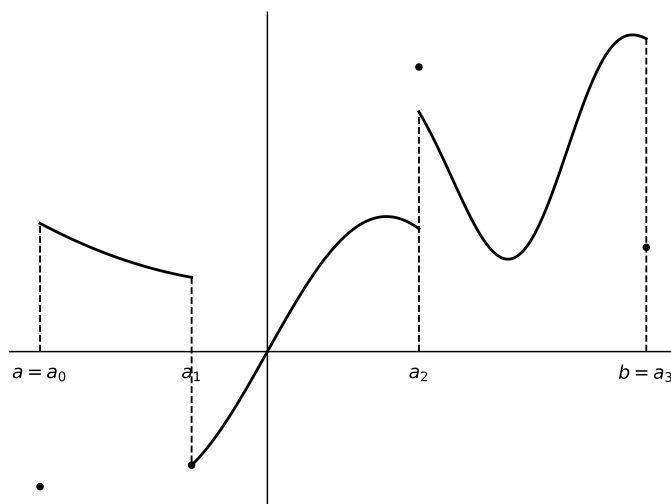


Définition 2.2 – Fonction continue par morceaux

- Soient $a < b$ des réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.
On dit que f est **continue par morceaux sur** $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ de f à $]a_k, a_{k+1}[$:
 - est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$;
 - admet une limite finie à droite en a_k ;
 - admet une limite finie à gauche en a_{k+1} .
- On dit que la subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est **adaptée** à f .
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est **continue par morceaux** lorsque la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

📖 Remarque 2.2

- L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.
- Exemple de graphe d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$:



- Une fonction en escalier est continue par morceaux.
- Une fonction continue est continue par morceaux.

💡 Exemple 2.2

1. La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction :

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction :

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction :

$$f_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (la limite à droite en 0 de f_3 n'est pas finie). Par contre, f_3 est continue par morceaux (et même continue) sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. La fonction :

$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rfloor & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

n'est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, nous allons montrer qu'elle ne possède pas de limite en 0^+ . Considérons les suites définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n \times \pi} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n \times \pi}.$$

On a $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0^+$ et $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0^+$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x_n) = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n \times \pi} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n \times \pi\right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n \times \pi} \right\rfloor = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

et

$$f(y_n) = \left\lfloor \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n \times \pi} \times \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n \times \pi\right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2n \times \pi} \right\rfloor = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

Les suites $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'ont pas la même limite.

Donc, par caractérisation séquentielle de la limite, f ne possède pas de limite en 0^+ .

Proposition 2.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

C'est donc un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration

Exercice (si σ_f et σ_g sont deux subdivisions adaptées à f et g , on peut construire une subdivision adaptée à $\lambda.f + g$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$).

Exercice 2.16

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Résolution

On note $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f et, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on considère f_k le prolongement par continuité de $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ sur $[a_k, a_{k+1}[$ (possible car $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ possède une limite finie à droite en a_k et à gauche en a_{k+1}).

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction f_k est continue sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$ donc, par le théorème des bornes atteintes, est bornée par une constante $m_k > 0$ sur ce segment. On en déduit que, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x)| \leq \max(m_0, \dots, m_{n-1}, |f(a_0)|, \dots, |f(a_n)|).$$

Donc f est bornée sur $[a, b]$.

Remarque 2.3

- Le produit de deux fonctions continues par morceaux est continue par morceaux (même démonstration que pour la somme).
- Si f est continue par morceaux, alors $|f|$ aussi.
- **Attention!** La composée de deux fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux (dans l'exemple 2.2, la fonction f_4 n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et est la composée de la fonction partie entière et de la fonction f_2 qui sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$).

II.2. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

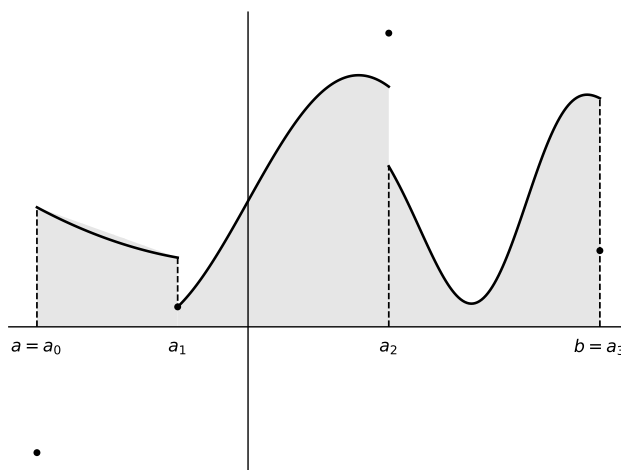
Définition 2.3 – Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$. On note $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f .

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ fixé. La fonction $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$, possède une limite finie à droite en a_k et à gauche en a_{k+1} . On peut donc prolonger $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ en une fonction continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ notée f_k .

D'après le cours de première année, l'intégrale de f_k sur $[a_k, a_{k+1}]$ existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment). On définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t) dt.$$



Remarque 2.4

- On peut montrer que^a si $\tau = (b_0, b_1, \dots, b_p)$ est une autre subdivision adaptée à f , alors, en notant, pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, g_k le prolongement par continuité de la restriction $f|_{]b_k, b_{k+1}[}$ au segment $[b_k, b_{k+1}]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t) dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} g_k(t) dt.$$

Autrement dit, l'intégrale de f sur $[a, b]$ ne dépend pas de la subdivision choisie. C'est pourquoi la subdivision n'apparaît pas dans le symbole $\int_a^b f(t) dt$.

- L'intégrale de f sur $[a, b]$ est aussi notée $\int_{[a,b]} f(t) dt$ ou $\int_{[a,b]} f$.
- La valeur de f en ses points de discontinuités éventuels n'intervient pas dans le calcul de l'intégrale de f . On en déduit le résultat suivant.

^a. La démonstration est similaire à celle faite pour les fonctions en escalier dans le cours de première année

Proposition 2.2

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Si f et g coïncident sur $[a, b]$, sauf en un nombre fini de points, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt.$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment s'étendent au cadre des fonctions continues par morceaux sur un segment. En effet, il suffit d'appliquer les propriétés de l'intégrale des fonctions continues à chaque terme de la somme.

Théorème 2.3 – Propriétés de l'intégrale sur segment

Soient $a < b$ deux réels.

- **Linéarité de l'intégrale.** L'application $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$.

Autrement dit, pour toutes fonctions f et g continues par morceaux sur $[a, b]$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\int_a^b \lambda \times f(t) + \mu \times g(t) dt = \lambda \times \int_a^b f(t) dt + \mu \times \int_a^b g(t) dt$$

- **Inégalité triangulaire.** Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

- **Positivité de l'intégrale.** Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction **positive** et continue par morceaux sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

- **Croissance de l'intégrale.** Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs **réelles** et continues par morceaux sur $[a, b]$. Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

- **Relation de Chasles.** Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$, alors,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

🔍 Remarque 2.5 – Valeur moyenne

Une fonction continue par morceaux sur un segment étant bornée, on en déduit que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| dt \leq (b-a) \times \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

La quantité $\lambda = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t) dt$ est appelée la **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** . La valeur moyenne vérifie $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \lambda dt$.

⚙️ Théorème 2.4

Soient $a < b$ des réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction à valeurs **positives**.

- On suppose que f est **continue** sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \iff \text{la fonction } f \text{ est nulle sur } [a, b].$$

- On suppose que f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \iff \text{la fonction } f \text{ est nulle sur } [a, b] \text{ sauf éventuellement en un nombre fini de points.}$$

Démonstration

- L'implication réciproque ($\Leftarrow$) est claire

Pour montrer l'implication directe ($\Rightarrow$), on raisonne par contraposée. Supposons f non nulle sur $[a, b]$ et montrons que $\int_a^b f(t) dt \neq 0$.

Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Or f est positive, donc $f(x_0) > 0$.

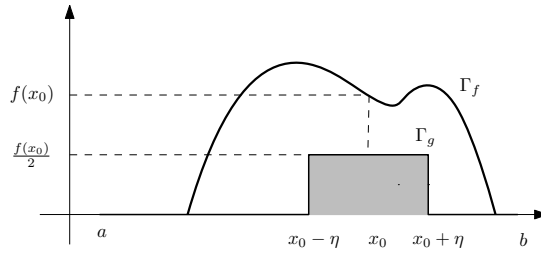
Par continuité de f , il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$.

On définit alors la fonction g par :

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{si } x \in [a, b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note ℓ la longueur de l'intervalle $[a, b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. Comme $x_0 \in [a, b]$ et $\eta > 0$, on a $\ell > 0$.

De plus, par construction, on a $f \geq g$. D'où, par croissance de l'intégrale, on a $\int_a^b f(t) dt \geq \ell \times \frac{f(x_0)}{2} > 0$ (voir dessin ci-dessous).



Par contraposée, on en déduit que si $\int_a^b f(t) dt$ est nulle, alors f est nulle sur $[a, b]$.

► On note $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f et, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on considère f_k le prolongement par continuité de $f|_{[a_k, a_{k+1}[}$ sur $[a_k, a_{k+1}]$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction f_k est positive, d'où, par positivité de l'intégrale, $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t) dt \geq 0$. Or, par définition, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t) dt.$$

On en déduit que $\int_a^b f(t) dt$ est nulle si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t) dt = 0$.

On applique alors le résultat du point précédent aux fonctions continues $f_0, f_1, \dots, f_n$. On en déduit que $\int_a^b f(t) dt$ est nulle si, et seulement si, pour tout $x \in [a, b] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$, $f(x) = 0$. $\square$

Remarque 2.6

On a un théorème analogue lorsque la fonction est négative sur $[a, b]$.



Notation 2.1 – Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur I .

► Pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, la fonction $f|_{[a, b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f|_{[a, b]}(t) dt.$$

► Pour tout $a \in I$, on pose :

$$\int_a^a f(t) dt = 0.$$

► Pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a > b$, on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$

Attention

La linéarité et la relation de Chasles sont encore vraies avec ces notations.

Par contre, lorsqu'il y a une inégalité, il faut penser à vérifier que les bornes sont dans le « bon » ordre ($a < b$). Par exemple, l'inégalité triangulaire (Théorème 2.3 page 17) devient :

$$\forall (a, b) \in I \times I, \quad \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)| dt \right|.$$

II.3. Changement de variables

Théorème 2.5 – Changement de variable : cas d'une fonction continue

Soient I et un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha < \beta$ des réels.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha, \beta]$ et à valeurs dans I . Alors,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt.$$

Démonstration

On note F une primitive de f sur I . On remarque que $F \circ \varphi$ est une primitive sur $[\alpha, \beta]$ de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$. Donc,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = [F(t)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = [F(\varphi(t))]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt.$$

□

On peut étendre ce théorème aux cas des fonctions continues par morceaux. Attention, on doit pour cela ajouter une hypothèse à φ .

Théorème 2.6 – Changement de variable : cas d'une fonction continue par morceaux

Soient I et un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha < \beta$ des réels.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur I et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha, \beta]$ et à valeurs dans I . On suppose de plus que φ est **strictement monotone** sur $[\alpha, \beta]$. Alors, $f \circ \varphi$ est continue par morceaux et,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt.$$

Démonstration

Démonstration dans le cas où φ est strictement croissante.

Comme φ est continue et strictement croissante, par le théorème de la bijection φ réalise une bijection de $[\alpha, \beta]$ sur $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$.

Soit $\sigma = (b_0, b_1, \dots, b_p)$ une subdivision de $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$ adaptée à la restriction de f à $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on note f_k le prolongement par continuité de $f|_{]b_k, b_{k+1}[}$ au segment $[b_k, b_{k+1}]$ (ce qui est possible car f est supposée continue par morceaux sur I). On a alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f_k(x) dx.$$

De plus, par bijectivité de φ , pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, il existe un unique $a_k \in [\alpha, \beta]$ tel que $b_k = \varphi(a_k)$ (notons que $b_0 = \varphi(\alpha)$ et $b_p = \varphi(\beta)$, d'où $a_0 = \alpha$ et $a_p = \beta$). La croissance stricte de φ entraîne alors que $(a_0, \dots, a_p)$ est une subdivision de $[\alpha, \beta]$.

Soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. En appliquant le théorème de changement de variables à la fonction continue f_k , on a :

$$\int_{b_k}^{b_{k+1}} f_k(x) dx = \int_{\varphi(a_k)}^{\varphi(a_{k+1})} f_k(x) dx = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt.$$

Or, φ est strictement croissante sur $[a_k, a_{k+1}]$. Donc, pour tout $t \in]a_k, a_{k+1}[$, on a $b_k < \varphi(t) < b_{k+1}$ et f_k est continue en $\varphi(t)$. D'où, $(a_0, \dots, a_p)$ est une subdivision adaptée à la fonction $f \circ \varphi$. On en déduit que $f \circ \varphi$ est continue par morceaux.

De plus, par définition de f_k , pour tout $t \in]a_k, a_{k+1}[$, $f_k(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$. Donc,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt.$$

□

III. Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Dans toute cette partie, a est un réel.

III.1. Définition

💡 Exemple 2.3

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

L'objectif de cette partie est de donner un sens à la notation : $\int_1^{+\infty} f(t) dt$.

La fonction f est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\int_1^x f(t) dt = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \in \mathbb{R}.$$

D'où, $\int_1^x f(t) dt$ possède une limite finie en $+\infty$, on pose alors $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt$.



Définition 2.4 – Intégrale convergente, Intégrale divergente

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

► Lorsque $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite **finie** quand x tend vers $+\infty$, on note $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, ou $\int_a^{+\infty} f$, sa limite et on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est **convergente**.

► On dit l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

🔍 Remarque 2.8 – Nature d'une intégrale

Étudier la nature d'une intégrale signifie déterminer si l'intégrale est convergente ou divergente.

💡 Exemple 2.4

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$ diverge.

En effet, pour tout $x \geq 0$, on a : $\int_0^x \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^x = 1 - \cos(x)$ qui n'admet pas de limite lorsque $x \rightarrow +\infty$.

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge.

En effet, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

De plus, on a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

 Remarque 2.9 – Prudence!

La convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ n'entraîne ni que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ ni que f est bornée sur $[a, +\infty[$.

**Exercice 2.17**

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ telle que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

1. On suppose dans cette question que f admet une limite finie en $+\infty$.

Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

2. Trouver un contre-exemple lorsque qu'on retire l'hypothèse « f admet une limite finie en $+\infty$ ».

Résolution

1. On note ℓ la limite de f en $+\infty$.

► Par l'absurde, supposons que $\ell > 0$. Alors, il existe $A > a$ tel que, pour tout $x \geq A$, $f(x) \geq \ell/2$. Par croissance de l'intégrale, on a : pour tout $x \geq A$

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt \geq \int_a^A f(t)dt + (x-A) \times \frac{\ell}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ce qui contredit la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Donc $\ell \leq 0$

► De même, en supposant $\ell < 0$, on aboutit à une contradiction. Donc $\ell \geq 0$.

Ainsi, $\ell = 0$.

2. Fonction « triangles ».

**Remarque 2.10**

En raisonnant comme dans la question 1., on peut montrer que si f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

III.2. Intégrales de référence

Théorème 2.7 – Intégrales de Riemann

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$. En cas de convergence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Démonstration

Soit $x \geq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^x t^{-\alpha} dt = \begin{cases} [\ln(t)]_1^x & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^x & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} - \frac{x^{-\alpha+1}}{\alpha-1} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Or,

$$\begin{cases} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ x^{-\alpha+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty & \text{si } -\alpha+1 > 0 \\ x^{-\alpha+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 & \text{si } -\alpha+1 < 0. \end{cases}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ et dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Attention

La condition $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ **n'implique pas** que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Contre-exemple : $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.

Théorème 2.8 – Intégrales des fonctions exponentielles

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha \times t} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 0$. En cas de convergence :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha \times t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

Démonstration

Soit $x \geq 0$, on a

$$\int_0^x e^{-\alpha \times t} dt = \begin{cases} [t]_0^x & \text{si } \alpha = 0 \\ \left[\frac{e^{-\alpha \times t}}{-\alpha} \right]_0^x & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha \times x}}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Or,

$$\begin{cases} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ e^{-\alpha \times x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty & \text{si } -\alpha > 0 \\ e^{-\alpha \times x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 & \text{si } -\alpha < 0. \end{cases}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha \times t} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 0$ et dans ce cas :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha \times t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

□

🔧 Théorème 2.9 – Intégrales de la fonction $\ln$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(t) dt$ est divergente.

Démonstration

Soit $x \geq 1$. On a

$$\int_1^x \ln(t) dt = [t \times \ln(t) - t]_1^x = x \times \ln(x) - x + 1 = x \times (\ln(x) - 1) + 1.$$

Or $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc, $\int_1^x \ln(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(t) dt$ est divergente. □

🔍 Remarque 2.12 – Autre rédaction

On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$. Donc, il existe $A \geq 1$ tel que, pour tout $t \geq A$, $\ln(t) \geq 1$. En utilisant la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale, on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \int_1^x \ln(t) dt = \int_1^A \ln(t) dt + \int_A^x \ln(t) dt \geq \int_1^A \ln(t) dt + x - A \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(t) dt$ est divergente.

On retiendra la méthode suivante pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

📋 Méthode 2.1 – Montrer qu'une intégrale converge à l'aide d'une primitive

Dans le cas où f est **continue sur** $[a, +\infty[$, on peut en considérer une primitive F . On a alors, pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

On en déduit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en $+\infty$. Dans ce cas,

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a).$$

III.3. Propriétés de l'intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$ **🔧 Théorème 2.10 – Linéarité**

► L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ telles que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

► De plus, si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent, alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \int_a^{+\infty} \lambda \times f(t) + \mu \times g(t) dt = \lambda \times \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \times \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Démonstration

► Notons E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ telles que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

On remarque que $E \subset \mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$. De plus, la fonction nulle appartient à E : en effet, pour tout $x \geq a$, $\int_a^x 0 dt = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \in \mathbb{R}$.

Soient $(f, g) \in \mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K}) \times \mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ tel que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité de l'intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux, on a : pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x \lambda \times f(t) + g(t) dt = \lambda \times \int_a^x f(t) dt + \int_a^x g(t) dt.$$

Or, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent donc, $\int_a^{+\infty} \lambda \times f(t) + g(t) dt$ converge et,

$$\int_a^{+\infty} \lambda \times f(t) + g(t) dt = \lambda \times \int_a^{+\infty} f(t) dt + \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Donc, $\lambda \cdot f + g \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

► Conséquence du point précédent. □

Théorème 2.11 – Positivité et croissance de l'intégrale

Soient $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs **réelles** et continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

► Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge et f est **positive** sur $[a, +\infty[$, alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \geq 0.$$

► Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent et $f \leq g$ sur $[a, +\infty[$, alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Démonstration

► Par positivité de l'intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux, on a : pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f(t) dt \geq 0.$$

Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité précédente.

► Par croissance de l'intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux, on a : pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt.$$

Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité précédente. □

Théorème 2.12 – Relation de Chasles

Soient $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et $c \in [a, +\infty[$

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^{+\infty} f(t) dt.$$

Démonstration

Soit $x \geq a$. Par la relation de Chasles, on a : pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f(t) dt \stackrel{(*)}{=} \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt.$$

Or, $\int_a^c f(t) dt$ est une constante. Donc, $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ si, et seulement si, $\int_c^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

En cas de convergence, en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^{+\infty} f(t) dt.$$

□

 Remarque 2.13

La relation de Chasles montre que la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de $+\infty$. Autrement dit, le choix de a n'est pas important.

**Proposition 2.3 – Cas des fonctions à valeurs complexes**

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et à valeurs complexes.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, les intégrales $\int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f(t)) dt$ sont convergentes. En cas de convergence, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

Démonstration

Par propriété de l'intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux, on a : pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f(t) dt = \underbrace{\int_a^x \operatorname{Re}(f(t)) dt}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\int_a^x \operatorname{Im}(f(t)) dt}_{\in \mathbb{R}}.$$

Donc, par propriété des limites des fonctions à valeurs complexes : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ possède une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si $\int_a^x \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^x \operatorname{Im}(f(t)) dt$ possèdent une limite finie en $+\infty$. □

**Exercice 2.18**

Soit f une fonction **continue** sur $[a, +\infty[$. On suppose que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $g' = -f$.

Résolution

Comme f est continue, on peut en considérer une primitive F sur $[a, +\infty[$. Par la relation de Chasles, pour tout $x \geq a$,

$$g(x) = \int_x^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt = - \int_a^x f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

Or, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est une constante et $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de la fonction continue f .
Donc,

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $x \geq a$, $g'(x) = -f(x)$.

💡 Exemple 2.5

Dans l'exemple 2.4 page 21, on a montré la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$.

En appliquant l'exercice précédent, on déduit que la fonction $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Remarque : On pouvait également montrer ce résultat en calculant l'intégrale. En effet, par la relation de Chasles, on a :

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) \left(= \underbrace{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{si } x > 0} \right).$$

D'où, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

🔍 Remarque 2.14 – Restes d'une intégrale convergente

Lorsque l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, on dit que $\int_x^{+\infty} f(t) dt$, avec $x \geq a$, est un **reste**.

De plus, par la relation de Chasles, on a :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(t) dt - \int_a^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

On dit que les restes d'une intégrale convergente tendent vers 0.

🔗 Théorème 2.13

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et à valeurs **positives** sur $[a, +\infty[$.

► L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$.

► En cas de convergence,

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \sup_{x \in [a, +\infty[} \left(\int_a^x f(t) dt \right).$$

Démonstration

► La fonction F est croissance sur $[a, +\infty[$. En effet, par la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale, on a : pour tout $(x, y) \in [a, +\infty[\times [a, +\infty[$ avec $x \leq y$,

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt \geq 0.$$

Par le théorème de la limite monotone, la fonction F possède une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, elle est majorée.

Ainsi, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$. Dans ce cas,

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \sup_{x \in [a, +\infty[} \left(\int_a^x f(t) dt \right).$$

□

Théorème 2.14 – Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et **positives** sur $[a, +\infty[$. On suppose que $0 \leq f \leq g$ sur $[a, +\infty[$.

1. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
2. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

Démonstration

1. Par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt.$$

Or, l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, donc, par le théorème 2.13 page 27, la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est majorée. On note M un de ses majorants.

Donc, pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f(t) dt \leq M.$$

Donc, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée et, par le théorème 2.13 page 27, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

2. Comme précédemment, on a, pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt.$$

Or, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge, donc, par le théorème 2.13 page 27 la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ n'est pas majorée.

Comme f est positive, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante sur $[a, +\infty[$.

Donc, par le théorème de la limite monotone, $\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, par théorème de minoration, $\int_a^x g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge. □

Exemple 2.6

Pour tout $t \geq 1$, on note $f(t) = \frac{|\sin(t)|}{t^2}$. On remarque que, pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

IV. Intégrale sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette partie est d'adapter le paragraphe précédent aux fonctions continues sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$. Autrement dit, un des trois cas suivants :

- ▶ $I = [a, b[$ avec a réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (la partie précédente correspond au cas $b = +\infty$).
- ▶ $I =]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et b réel.
- ▶ $I =]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

IV.1. Définition



Définition 2.5 – Intégrale convergente, Intégrale divergente

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.

- ▶ On suppose que $I = [a, b[$ (a est alors réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Lorsque $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite **finie** quand x tend vers b , on note $\int_a^b f(t) dt$, ou $\int_a^b f$, sa limite et on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **convergente**.
- ▶ On suppose que $I =]a, b]$ (alors $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et b est réel). Lorsque $\int_x^b f(t) dt$ admet une limite **finie** quand x tend vers a , on note $\int_a^b f(t) dt$, ou $\int_a^b f$, sa limite et on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **convergente**.
- ▶ On suppose que $I =]a, b[$ (alors $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **convergente** lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

- ▶ On dit l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Pour unifier les trois cas, on trouve aussi les notations $\int_I f(t) dt$ et $\int_I f$.

Remarque 2.15 – Nature d'une intégrale

Étudier la nature d'une intégrale signifie déterminer si l'intégrale est convergente ou divergente.



Exercice 2.19

Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente.

Résolution

- ▶ La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue par morceaux sur $] -1, 1[$ (et même continue).
- ▶ De plus, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente : pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \text{Arcsin}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}.$$

► De même, $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente : pour tout $x \in]-1, 0[$,

$$\int_x^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\text{Arcsin}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente et $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi$.

 **Attention – Cas d'un intervalle de la forme $] -a, a[$ où $a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$**

Pour montrer que l'intégrale $\int_{-a}^a f(t) dt$ converge, il ne suffit pas de montrer que $\int_{-x}^x f(t) dt$ admette une limite finie quand $x \rightarrow a$.

En effet, comme la fonction sin est impaire, on a :

$$\int_{-x}^x \sin(t) dt = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Or, en raisonnant comme dans l'exemple 2.4 page 21, on montre que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} \sin(t) dt$ diverge. Donc, par définition, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt$ diverge.

 **Remarque 2.17 – Lien avec l'intégrale sur un segment**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur le **segment** $[a, b]$ (a et b sont réels ici). L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$, aussi notée $\int_{[a,b]} f(t) dt$, est définie comme l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment (voir paragraphe II.2 page 16).

► Montrons que l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ converge.

D'après l'exercice 2.16, la fonction f est bornée sur $[a, b]$:

$$\exists M \geq 0, \forall t \in [a, b], |f(t)| \leq M.$$

De plus, pour tout $x \in [a, b[$, l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$ est définie comme l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. D'où, en utilisant les propriétés de cette intégrale, on a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^b f(t) dt \right| \leq \int_x^b |f(t)| dt \leq \int_x^b M dt \leq M \times (b - x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 0.$$

Ainsi, l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge et $\int_{[a,b[} f(t) dt = \int_{[a,b]} f(t) dt$.

► De la même manière, on montre que l'intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$ convergent et

$$\int_{]a,b]} f(t) dt = \int_{]a,b[} f(t) dt = \int_{[a,b]} f(t) dt.$$

 **Remarque 2.18 – « Faux problèmes »**

On suppose ici que a et b sont réels.

► Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On suppose que f possède une limite finie en b . On dit alors qu'il y a un **faux problème en b** .

Dans ce cas, on peut prolonger f par continuité en b . On note $\tilde{f}$ le prolongement ainsi obtenu. La fonction $\tilde{f}$ est

définie et continue par morceaux sur $[a, b]$. Donc, l'intégrale $\int_a^b \tilde{f}(t) dt$ converge.

De plus, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) = \tilde{f}(x)$, donc : pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x \tilde{f}(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_a^b \tilde{f}(t) dt.$$

La convergence précédente se montre comme dans la remarque 2.17.

On en déduit que $\int_a^b f(t) dt$ converge et $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt$.

- On définit de la même manière un faux problème en a lorsque $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $]a, b]$ et possède une limite finie en a .

Attention

Il n'y a pas de faux problème en $+\infty$ ou $-\infty$ (voir le cas des intégrales de Riemann par exemple).

Exemple 2.7

On considère la fonction définie pour tout $x \in]0, 1]$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Cette fonction est continue (par morceaux) sur $]0, 1]$. De plus, l'équivalent classique $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ montre que f est prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = 1$). On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

IV.2. Intégrales de référence

Théorème 2.15 – Intégrales de Riemann

- L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$. Dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

- L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$. Dans ce cas :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Démonstration

- Voir théorème 2.7 page 23
- Soit $x \in]0, 1]$. On a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{x^{-\alpha+1}}{1 - \alpha} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Or,

$$\begin{cases} -\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \\ x^{-\alpha+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 & \text{si } -\alpha + 1 > 0 \\ x^{-\alpha+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty & \text{si } -\alpha + 1 < 0. \end{cases}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$. et dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}.$$

□

Remarque 2.20

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ n'est convergente pour aucune valeur de α .

Théorème 2.16 – Intégrales de la fonction $\ln$

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(t) dt$ est divergente.
- L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente et :

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1.$$

Démonstration

Soit $x \in]0, 1]$. On a :

$$\int_x^1 \ln(t) dt = [t \times \ln(t) - t]_x^1 = -1 - x \times \ln(x) + x.$$

Or, par croissances comparées, $x \times \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc, $\int_x^1 \ln(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$. Donc, l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente et $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$. □

Remarque 2.21 – Prudence! (suite de la remarque 2.11 page 23)

On retiendra des deux propositions précédentes, que la condition « $\int_a^b f(t) dt$ converge » n'implique pas nécessairement que la fonction f possède une limite finie en a ou en b (voir l'exemple de la fonction logarithme népérien).

Remarque 2.22 – Méthode pour montrer qu'une intégrale converge à l'aide d'une primitive

- Dans le cas où f est **continue sur** $[a, b]$, on peut en considérer une primitive F . On a alors, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

On en déduit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en b . Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a).$$

- Dans le cas où f est **continue sur** $]a, b]$, on peut en considérer une primitive F . On a alors, pour tout $x \in]a, b]$,

$$\int_x^b f(t) dt = F(b) - F(x).$$

On en déduit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en a . Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - \lim_{x \rightarrow a} F(x).$$

► On suppose que f est **continue sur** $]a, b[$ et on en considère une primitive F . Soit $c \in]a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.

En appliquant les deux points précédents, $\int_a^b f(t)dt$ converge si, et seulement si F admet une limite finie en a et en b . Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x).$$

IV.3. Propriétés des intégrales généralisées

🔧 Théorème 2.17 – Linéarité

- L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ telles que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ converge est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.
- De plus, si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur I telles que les intégrales $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ convergent, alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \int_I \lambda \times f(t) + \mu \times g(t)dt = \lambda \times \int_I f(t)dt + \mu \times \int_I g(t)dt$$

Démonstration

Exercice : même méthode que dans le cas $I = [a, +\infty[$. □

🔧 Théorème 2.18 – Positivité et croissance de l'intégrale

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs **réelles** et continues par morceaux sur I .

- Si l'intégrale $\int_I f(t)dt$ converge et f est **positive** sur I , alors $\int_I f(t)dt \geq 0$.
- Si les intégrales $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ convergent et $f \leq g$ sur I , alors $\int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt$.

Démonstration

Exercice : même méthode que dans le cas $I = [a, +\infty[$. □

🔧 Théorème 2.19 – Relation de Chasles

Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ et $c \in I$

- On suppose que $I = [a, b[$ avec $a < b$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_c^b f(t)dt$ est convergente.

- On suppose que $I =]a, b]$ avec $a < b$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^c f(t)dt$ est convergente.
- On suppose que $I =]a, b[$ avec $a < b$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, et seulement si, les intégrales $\int_c^b f(t)dt$ et $\int_a^c f(t)dt$ sont convergentes.

Dans les trois cas, lorsqu'il y a convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration

Exercice : même méthode que dans le cas $I = [a, +\infty[$.

□

Remarque 2.23

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.

- Lorsque $I = [a, b[$, la relation de Chasles montre que la nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de b .
- Lorsque $I =]a, b]$, la relation de Chasles montre que la nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de a .
- Lorsque $I =]a, b[$, la définition de la convergence $\int_a^b f(t)dt$ requiert **l'existence d'un** $c \in I$ tel que les intégrales $\int_c^b f(t)dt$ et $\int_a^c f(t)dt$ convergent.

Or, la relation de Chasles montre que : **pour tout** $c \in I$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si, et seulement si, les intégrales $\int_c^b f(t)dt$ et $\int_a^c f(t)dt$ sont convergentes. La nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend donc pas du point c choisit.

De plus, en cas de convergence, pour tout $(c, c') \in]a, b[\times]a, b[$, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Remarque 2.24

- Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

On suppose que l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge. Montrons que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge.

Soit $c \in]a, b[$ quelconque.

L'intégrale de f sur $[a, b[$ converge, donc par la relation de Chasles, l'intégrale de f sur $[c, b[$ converge et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

De plus, la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, c]$ donc (remarque 2.17 page 30) l'intégrale de f sur $[a, c]$ converge.

Ainsi, l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge et est égale à l'intégrale de f sur $[a, b[$.

- De même, si l'intégrale de f sur $]a, b]$ converge, alors l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge.


Exercice 2.20

1. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction **continue** sur $]a, b[$. On suppose que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.
Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et $g' = -f$.
2. Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction **continue** sur $]a, b]$. On suppose que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.
Montrer que la fonction $h : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ et $h' = f$.

Résolution

Même méthode que dans l'exercice 2.18 page 26.

IV.4. Cas des fonctions à valeurs positives

Proposition 2.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur I et à valeurs **positives** sur I .

- On suppose que $I = [a, b[$.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$.

En cas de convergence, on a : $\int_a^b f(t) dt = \sup_{x \in [a, b[} \left(\int_a^x f(t) dt \right)$.

- On suppose que $I =]a, b]$.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est majorée sur $]a, b]$.

En cas de convergence, on a : $\int_a^b f(t) dt = \sup_{x \in]a, b]} \left(\int_x^b f(t) dt \right)$.

Démonstration

- Exercice : même méthode que dans le cas $I = [a, +\infty[$.

- Montrons que la fonction $F : x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est décroissance sur $]a, b]$. Le résultat attendu sera une conséquence du théorème de limite monotone.

Soit $(x, y) \in I \times I$ tel que $x \leq y$. Par la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale, on a :

$$F(x) - F(y) = \int_x^b f(t) dt - \int_y^b f(t) dt = \int_x^y f(t) dt \geq 0.$$

□

Remarque 2.25

Avec les notations de la proposition précédente, lorsque f est une fonction continue par morceaux et positive, on retiendra que :

- la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante.
- la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est décroissante.

Théorème 2.20

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et **positives** sur I . On suppose que $0 \leq f \leq g$ sur I .

1. Si l'intégrale $\int_I g(t) dt$ converge, alors l'intégrale $\int_I f(t) dt$ converge.
2. Si l'intégrale $\int_I f(t) dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_I g(t) dt$ diverge.

Démonstration

Même méthode que dans la démonstration du théorème 2.14 page 28.

IV.5. Cas des fonctions à valeurs complexes**Proposition 2.5**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

L'intégrale $\int_I f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, les intégrales $\int_I \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_I \operatorname{Im}(f(t)) dt$ sont convergentes. Dans ce cas, on a :

$$\int_I f(t) dt = \int_I \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_I \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

Démonstration

Exercice : même méthode que dans le cas $I = [a, +\infty[$.

V. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Dans cette partie, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

V.1. Définitions

Définition 2.6 – Intégrale absolument convergente

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\int_I f(t) dt$ est **absolument convergente** lorsque l'intégrale $\int_I |f(t)| dt$ converge.

Remarque 2.26

- Si f est continue par morceaux, alors $|f|$ aussi et étudier la convergence de l'intégrale $\int_I |f(t)| dt$ a un sens.
- Lorsque la fonction f est positive sur I , on a $f = |f|$. Dans le cas des fonctions **positives**, la convergence de l'intégrale $\int_I f(t) dt$ équivaut à sa convergence absolue.

Exemple 2.8

- Soit $\alpha > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive sur $[1, +\infty[$. Donc, d'après le théorème 2.15 page 31, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente.
- Soit $\alpha < 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive sur $]0, 1]$. Donc, d'après le théorème 2.15 page 31, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente.
- Soit $\alpha > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-\alpha \times t}$ est positive sur $[0, +\infty[$. Donc, d'après le théorème 2.8 page 23, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha \times t} dt$ est absolument convergente.
- L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est absolument convergente. En effet, pour tout $t \in]0, 1]$, $|\ln(t)| = -\ln(t)$. Or l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge, donc par linéarité, l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t) dt$ converge aussi.

Théorème 2.21 – La convergence absolue entraîne la convergence

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.

Si l'intégrale $\int_I f(t) dt$ est **absolument convergente**, alors elle est convergente. Dans ce cas, on a :

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

Démonstration

Démonstration dans le cas où $I = [a, b]$.

► Dans un premier temps, on suppose la fonction f à valeurs réelles.

On définit f^+ et f^- par : pour tout $x \in I$, $f^+(x) = \max(0, f(x))$ et $f^-(x) = \max(0, -f(x))$. On a alors les relations :

$$f = f^+ - f^-, \quad 0 \leq f^+ \leq |f|, \quad 0 \leq f^- \leq |f| \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Par hypothèse, l'hypothèse $\int_a^b |f(t)| dt$ converge. Donc, par théorème de comparaisons, les intégrales $\int_a^b f^-(t) dt$ et $\int_a^b f^+(t) dt$ convergent.

Or, $f = f^+ - f^-$, donc par linéarité de l'intégrale généralisée sur $[a, b[$, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente et :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f^+(t) dt - \int_a^b f^-(t) dt.$$

► On suppose que f est à valeurs complexes. On sait que $|\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$ et $|\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$. En raisonnant comme ci-dessus, on montre alors que les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ sont absolument convergentes. On s'est ramené aux cas des fonctions à valeurs réelles.

Les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ sont donc convergentes. Donc (proposition 2.5 page 36), l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

► Il reste à montrer l'inégalité de l'énoncé. On sait que, pour tout $x \in [a, b[$,

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt.$$

En passant à la limite quand x tend vers b (possible car les intégrales $\int_a^x f(t) dt$ et $\int_a^x |f(t)| dt$ sont convergentes), on a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Les démonstrations dans le cas $I =]a, b]$ et $I =]a, b[$ sont similaires. □

❗ Remarque 2.27 – La réciproque du théorème 2.21 est fausse !

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \frac{e^{it}}{t}. \end{aligned}$$

► Pour tout $t \geq 1$, on a $|f(t)| = \frac{1}{t}$. On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ n'est pas absolument convergente (intégrale de Riemann divergente).

► Soit $x \geq 1$. Par intégration par parties, on a :

$$\int_1^x \frac{e^{it}}{t} dt = \left[\frac{e^{it}}{it} \right]_1^x - \int_1^x \frac{-e^{it}}{it^2} dt = \frac{e^{ix}}{ix} - \frac{e^i}{i} + \int_1^x \frac{e^{it}}{it^2} dt.$$

De plus, $\left| \frac{e^{it}}{it^2} \right| = \frac{1}{t^2}$. On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{it^2} dt$ converge absolument donc converge.

D'autre part, $\left| \frac{e^{ix}}{ix} \right| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc, par opération sur les limites, $\int_1^x \frac{e^{it}}{t} dt$ possède une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

❗ Remarque 2.28 – Intégrale semi-convergente

Lorsqu'une intégrale converge mais ne converge pas absolument, on dit qu'elle est **semi-convergente**.



Définition 2.7 – Fonction intégrable

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur I .

► On dit que f est **intégrable sur I** lorsque son intégrale $\int_I f(t) dt$ est absolument convergente. On sait alors

que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ converge et on la note $\int_I f(t)dt$, ou $\int_I f$.

- L'ensemble des fonctions continues par morceaux, intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $L^1(I, \mathbb{K})$.
- Lorsque f est intégrable sur $[a, b[$, on dit que f est intégrable en b .
- Lorsque f est intégrable sur $]a, b]$, on dit que f est intégrable en a .

💡 Exemple 2.9 – Suite de l'exemple 2.8

1. Pour tout $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
2. Pour tout $\alpha < 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$.
3. Pour tout $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-\alpha \times t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
4. La fonction logarithme népérien est intégrable sur $]0, 1]$.

👁 Remarque 2.29

Si f est continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ (a et b sont réels ici), alors $|f|$ aussi et en appliquant la remarque 2.17 page 30 à $|f|$, on déduit que f est intégrable sur $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$. De plus, on a :

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{[a,b[} f(t)dt = \int_{]a,b]} f(t)dt = \int_{]a,b[} f(t)dt.$$

⚙ Théorème 2.22

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$. C'est donc un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration

Donnons la démonstration dans le cas $I = [a, b]$. Les autres cas sont similaires

► On a bien $L^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ et la fonction nulle est intégrable sur I (pour tout $x \in [a, b]$, $\int_a^x 0 dt = 0 \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$).

► Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(f, g) \in L^1(I, \mathbb{K}) \times L^1(I, \mathbb{K})$. Par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$, on a $0 \leq |\lambda \cdot f + g| \leq |\lambda| \cdot |f| + |g|$.

Or, les intégrales $\int_a^b |f(t)| dt$ et $\int_a^b |g(t)| dt$ convergent.

Donc, par linéarité, l'intégrale $\int_a^b |\lambda| \cdot |f(t)| + |g(t)| dt$ converge.

Par théorème de comparaisons, l'intégrale $\int_a^b |\lambda \times f(t) + g(t)| dt$ converge.

On en déduit que la fonction $\lambda \cdot f + g$ est intégrable sur I .

Ainsi, $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$. □

🔖 Notation 2.2

Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$. On pose $\|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt$: on dit que c'est la « norme 1 » de f .

🔧 Proposition 2.6

On a les propriétés suivantes :

► **Homogénéité :**

$$\forall f \in L^1(I, \mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda \cdot f\|_1 = |\lambda| \times \|f\|_1.$$

► **Positivité :**

$$\forall f \in L^1(I, \mathbb{K}), \quad \|f\|_1 \geq 0.$$

► **Inégalité triangulaire :**

$$\forall (f, g) \in L^1(I, \mathbb{K}) \times L^1(I, \mathbb{K}), \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Démonstration

► Conséquence de la linéarité de l'intégrale généralisée sur I . Soient $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\|\lambda \times f\|_1 = \int_I |\lambda \cdot f(t)| \, dt = |\lambda| \times \int_I |f(t)| \, dt = |\lambda| \times \|f\|_1.$$

► Conséquence de la positivité de l'intégrale généralisée sur I . Soient $f \in L^1(I, \mathbb{K})$. On a :

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)| \, dt \geq 0.$$

► Conséquence de la croissance et de la linéarité de l'intégrale généralisée sur I . Soit $(f, g) \in L^1(I, \mathbb{K}) \times L^1(I, \mathbb{K})$. On a :

$$\|f + g\|_1 = \int_I |f(t) + g(t)| \, dt \leq \int_I |f(t)| + |g(t)| \, dt \leq \int_I |f(t)| \, dt + \int_I |g(t)| \, dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

□

 Remarque 2.30

L'emploi du terme « norme » pour désigner $\|f\|_1$ est un abus. En effet, la propriété de séparation n'est pas satisfaite. On doit supposer de plus que f est continue pour l'obtenir.

**Proposition 2.7**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction **continue** et intégrable sur I .

Si $\|f\|_1 = 0$, alors f est la fonction nulle.

Démonstration

Démonstration dans le cas $I = [a, b]$.

La fonction $|f|$ est continue, positive et vérifie $\int_I |f(t)| \, dt = 0$. D'où, pour tout $x \in [a, b]$, $0 \leq \int_a^x |f(t)| \, dt \leq \|f\|_1 = 0$. Donc, pour tout $x \in [a, b]$, $\int_a^x |f(t)| \, dt = 0$. D'après le théorème 2.4 page 18, la fonction $|f|$ est la fonction nulle sur $[a, x]$, pour tout $x \in [a, b]$. Ainsi, $|f|$ est la fonction nulle. Donc, f aussi. □

**Théorème 2.23**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

► Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

La fonction f est intégrable en a si, et seulement si, $t \mapsto f(a + t)$ est intégrable en 0^+ .

► Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

La fonction f est intégrable en b si, et seulement si, $t \mapsto f(b - t)$ est intégrable en 0^+ .

Démonstration

► En utilisant le changement de variable $u = a + t$, on a :

$$\int_x^b |f(u)| \, du = \int_{x-a}^{b-a} |f(a + t)| \, dt.$$

On en déduit que $\int_x^b |f(u)| du$ possède une limite finie en a si, et seulement si, $\int_X^{b-a} |f(a+t)| dt$ possède une limite finie en 0^+ .

► En utilisant le changement de variable $u = b - t$, on a :

$$\int_a^x |f(u)| du = - \int_{b-a}^{b-x} |f(b-t)| dt = \int_{b-x}^{b-a} |f(b-t)| dt.$$

On en déduit que $\int_a^x |f(u)| du$ possède une limite finie en a si, et seulement si, $\int_X^{b-a} |f(b-t)| dt$ possède une limite finie en 0^+ . $\square$

Corollaire 2.2 – Intégrale de Riemann

La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable en a si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration

Appliquer le théorème précédent aux intégrales de Riemann. $\square$

V.2. Théorèmes de comparaison

Cas où $I = [a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$



Définition 2.8 – Relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$ (il existe $B \geq a$ tel que, pour tout $t \geq B$, $g(t) \neq 0$). On dit que :

- f est **dominée par g au voisinage de $+\infty$** et on note $f \underset{+\infty}{=} O(g)$, ou $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$, lorsque la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $+\infty$.
- f est **négligeable devant g au voisinage de $+\infty$** et on note $f \underset{+\infty}{=} o(g)$, ou $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$, lorsque $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.
- f est **équivalente à g au voisinage de $+\infty$** et on note $f \underset{+\infty}{\sim} g$, ou $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$, lorsque $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$.

Remarque 2.31 – Réécriture des relations de comparaison à l'aide de quantificateurs

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$.

► $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$ est équivalent à :

$$\exists M \geq 0, \exists A \geq a, \forall t \geq A, |f(t)| \leq M \times |g(t)|.$$

► $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$ est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \geq a, \forall t \geq A, |f(t)| \leq \varepsilon \times |g(t)|.$$

Remarque 2.32 – Lien entre la négligeabilité et l'équivalence

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$. On a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t) \iff f(t) - g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t)) \iff f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} g(t) + o(g(t))$$

Théorème 2.24 – Théorème de comparaison avec $I = [a, +\infty[$

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

- Si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, +\infty[$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, +\infty[$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, +\infty[$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a, +\infty[$.

Démonstration

Les fonctions f et g sont continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, donc $|f|$ et $|g|$ aussi.

► Appliquer le théorème 2.20 page 36 à $|f|$ et $|g|$.

► On sait que :

$$\exists M \geq 0, \exists A \geq a, \forall t \geq A, |f(t)| \leq M \times |g(t)|.$$

La fonction g est intégrable sur $[a, +\infty[$, donc sur $[A, +\infty[$ (relation de Chasles). D'où, la fonction $M \times g$ est intégrable sur $[A, +\infty[$.

On déduit alors du point précédent que f est intégrable sur $[A, +\infty[$. Or, f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Donc, d'après la relation de Chasles, f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

► Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$, alors $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$. On applique alors le deuxième point du théorème.

► Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$, alors $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$ et $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(f(t))$. On applique alors le deuxième point du théorème. □

Exemple 2.10

1. La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$;
- $\frac{\cos(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$;
- $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

2. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

En effet,

- la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$;
- $e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car, par croissances comparées, $u \times e^{-u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$;
- $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t} \times \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} \times \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$;
- $\frac{1}{t} \times \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ car, $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et $\frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$;
- $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Remarque 2.33 – Important

Le théorème de comparaison s'utilise aussi par contraposée : si f n'est pas intégrable, alors g n'est pas intégrable.

💡 Exemple 2.11

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \times (2 + \sin(t))}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \times (2 + \sin(t))}$ est continue sur $[1, +\infty[$;
- $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t \times (2 + \sin(t))}\right)$;
- $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $1 \leq 1$).

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$.

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$;
- $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(t)}\right)$ car, par croissances comparées, $\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$;
- $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $1 \leq 1$).

3. La fonction $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

En effet,

- la fonction $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$;
- $\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ car $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et $\frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$;
- $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $1 \leq 1$).

🦋 Exercice 2.21 – Intégrales de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que la fonction $f_{\alpha, \beta} : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \times (\ln(t))^\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si, et seulement si, $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$

Résolution

La fonction $f_{\alpha, \beta}$ est positive sur $[2, +\infty[$, donc la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f_{\alpha, \beta}(t) dt$ équivaut à l'intégrabilité de $f_{\alpha, \beta}$ sur $[2, +\infty[$.

► Cas 1 : $\alpha > 1$. On a

- La fonction $f_{\alpha, \beta}$ est continue sur $[2, +\infty[$.
- Soit $\gamma \in]1, \alpha[$ (par exemple, $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$). Alors, par croissances comparées, on a $f_{\alpha, \beta}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ (intégrale de Riemann sur $[2, +\infty[$ avec $\gamma > 1$).

Par théorème de comparaison, la fonction $f_{\alpha, \beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

► Cas 2 : $\alpha < 1$. On a

- La fonction $f_{\alpha, \beta}$ est continue sur $[2, +\infty[$.
- Par croissances comparées, on a : $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(f_{\alpha, \beta}(t)\right)$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$ (intégrale de Riemann sur $[2, +\infty[$).

Par théorème de comparaison, $f_{\alpha, \beta}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$

► *Cas 3* : $\alpha = 1$. Soit $x \geq 2$. On applique le changement de variable $u = \ln(t)$, $du = \frac{1}{t} dt$ (la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, x]$). D'où,

$$\int_2^x f_{\alpha, \beta}(t) dt = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{1}{u^\beta} du.$$

Or, $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc on reconnaît une intégrale de Riemann sur $[\ln(2), +\infty[$ qui converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Ainsi,

La fonction $f_{\alpha, \beta} : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \times (\ln(t))^\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si, et seulement si, $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$

Cas où $I =]-\infty, b]$, avec $b \in \mathbb{R}$



Définition 2.9 – Relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur $] -\infty, b]$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de $-\infty$ (il existe $B \leq b$ tel que, pour tout $t \leq B$, $g(t) \neq 0$). On dit que :

- f est **dominée par g au voisinage de $-\infty$** et on note $f \underset{-\infty}{=} O(g)$, ou $f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} O(g(t))$ lorsque la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $-\infty$.
- f est **négligeable devant g au voisinage de $-\infty$** et on note $f \underset{-\infty}{=} o(g)$, ou $f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o(g(t))$, lorsque $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$.
- f est **équivalente à g au voisinage de $-\infty$** et on note $f \underset{-\infty}{\sim} g$, ou $f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} g(t)$, lorsque $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 1$.

Remarque 2.34 – Réécriture des relations de comparaison à l'aide de quantificateurs

Soient f et g deux fonctions définies sur $] -\infty, b]$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de $-\infty$.

- $f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} O(g(t))$ est équivalent à :

$$\exists M \geq 0, \exists B \leq b, \forall t \leq B, |f(t)| \leq M \times |g(t)|.$$

- $f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o(g(t))$ est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \leq b, \forall t \leq B, |f(t)| \leq \varepsilon \times |g(t)|.$$

Remarque 2.35 – Lien entre la négligeabilité et l'équivalence

Soient f et g deux fonctions définies sur $] -\infty, b]$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de $-\infty$. On a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} g(t) \iff f(t) - g(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o(g(t)) \iff f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} g(t) + o(g(t))$$



Théorème 2.25 – Théorème de comparaison avec $I =]-\infty, b]$

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $] -\infty, b]$.

- Si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $] -\infty, b]$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $] -\infty, b]$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o(g(t))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $] -\infty, b]$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $] -\infty, b]$.

Démonstration

Même raisonnement que le théorème 2.24 page 42.

□

Cas où $I = [a, b]$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$



Définition 2.10 – Relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur I , et $x_0 \in [a, b]$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , sauf éventuellement en x_0 (il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [a, b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \setminus \{x_0\}$, $g(t) \neq 0$). On dit que :

- f est **dominée par g au voisinage de x_0** et on note $f = O(g)$, ou $f(t) = O(g(t))$, lorsque la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de x_0 .
- f est **négligeable devant g au voisinage de x_0** et on note $f = o(g)$, ou $f(t) = o(g(t))$, lorsque $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow{t \rightarrow x_0} 0$.
- f est **équivalente à g au voisinage de x_0** et on note $f \sim g$, ou $f(t) \sim (g(t))$, lorsque $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow{t \rightarrow x_0} 1$.

Remarque 2.36 – Lien entre la négligeabilité et l'équivalence

Soient f et g deux fonctions définies sur I , et $x_0 \in [a, b]$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , sauf éventuellement en x_0 . On a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow x_0}{\sim} g(t) \iff f(t) - g(t) \underset{t \rightarrow x_0}{=} o(g(t)) \iff f(t) \underset{t \rightarrow x_0}{=} g(t) + o(g(t)).$$

Remarque 2.37 – Réécriture des relations de comparaison à l'aide de quantificateurs lorsque $I = [a, b]$ et $x_0 = b$

Soient f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de b .

- $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} O(g(t))$ est équivalent à :

$$\exists M \geq 0, \exists \eta > 0, \forall t \in [b - \eta, b], |f(t)| \leq M \times |g(t)|.$$

- $f(t) \underset{t \rightarrow x_0}{=} o(g(t))$ est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in [b - \eta, b], |f(t)| \leq \varepsilon \times |g(t)|.$$



Théorème 2.26 – Théorème de comparaison avec $I = [a, b]$

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

- Si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, b]$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, b]$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, b]$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a, b]$.

Démonstration

Même raisonnement que le théorème 2.24 page 42.

□

Exemple 2.12

1. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0, 1]$.

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0, 1[$.
- $\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t \rightarrow 1}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable en 1 (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

2. **La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
- $\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ car $\ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$.
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable en 1 (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

3. **La fonction $t \mapsto \frac{e^{1-t}-1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[0, 1[$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{e^{1-t}-1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $[0, 1[$.
- $\frac{e^{1-t}-1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ car $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable en 1 (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

 Remarque 2.38 – Important

Les théorèmes de comparaison s'utilisent aussi par contraposée : si f n'est pas intégrable, alors g n'est pas intégrable.

 Exemple 2.13

1. **La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t) \times \cos(t)}$ n'est pas intégrable sur $[0, 1[$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t) \times \cos(t)}$ est continue sur $[0, 1[$.
- $\frac{1}{1-t} \underset{t \rightarrow 1}{=} O\left(\frac{1}{(1-t) \times \cos(t)}\right)$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable en 1 (intégrale de Riemann avec $1 \geq 1$).

2. **La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ n'est pas intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
- $\frac{1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{-1}{1-t}$ car $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.
- la fonction $t \mapsto \frac{-1}{1-t}$ n'est pas intégrable en 1 (intégrale de Riemann avec $1 \geq 1$).

3. **La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t) \times \ln(t)}$ n'est pas intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t) \times \ln(t)}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
- $\frac{1}{1-t} \underset{t \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{1}{(1-t) \times \ln(t)}\right)$ car $\ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$.
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable en 1. (intégrale de Riemann avec $1 \geq 1$)

Cas où $I =]a, b]$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$

 **Remarque 2.39 – Réécriture des relations de comparaison à l'aide de quantificateurs lorsque $I =]a, b]$ et $x_0 = a$**

Soient f et g deux fonctions définies sur I . On suppose que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a .

► $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} O(g(t))$ est équivalent à :

$$\exists M \geq 0, \exists \eta > 0, \forall t \in]a, a + \eta], |f(t)| \leq M \times |g(t)|.$$

► $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} o(g(t))$ est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in]a, a + \eta], |f(t)| \leq \varepsilon \times |g(t)|.$$

 Théorème 2.27 – Théorème de comparaison avec $I =]a, b]$

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$.

- Si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $]a, b]$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $]a, b]$.
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} o(g(t))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $]a, b]$.
- Si $f(x) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $]a, b]$.

Démonstration

Même raisonnement que le théorème 2.24 page 42.

□

 Exemple 2.14

1. **La fonction $t \mapsto \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$.
- $\frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

2. **La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$.
- par croissances comparées, $\ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

3. **La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1]$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}$ est continue sur $]0, 1]$.
- $\frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t}}$ car $1 - \cos(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

 Remarque 2.40 – Important

Les théorèmes de comparaison s'utilisent aussi par contraposée : si f n'est pas intégrable, alors g n'est pas intégrable.

 Exemple 2.15

1. **La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \times (2 + \sin(\frac{1}{t}))}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \times (2 + \sin(\frac{1}{t}))}$ est continue sur $]0, 1]$.
- $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{t \times (2 + \sin(\frac{1}{t}))}\right)$.
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 (intégrale de Riemann avec $1 \geq 1$).

2. **La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $]0, 1]$.
- $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)$ car $\ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\infty$.
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 (intégrale de Riemann avec $1 \geq 1$).

3. **La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.**

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, 1]$.
- $\frac{\sin(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$ car $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$.
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 (intégrale de Riemann avec $1 \geq 1$).

Exercice 2.22 – Intégrales de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que la fonction $f_{\alpha, \beta} : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \times (|\ln(t)|)^\beta}$ est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ si, et seulement si, $\begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$

Résolution

La fonction $f_{\alpha, \beta}$ est positive sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, donc la convergence de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f_{\alpha, \beta}(t) dt$ équivaut à l'intégrabilité de $f_{\alpha, \beta}$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

► Cas 1 : $\alpha > 1$. On a

- La fonction $f_{\alpha, \beta}$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.
- Par croissances comparées, on a : $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(f_{\alpha, \beta}(t))$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 (intégrale de Riemann sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$).

Par théorème de comparaison, la fonction $f_{\alpha, \beta}$ n'est pas intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

► Cas 2 : $\alpha < 1$. On a

- La fonction $f_{\alpha, \beta}$ est continue sur $[2, +\infty[$.
- Soit $\gamma \in]\alpha, 1[$ (par exemple, $\gamma = \frac{\alpha+1}{2}$). Alors, par croissances comparées, on a : $f_{\alpha, \beta}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est intégrable en 0 (intégrale de Riemann sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ avec $\gamma < 1$).

Par théorème de comparaison, $f_{\alpha, \beta}$ est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

► Cas 3 : $\alpha = 1$. Soit $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. On applique le changement de variables $u = -\ln(t)$, $du = -\frac{1}{t} dt$ (la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]x, \frac{1}{2}\right]$). D'où,

$$\int_x^{\frac{1}{2}} f_{\alpha, \beta}(t) dt = - \int_{-\ln(x)}^{\ln(2)} \frac{1}{u^\beta} du = \int_{\ln(2)}^{-\ln(x)} \frac{1}{u^\beta} du.$$

Or, $-\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, donc on reconnaît une intégrale de Riemann sur $[\ln(2), +\infty[$ qui converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Ainsi,

$$\text{La fonction } f_{\alpha, \beta} : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \times (|\ln(t)|)^\beta} \text{ est intégrable sur } \left]0, \frac{1}{2}\right] \text{ si, et seulement si, } \begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$$

Cas où $I =]a, b[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$

Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction sur $]a, b[$, on fixe $c \in]a, b[$ et on applique les théorèmes de comparaison sur $]a, c]$ et $[c, b[$.

Exemple 2.16

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} \times (1-t)}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

En effet,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} \times (1-t)}$ est continue sur $]0, 1[$.
- $\frac{1}{\sqrt{t} \times (1-t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

- $\frac{1}{\sqrt{t \times (1-t)}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable en 1 (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$).

VI. Changement de variable et intégration par parties

VI.1. Changement de variable

Théorème 2.28 – Changement de variable

Soient $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ de $] \alpha, \beta[$ sur $]a, b[$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

► Alors les intégrales

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du$$

sont de même natures.

► Si ces intégrales convergent et,

- si φ est strictement croissante, alors,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du;$$

- si φ est strictement décroissante, alors,

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du.$$

Démonstration

Démonstration dans le cas où φ est strictement croissante.

► On suppose que $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Soit $c \in]\alpha, \beta[$.

- On sait que l'intégrale, $\int_{\varphi(c)}^y f(t) dt$ converge. De plus, en appliquant le théorème 2.6 page 20, on a : pour tout $y \in]\alpha, \beta[$

$$\int_c^y (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t) dt.$$

Or, φ est strictement croissante, donc $\varphi(y) \xrightarrow{y \rightarrow \beta} b$. On en déduit que l'intégrale $\int_c^\beta (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du$ converge et

$$\int_c^\beta (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du = \int_{\varphi(c)}^b f(t) dt.$$

- De même, l'intégrale $\int_a^{\varphi(c)} f(t) dt$ converge et on a : pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,

$$\int_x^c (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(c)} f(t) dt$$

Or, $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} a$. Donc, l'intégrale $\int_\alpha^c (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du$ converge et

$$\int_\alpha^c (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du = \int_a^{\varphi(c)} f(t) dt.$$

Ainsi, $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du$ converge et

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du = \int_a^b f(t) dt.$$

► On suppose que $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du$ converge.

Soit $c \in]a, b[$.

- On sait que l'intégrale, $\int_{\varphi^{-1}(c)}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du$ converge. De plus, en appliquant le théorème 2.6 page 20, on a : pour tout $y \in]a, b[$

$$\int_c^y f(t) dt = \int_{\varphi(\varphi^{-1}(c))}^{\varphi(\varphi^{-1}(y))} f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(y)} (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du.$$

Or, φ est strictement croissante, donc $\varphi^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \beta$. On en déduit que l'intégrale $\int_c^b f(t) dt$ converge et

$$\int_c^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du.$$

- De même, l'intégrale $\int_{\alpha}^{\varphi^{-1}(c)} (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du$ converge et on a : pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,

$$\int_x^c f(t) dt = \int_{\varphi(\varphi^{-1}(x))}^{\varphi(\varphi^{-1}(c))} f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(x)}^{\varphi^{-1}(c)} (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du.$$

Or, $\varphi^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha$. Donc, l'intégrale $\int_a^c f(t) dt$ converge et

$$\int_a^c f(t) dt = \int_{\alpha}^{\varphi^{-1}(c)} (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du$$

Ainsi, $\int_a^b f(t) dt$ converge et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du.$$

Démonstration dans le cas où φ est strictement décroissante.

Dans ce cas, les justifications de convergence des différentes intégrales sont les mêmes. Par contre, dans ce cas, on a $\varphi(y) \xrightarrow{y \rightarrow \beta} a$ et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} b$. Donc,

$$\int_c^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du = \int_{\varphi(c)}^a f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{\alpha}^c (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du = \int_b^{\varphi(c)} f(t) dt.$$

Donc,

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u) du = \int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

□

Remarque 2.41

Si f est une fonction intégrable sur $]a, b]$ ou $[a, b[$, alors f est intégrable sur $]a, b[$ (voir remarque 2.24 page 34) et on peut appliquer la formule de changement de variables.

Exemple 2.17

On considère l'intégrale

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(u)^2} du$$

► I est l'intégrale de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1 + \cos(u)^2}$ qui est continue sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

► Pour calculer I , on utilise le changement de variable $u = \text{Arctan}(t)$ (pour cela, on applique la formule de changement de variable à l'intégrale généralisée $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(u)^2} du$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$).

La fonction $\varphi = \text{Arctan}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $] -\infty, +\infty[$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc, en

utilisant que $1 + \tan(u)^2 = \frac{1}{\cos(u)^2}$, puis la formule de changement de variable, on a :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \tan(u)^2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + t^2}} \times \frac{1}{1 + t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2 + t^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \times \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_{-A}^A = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

VI.2. Intégration par parties

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Théorème 2.29 – Intégration par parties

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

On suppose que le produit $u \times v$ possède des limites finies en a et en b .

Alors, les intégrales $\int_a^b u(t) \times v'(t) dt$ et $\int_a^b u'(t) \times v(t) dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :

$$\int_a^b u(t) \times v'(t) dt = [u(t) \times v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) \times v(t) dt,$$

où $[u(t) \times v(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b} u(t) \times v(t) - \lim_{t \rightarrow a} u(t) \times v(t)$.

Démonstration

Soit $c \in]a, b[$, $x \in]a, c]$ et $y \in [c, b]$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur les segments $[x, c]$ et $[c, y]$. En appliquant la formule d'intégration par parties sur un segment, on a :

$$\int_x^c u(t) \times v'(t) dt = [u(t) \times v(t)]_x^c - \int_x^c u'(t) \times v(t) dt = u(c) \times v(c) - u(x) \times v(x) - \int_x^c u'(t) \times v(t) dt,$$

et

$$\int_c^y u(t) \times v'(t) dt = [u(t) \times v(t)]_c^y - \int_c^y u'(t) \times v(t) dt = u(y) \times v(y) - u(c) \times v(c) - \int_c^y u'(t) \times v(t) dt.$$

Or, le produit $u \times v$ possède des limites finies en a et en b .

Donc, $\int_x^c u(t) \times v'(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers a et $\int_c^y u(t) \times v'(t) dt$ admet une limite finie quand y tend vers b si, et seulement si, $\int_x^c u'(t) \times v(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers a et $\int_c^y u'(t) \times v(t) dt$ admet une limite finie quand y tend vers b . On en déduit que les intégrales $\int_a^b u(t) \times v'(t) dt$ et $\int_a^b u'(t) \times v(t) dt$ sont de même nature et :

$$\begin{aligned} \int_a^b u(t) \times v'(t) dt &= \int_a^c u(t) \times v'(t) dt + \int_c^b u(t) \times v'(t) dt \\ &= u(c) \times v(c) - \lim_{x \rightarrow a} u(x) \times v(x) - \int_a^c u'(t) \times v(t) dt + \lim_{y \rightarrow b} u(y) \times v(y) - u(c) \times v(c) - \int_c^b u'(t) \times v(t) dt \\ &= \lim_{y \rightarrow b} u(y) \times v(y) - \lim_{x \rightarrow a} u(x) \times v(x) - \int_a^b u'(t) \times v(t) dt. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.42

► Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, l'existence d'une limite finie en a du produit $u \times v$ est claire et on a :

$$[u(t) \times v(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b} u(t) \times v(t) - u(a) \times v(a).$$

► De même, si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$, l'existence d'une limite finie en b du produit $u \times v$ est claire et on a :

$$[u(t) \times v(t)]_a^b = u(b) \times v(b) - \lim_{t \rightarrow a} u(t) \times v(t).$$

💡 Exemple 2.18 – La fonction Γ d'Euler

Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$, on pose :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \times e^{-t} dt,$$

où $t^{s-1} = e^{(s-1) \times \ln(t)}$. On note $\mathcal{H} = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 0\}$.

► **La fonction Γ est bien définie sur $\mathcal{H}$.**

Soit $s \in \mathcal{H}$ fixé.

La fonction $t \mapsto t^{s-1} \times e^{-t}$ est continue, donc continue par morceaux, sur $]0, +\infty[$.

De plus, on a :

$$|t^{s-1} \times e^{-t}| = |e^{(s-1) \times \ln(t) - t}| = e^{(\operatorname{Re}(s)-1) \times \ln(t) - t} \times |e^{i \operatorname{Im}(s) \times \ln(t)}| = e^{(\operatorname{Re}(s)-1) \times \ln(t) - t} = t^{\operatorname{Re}(s)-1} \times e^{-t}.$$

D'où,

- $|t^{s-1} \times e^{-t}| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\operatorname{Re}(s)}}$. Comme $1 - \operatorname{Re}(s) < 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\operatorname{Re}(s)}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann).
- $|t^{s-1} \times e^{-t}| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée. Comme $2 > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann).

Par les théorèmes de comparaison, $t \mapsto t^{s-1} \times e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$. Donc, $\Gamma(s)$ existe.

► **Montrons que pour tout $s \in \mathcal{H}$, on a : $\Gamma(s+1) = s \times \Gamma(s)$.**

Posons $f(t) = t^s$ et $g(t) = -e^{-t}$. Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus,

- $|f(t) \times g(t)| = t^{\operatorname{Re}(s)} \times e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ car $\operatorname{Re}(s) > 0$.
- $|f(t) \times g(t)| = t^{\operatorname{Re}(s)} \times e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \times g'(t) dt$ converge.

On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \times g'(t) dt = [f(t) \times g(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f'(t) \times g(t) dt = 0 - \int_0^{+\infty} s \times t^{s-1} \times (-e^{-t}) dt = s \times \Gamma(s).$$

► **Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$.**

On procède par récurrence sur n .

Initialisation. On a : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ (le calcul est à savoir faire rapidement en suivant la démonstration du théorème 2.8 page 23).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\Gamma(n) = (n-1)!$ et on montre que $\Gamma(n+1) = n!$.

Par le point précédent, on a : $\Gamma(n+1) = n \times \Gamma(n)$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a $\Gamma(n+1) = n \times (n-1)! = n!$.

Ce qui achève la récurrence.

VII. Annexes

VII.1. Testons l'IA sur ce chapitre

Énoncé

Calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Solution proposée par l'IA

On introduit, pour $a > 0$,

$$f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

En dérivant sous le signe intégral (justifié par convergence dominée) :

$$f'(a) = \frac{d}{da} \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{\sin(t)}{t} dt = - \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(t) dt.$$

On sait que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(t) dt = \frac{1}{a^2 + 1}, \quad (a > 0),$$

donc

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2 + 1}.$$

En intégrant :

$$f(a) = -\operatorname{Arctan}(a) + C.$$

Pour déterminer C , on fait tendre $a \rightarrow +\infty$. Alors $f(a) \rightarrow 0$, tandis que $\operatorname{Arctan}(a) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Donc

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi

$$f(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(a).$$

En prenant la limite quand $a \rightarrow 0^+$, on obtient :

$$I = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$



Exercice 2.23

L'idée proposée par l'IA est intéressante, il s'agit en fait de la méthode utilisée dans le TD.

Cependant, des théorèmes sont utilisés sans justification à trois reprises, à vous de trouver où et de vérifier les hypothèses.

VII.2. À la fin de ce chapitre,...

1. ... je sais primitiver les fonctions usuelles et reconnaître la dérivée d'une composée ;
2. ... je sais faire la différence entre « intégrale convergente » et « fonction intégrable » ;
3. ... je sais appliquer un changement de variable ;
4. ... je sais intégrer par parties (et vérifier les hypothèses) ;
5. ... je connais les intégrales de référence ;
6. ... je sais appliquer les relations de comparaison ;