

Mathématiques
Devoir surveillé n°5
Janvier 2026

Durée de l'épreuve : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)},$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

2. Pour $x \in D$, calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.
3. (a) Dresser le tableau de variations de f sur D en le complétant par les limites de f aux bornes de D .
(b) Montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $[e, +\infty[$.
4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x , pour $x \in D$.
(b) Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in D$.
5. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e$.
(b) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
(c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e.$$

6. (a) Montrer que

$$\forall x \in [e, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)} \right)^2.$$

- (b) En déduire que

$$\forall x \in [e, +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

7. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|.$$

- (b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leq \left(\frac{1}{4} \right)^n.$$

- (c) Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2.

On considère les matrices carrées d'ordre trois :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction de A

1. Déterminer si A est inversible.
2. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation suivante d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$(*) \quad M^2 = A.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $N = P^{-1}M P$. (La matrice P^{-1} a été définie en **I.2.**)

1. Montrer l'équivalence suivante

$$M^2 = A \quad \Longleftrightarrow \quad N^2 = D.$$

2. Montrer que, si $N^2 = D$, alors $N D = D N$.
3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.
4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.
5. En déduire la solution B de l'équation $(*)$ tel que $P^{-1}BP$ soit une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux positifs ou nuls.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$

2. En déduire :

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B. \quad (\text{La matrice } B \text{ a été définie en } \mathbf{II.5.})$$

3. Montrer que pour tout $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a

$$A F = F A \quad \Longleftrightarrow \quad B F = F B.$$

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque

$${}^tMM = M{}^tM = I_n.$$

Autrement dit, M est orthogonale si et seulement si M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Introduction : quelques exemples

1. Vérifier que la matrice $M = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est orthogonale.
2. Donner une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I : le cas particulier $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on se donne

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que
$$a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = d^2 + c^2 = d^2 + b^2 = 1 \quad \text{et} \quad ac + bd = 0.$$
2. Supposons que $a = 0$. Montrer que M est l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Supposons que $a \neq 0$.
 - (a) Montrer que la fonction $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
 - (b) En déduire qu'il existe $\alpha \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ tel que

$$a = \cos(\alpha).$$

- (c) Montrer qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ tel que

$$a = \cos(\theta) \text{ et } c = \sin(\theta).$$

- (d) En déduire qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

4. Réciproquement, soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Vérifier que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}).$$

Partie II : généralités sur les matrices orthogonales

1. (a) Vérifier que, si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour tout

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

on appelle norme de X le réel positif

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\|X\| = 0$ si et seulement si $X = 0_{n,1}$.
- (b) i. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. À quel ensemble appartient tXX ?
ii. En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, justifier que si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\|X\|^2 = {}^tXX.$$

(c) En déduire que si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\|AX\| = \|X\|.$$

Dans la suite de l'exercice, on notera, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $[M]_{i,j}$ le coefficient de la matrice M situé à la ligne i et à la colonne j .

3. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: que vaut $[A^t A]_{i,i}$? En déduire que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{k=1}^n [A]_{i,k}^2 = 1.$$

(b) En déduire que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$|[A]_{i,j}| \leq 1.$$

4. Notons $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, sur chaque ligne et chaque colonne de M , se trouve un et un seul coefficient non nul, qui vaut 1 ou -1 .

(a) Donner un exemple d'une matrice de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ qui n'est pas I_4 .

(b) Soient $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Calculer $[{}^t M M]_{i,j}$.

(c) En déduire que les matrices de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ sont les seules matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont entiers.