BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

Le sujet est constitué de quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère :

- les points de l'espace $A(1; 0; 3)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; 1; 1)$ et $H(0; 2; 1)$;
- le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan de l'espace.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

4. Vérifier que le point H appartient au plan (ABC).

5. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAH}$.

6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point H.

7. Déterminer les coordonnées du point $S(x_S; y_S; z_S)$ de la droite (d) tel que :
    - la distance entre le point S et le plan (ABC) est 6 ;
    - son abscisse x_S est positive.

Exercice 2 (4 points)

Parmi les habitants âgés d'au moins 15 ans vivant en France, on compte :

- 21 % de personnes de 15 à 29 ans ;
- 46 % de personnes de 30 à 59 ans ;
- 33 % de personnes d'au moins 60 ans.

On s'intéresse à l'utilisation d'un réseau social par les habitants âgés d'au moins 15 ans vivant en France. On a ainsi pu observer que :

- 70 % des personnes de 15 à 29 ans ont déjà publié sur ce réseau social ;
- 46 % des personnes de 30 à 59 ans ont déjà publié sur ce réseau social ;
- 15 % des personnes d'au moins 60 ans ont déjà publié sur ce réseau social.

On interroge une personne âgée d'au moins 15 ans vivant en France et on lui demande si elle a déjà publié sur ce réseau social.

On note :

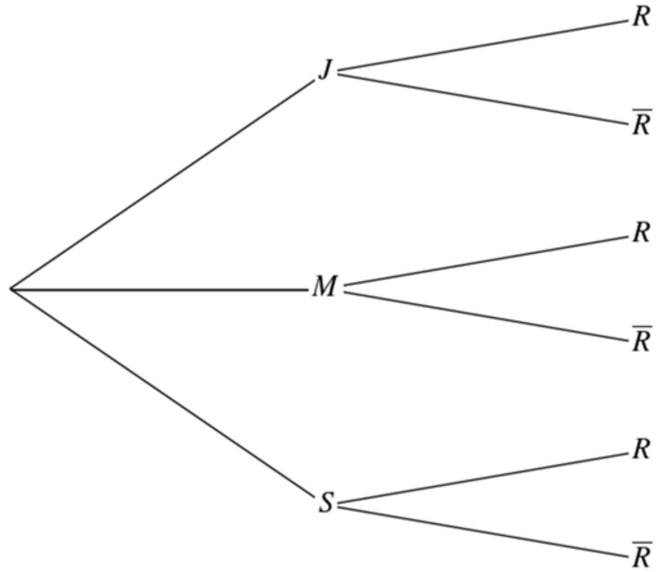
- J l'événement : « la personne interrogée a entre 15 et 29 ans » ;
- M l'événement : « la personne interrogée a entre 30 et 59 ans » ;
- S l'événement : « la personne interrogée a au moins 60 ans » ;
- R l'événement : « la personne interrogée a déjà publié sur ce réseau social ».

On note $\bar{R}$ l'événement contraire de l'événement R.

Dans tout l'exercice, les valeurs approchées seront arrondies au millième.

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité.



2. Déterminer $P(M \cap R)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On interroge au hasard une personne âgée d'au moins 15 ans vivant en France.

   a. Calculer la probabilité qu'elle ait déjà publié sur ce réseau social.
   b. On sait que cette personne a déjà publié sur ce réseau social. Déterminer la probabilité qu'elle ait au moins 60 ans.

Partie B

Au cours d'un sondage, on interroge successivement, au hasard et de manière indépendante, 100 personnes âgées d'au moins 15 ans vivant en France et on leur demande si elles ont déjà publié sur ce réseau social. La population du pays est suffisamment grande pour qu'on assimile le choix des personnes sondées à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes ayant déjà publié sur ce réseau social parmi ces 100 personnes interrogées.
Dans cette partie, on admet que la probabilité qu'une personne âgée d'au moins 15 ans vivant en France ait déjà publié sur ce réseau social est $0{,}41$.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des 100 personnes interrogées ait déjà publié sur ce réseau social.

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On effectue le sondage décrit dans la **partie B** dans 150 villes françaises en respectant les mêmes conditions.

On note $X_1, X_2, \dots, X_{150}$ les variables aléatoires donnant le nombre de personnes ayant déjà publié sur ce réseau social parmi les 100 personnes interrogées dans chacune des 150 villes.

On considère Y la variable aléatoire définie par
$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}}{150}.$$

Démontrer que la probabilité que la variable aléatoire Y soit strictement comprise entre 37 et 45 est strictement supérieure à 98 %.

Exercice 3 (6 points)

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par $f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

   a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2;+\infty[$.
   b. Donner la valeur de α arrondie au centième.
   c. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la **partie A**.

On définit une suite (a_n) par son premier terme $a_0 > 0$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$$

On étudie le cas où $2 \leq a_0 \leq \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $2 \leq a_n \leq \alpha$.

2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.

3. Démontrer que la suite (a_n) converge.

4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α.

Partie C

Dans cette partie, on prend $a_0 = 2$. La suite (a_n) est ainsi définie par $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$.

On note (b_n) la suite définie par $b_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = \ln(3b_n^2 + 2b_n)$.
On admet que la suite (b_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_n \leq b_n$.

2. On considère le script ci-dessous écrit en langage Python.

```
from math import *
def algo(p) :
     a = 2
     b = 10
     n = 0
     while b - a > 10**(-p) :
          a = log(3*a**2 + 2*a)
          b = log(3*b**2 + 2*b)
          n = n + 1
     return (n,a)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande `log(c)` renvoie la valeur de $\ln(c)$;
- la commande `a**2` renvoie la valeur de a^2.

a. Donner les valeurs renvoyées par l'instruction `algo(2)`.
On arrondira si besoin les valeurs au millième.

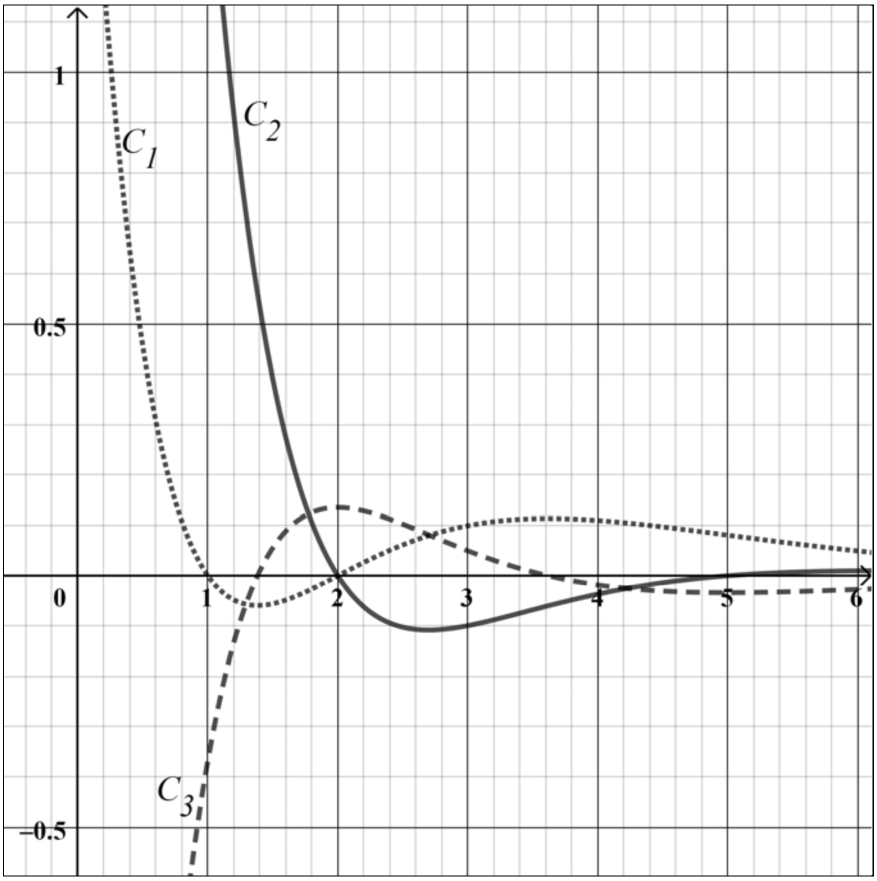
b. Interpréter les valeurs renvoyées dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 (6 points)

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois courbes C_1, C_2 et C_3.

Les courbes correspondent aux représentations graphiques de trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$: une fonction f, sa dérivée f' et sa dérivée seconde f''.



Associer chacune des fonctions f, f' et f'' à sa courbe représentative. *Aucune justification n'est attendue.*

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par $y' + y = (2x - 3)\mathrm{e}^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 2$.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2)$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note I l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que $I = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.
   b. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie D

On considère un réel a.
On note (T_a) la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.

1. Démontrer que le point d'intersection de la tangente (T_a) et de l'axe des ordonnées a pour ordonnée $(a^3 - 4a^2 + 2a + 2)\mathrm{e}^{-a}$.

2. Déterminer le nombre de tangentes à la courbe C_f passant par l'origine du repère.
   Le candidat explicitera les étapes de la démarche utilisée.