

Moments d'une variable aléatoire

Feuille d'exercices #11

Partie A – Espérance, variance et covariance

★ **Exercice 1** — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Déterminer λ puis prouver que $X \in L^1$. Calculer $\mathbf{E}(X)$.
2. La variable X admet-elle une variance ?

★ **Exercice 2** — Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, on considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $1/(X+1)$.

★★ **Exercice 3** — Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et Y la variable aléatoire définie par $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer la loi de Y puis montrer que $\mathbf{E}(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

★★ **Exercice 4** — Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p . On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ et $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Calculer $\mathbf{E}(Y_n)$ puis donner un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

★ **Exercice 5** — Soient X_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $Z_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(\exp(itZ_\lambda))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

★ **Exercice 6** — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de variables aléatoires réelles discrètes centrées réduites i.i.d. et M la matrice $(X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. On pose $D = \det(M)$. Calculer $\mathbf{E}(D)$ et $\mathbf{V}(D)$.

★★ **Exercice 7** — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une famille $(X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de variables aléatoires réelles d'espérances finies i.i.d. et la matrice $M = (X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la valeur de $\mathbf{E}(\chi_M(\lambda))$.

★ **Exercice 8** — Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs entières telles que, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X = m, Y = n) = p^2 q^{m+n}$.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Calculer $\mathbf{E}(X + Y)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(X \leq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.
3. Donner la loi de U et calculer son espérance.
4. Calculer $\mathbf{E}(|X - Y|)$.
5. Déterminer la loi de V .
6. Déterminer la loi de (X, U) et retrouver la loi de U .
7. Déterminer $\mathbf{P}(X + Y = m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.

★ **Exercice 9** — On considère une succession de n épreuves indépendantes, conduisant chacune à k résultats possibles notés $r_1, \dots, r_k$. Soit p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée. On note, pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1. Montrer que $\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_k) = 0$.
2. Préciser la loi de X_i , son espérance et sa variance pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
3. Donner de même la loi et la variance de la variable $X_i + X_j$.
En déduire $\text{cov}(X_i, X_j)$ pour $i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
4. Retrouver alors le résultat de la première question.

★ **Exercice 10** — *Espérance conditionnelle*

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Si A est un événement non négligeable, on définit, sous réserve d'existence :

$$\mathbf{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x|A)$$

1. Montrer que si X admet une espérance finie, alors $\mathbf{E}(X|A)$ est bien définie.
2. Prouver alors que $\mathbf{E}(X|A) = \frac{\mathbf{E}(\mathbb{1}_A X)}{\mathbf{P}(A)}$.
3. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$, calculer $\mathbf{E}(X|X > m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et si X est d'espérance finie, alors $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) \mathbf{E}(X|A_k)$.

★★ **Exercice 11** — Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et on pose $M = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}, S_n \geq m\}$. On pose $q = 1 - p$.

1. Montrer que M est une variable aléatoire réelle et évaluer $\mathbf{P}(M = +\infty)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(M \geq n) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$.
3. Montrer que $M \in L^1$ puis calculer $\mathbf{E}(M)$.

★ **Exercice 12** — Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telles que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = k)$ est la loi uniforme sur $\llbracket 0, k \rrbracket$.

1. Déterminer la loi de (X, Y) puis la loi de X , en fonction de celle de Y .
2. Calculer l'espérance de X en fonction de celle de Y .

★★ **Exercice 13** — Soit (U, V) un couple de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi binomiale $\mathcal{B}(2, 1/2)$.

1. Déterminer la loi de $S = (U - 1)^2 + (V - 1)^2$ et préciser son écart-type.
2. Soit $T = (U - 1)(V - 1)$. Calculer $\mathbf{E}(S(T - 1))$, déterminer la loi de T et calculer $\text{cov}(S, T)$.
3. Les variables S et T sont-elles indépendantes?

★★ **Exercice 14** — *Nombre de points fixes d'une permutation*

On munit l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de la probabilité uniforme. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $N(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k(\sigma) = 1$ si k est un point fixe de σ , 0 sinon.

1. Donner l'espérance et la variance de X_k .
2. Calculer $\text{cov}(X_i, X_j)$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
3. Exprimer N en fonction des variables X_k et calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

★★ **Exercice 15** — Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes, X_n suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/n$. Soit $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*; X_n = 1, X_{n+1} = 0\}$.

1. Déterminer la loi de T puis calculer $\mathbf{E}(T)$ et $\mathbf{V}(T)$.
2. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(T = n | X_k = 1)$.

★★ **Exercice 16** — Soit $X \in L^2$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X < k)$. Montrer que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

★★ **Exercice 17** — Une grenouille monte les $2n$ marches d'un escalier en sautant de façon équiprobable une marche ou deux. On note X_n le nombre de marches franchies après n sauts et Y_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche.

1. Donner la loi de Y_n . En déduire la loi de X_n , son espérance et sa variance.
2. On note Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n -ième marche. Exprimer la probabilité $\mathbf{P}(Z_n = k)$ pour $n > 1$ et $k \geq 1$. En déduire que $\mathbf{E}(Z_n) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{E}(Z_{n-1}) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{E}(Z_{n-2}) + 1$.
3. Trouver a pour que la suite de terme général $u_n = \mathbf{E}(Z_n) - na$ soit récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire $\mathbf{E}(Z_n)$ et un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$.

★★ **Exercice 18** — Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ identiquement distribuées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le cardinal de $\{X_k; 1 \leq k \leq n\}$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(R_n) \leq a + n \mathbf{P}(X_1 \geq a)$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(R_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$.

★ **Exercice 19** — Soient X une variable aléatoire à valeurs entières d'espérance finie et une suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions converge simplement vers f sur $\mathbb{N}$ et qu'il existe $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $h(X) \in L^1$ et pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $|f_n(k)| \leq h(k)$.

Montrer que $f(X)$ est d'espérance finie et que $\mathbf{E}(f_n(X)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(f(X))$.

★★ **Exercice 20** — Soient $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. telle que $X_n \sim \mathcal{G}(\lambda/n)$.

1. Calculer, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n/n \leq x)$.
2. Déterminer f telle que pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
3. Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{E}(X_n)}{n}$ et $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{E}(X_n^2)}{n^2}$ et $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$.
4. Soit Y une v.a. réelle telle que $\mathbf{P}(Y = k) = F(k+1) - F(k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{E}(Y^2)$.

★★ **Exercice 21** — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et une suite $(A_k) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \mathbf{P}(A_k)$ converge. On pose $X = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_k}$ et $X_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{A_k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire et en déduire que X est une variable aléatoire.
2. Montrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^n \mathbf{P}(X_k > p) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_j)$.
3. En déduire que X est d'espérance finie et calculer $\mathbf{E}(X)$.

★★★ **Exercice 22** — *Théorème de convergence monotone (Beppo Levi)*
Soit une variable aléatoire X et une suite de variables aléatoires (X_n) , toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles positives.

1. À l'aide de la variable $[X]$, montrer que $0 \leq \mathbf{E}(X) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)$.
2. On suppose que X_0 est d'espérance finie et que pour tout $\omega \in \Omega$, $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle.
Au moyen d'un découpage judicieux, montrer que $\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$.
Montrer que X est d'espérance finie et que $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}(X_n)$.

★★★ **Exercice 23** — On considère une variable aléatoire X et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que :

- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X = k)$;
- il existe $Y \in L^1$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \leq Y$.

Montrer que X est d'espérance finie puis prouver que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X_n)| \leq \sum_{k=-p}^p |k| \cdot |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X = k)| + 2 \sum_{k=p+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(Y = k)$$

En déduire que $\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X)$.

⊗ Partie B – Fonctions génératrices et moments d'ordre supérieur

★ **Exercice 24** — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est définie par $g_X(s) = \frac{s}{2-s^2}$ pour tout $s \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

1. Déterminer la loi de X .
2. Reconnaître la loi de $Y = \frac{X+1}{2}$ et en déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

★ **Exercice 25** — Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = ak^2 \frac{\lambda^k}{k!}$, où $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Sous réserve d'existence, quelle est la fonction génératrice associée à X ?
2. En déduire la valeur de a puis l'espérance de X .

★★ **Exercice 26** — On lance indéfiniment une pièce équilibrée, et on note T la variable aléatoire égale au rang de la première apparition du motif PF.

1. Déterminer la loi de T .
2. Déterminer la fonction génératrice de T .
3. Calculer l'espérance et la variance de T .

★★ **Exercice 27** — *Loi de Pascal*

1. Calculer $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-r}$ pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$.
2. On dispose d'une urne remplie de boules blanches et rouges. On procède à une infinité de tirages indépendants avec remise. On tire une boule blanche avec la probabilité p . Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et X le temps d'apparition de la k -ième boule blanche. Donner la loi de X , sa fonction génératrice, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

★★ **Exercice 28** — Soient $n \geq 1$ et $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket n, +\infty \rrbracket$ vérifiant, pour tout $k \geq n$, $\mathbf{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ et une famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de variables i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p .

1. À l'aide d'une fonction génératrice, donner la loi de $Y = X_1 + \dots + X_n$.
2. En déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

★ **Exercice 29** — Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et sont indépendantes. X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose $Z = XY$ et on note g_X , g_Y et g_Z les fonctions génératrices de ces variables aléatoires.

1. Donner la fonction génératrice de Y .
2. Démontrer que $g_Z = g_Y \circ g_X$. En déduire $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{V}(Z)$.

★★ **Exercice 30** — *Marche aléatoire et probabilité de retour à l'origine*

Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Une particule, initialement en 0, se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$. Elle a à chaque instant une probabilité p d'aller à droite et q d'aller à gauche. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note b_n la probabilité d'être pour la première fois de retour en 0 à l'instant n .

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} p^n q^n$ diverge si, et seulement si, $p = q = \frac{1}{2}$.
2. Soient $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et $g : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n t^n$.
 - a) Prouver que f et g sont définies sur $[0, 1[$.
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$.
 - c) En déduire que pour tout $t \in [0, 1[$, $f(t) = 1 + f(t)g(t)$.
3. Exprimer a_{2n} et a_{2n+1} en fonction de p , q et n . En déduire que pour tout $t \in [0, 1[$, $f(t) = (1 - 4pq t^2)^{-1/2}$ puis exprimer $g(t)$.
4. Montrer que la probabilité de retour à l'origine vaut $1 - |p - q|$.

★ **Exercice 31** — *Fonction caractéristique*

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit sa fonction caractéristique ϕ_X par $\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX})$.

1. Montrer que la fonction ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique.
2. Calculer ϕ_X pour : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\phi_X = \phi_Y$.
En calculant $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(t) e^{-ikt} dt$, prouver que X et Y ont même loi.
4. On suppose X d'espérance finie. Montrer que ϕ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\phi'_X(0)$. Donner le DL₁(0) de $\phi_X(t)$.

★ **Exercice 32** — *Urnes d'Ehrenfest*

Soient deux urnes A et B comportant r boules pour la 1^{ère} et $2n - r$ pour la 2^{nde}. Un tirage consiste à choisir aléatoirement une boule et à la déplacer dans l'autre urne. On note X_k le nombre de boules contenues dans l'urne A à l'issue de k tirages.

1. Donner la loi de X_1 , son espérance et sa variance.
2. Exprimer une relation entre les lois de X_{k+1} et X_k .
3. On note G_k la fonction génératrice de la variable X_k .
Prouver que $G_{k+1}(t) = tG_k(t) + \frac{1-t^2}{2n} G'_k(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_k)$ et interpréter.

★★ **Exercice 33** — *Formule de Wald*

Soient N une v.a.r. et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. identiquement distribuées, toutes supposées indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérances finies.

On pose $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$.

1. Montrer que S_N est une variable aléatoire discrète.
2. Montrer que $\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N) \cdot \mathbf{E}(X_1)$.
3. Prouver que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$ où l'on note G_X la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs entières; retrouver le résultat précédent.
4. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$. On pose $T_N = N - S_N$.
 - a) Si N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, quelle loi suit S_N ? Prouver l'indépendance de S_N et T_N .
 - b) Réciproquement, montrer que si S_N et T_N sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson.

★★★ **Exercice 34** — *Transformée de Laplace d'une variable aléatoire*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle transformée de Laplace de X l'application $L_X : t \mapsto \mathbf{E}(e^{tX})$.

1. On suppose dans cette question que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Calculer $L_X(t)$.
2. On suppose que la fonction L_X est définie sur un intervalle $I =]-a, a[$. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(X^n) = L_X^{(n)}(0)$$

⊗ Partie C – Inégalités probabilistes et convergence

★ **Exercice 35** — Une pièce truquée donne *pile* avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On la lance n fois et on note F_n la fréquence d'obtention d'un *pile*.

1. Montrer que $V(F_n) \leq \frac{1}{4n}$.
2. Donner une condition suffisante sur n pour que $P(|F_n - p| \geq 10^{-2}) \leq 0,05$.

★ **Exercice 36** — Soit X une variable aléatoire réelle centrée admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $E(|X|) \leq \sqrt{V(X)}$.

★ **Exercice 37** — Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

★ **Exercice 38** — Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi et à valeurs strictement positives. Montrer que $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.

★★ **Exercice 39** — Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ pour $n \geq 1$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n .
2. Calculer la variance de Z_n .
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

★ **Exercice 40** —

1. Soit X une variable aléatoire réelle et bornée.
Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P(X \geq a) \leq \inf_{t > 0} \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

2. Soient $p \in]0, 1[$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Que devient l'inégalité pour $a = \alpha n$?

★ **Exercice 41** — *Inégalité de Jensen*

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, de dérivée croissante et X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que X et $f(X)$ admettent une espérance.

1. Montrer que pour tout réel x , $f(x) \geq f'(E(X))(x - E(X)) + f(E(X))$.
2. En déduire que $E(f(X)) \geq f(E(X))$.

★★ **Exercice 42** — *Inégalité de Chernov et marche aléatoire symétrique*

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes, suivant toutes la loi de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $E(e^{tS_n}) = \text{ch}^n(t)$ puis que $E(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right) \quad \text{puis} \quad P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{2}\right)$$

3. Montrer enfin que $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{2}\right)$.

Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

★★ **Exercice 43** —

1. Soit X une variable aléatoire discrète centrée telle que $|X| \leq 1$.
 - a) Prouver que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$, $e^{tx} \leq (1+x)\frac{e^t}{2} + (1-x)\frac{e^{-t}}{2}$.
 - b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tX} \in L^1$ puis que $E(e^{tX}) \leq \text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.
2. Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de variables centrées, indépendantes et bornées.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et on note $\lambda_k = \|X_k\|_\infty$, ainsi que $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$.
 - a) Montrer que $E(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\Lambda \frac{t^2}{2}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 - b) En déduire que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$:

$$P(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\varepsilon t + \Lambda \frac{t^2}{2}\right) \quad \text{puis} \quad P(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\Lambda}\right)$$

★★ **Exercice 44** — *Théorème d'approximation de Weierstrass*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la même loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0, 1]$. On note également :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n; \quad Z_n = \frac{S_n}{n} \quad \text{et} \quad B_n(f)(x) = \mathbf{E}(f(Z_n))$$

1. Rappeler, sans démonstration, la loi de S_n . En déduire $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbf{P}(|S_n - nx| \geq n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

3. Justifier alors que $B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right)$.
4. En déduire que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

★★ **Exercice 45** — *Loi forte des grands nombres pour des lois de Poisson*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbf{P}(S_n \geq n(\lambda + \varepsilon)) \leq e^{-n\alpha}$.
On appliquera l'inégalité de Markov à la variable e^{tS_n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Prouver l'existence de $C, \delta > 0$ tels que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq Ce^{-n\delta}$.

En déduire la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geq \varepsilon\right)$.

★★★ **Exercice 46** — *Loi forte des grands nombres dans le cas L^4*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs réelles.

On suppose que les variables admettent un moment d'ordre 4.

1. Montrer que $m = \mathbf{E}(X_1)$ et $V_4 = \mathbf{E}((X_1 - m)^4)$ sont bien définies.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{3V_4}{\varepsilon^4 n^2}$.

★★★ **Exercice 47** — *Loi forte des grands nombres pour des lois de Bernoulli*

1. Démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire réelle.
2. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var. aléatoires i.i.d. selon la loi de Rademacher.

On note $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer de deux manières $\mathbf{E}(S_n^4)$.

3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. selon la loi $\mathcal{B}(1/2)$.

On pose $S'_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $\left(\frac{S'_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers $1/2$,

c'est-à-dire que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S'_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$.