

Espaces vectoriels

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] – *Cours* – Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\boxplus$ définie par $a \boxplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe $\bullet$ telle que $\lambda \bullet a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \boxplus, \bullet)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] – *Cours* – On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de la loi interne $\boxplus$ habituelle $+$ et de la loi externe $\bullet$ définie par $\lambda \bullet (x, y) = (\lambda x, 0)$. $(E, \boxplus, \bullet)$ est-il un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ?

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] – *Cours* – Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

1. $(a, b) \boxplus (c, d) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $\lambda \bullet (a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.
2. $(a, b) \boxplus (c, d) = (c, d)$; $\lambda \bullet (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] – *Cours* – Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle :

$$(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}')$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par :

$$(a + ib) \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = (a\vec{x} - b\vec{y}, a\vec{y} + b\vec{x})$$

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. (*Celui-ci est appelé complexifié de E .*)

Sous espaces vectoriels

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] Révision : cas des sous ensembles de $\mathbb{R}^n$. – *Cours* –

Déterminer si les ensembles F ci-dessous sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ d'un eV E que l'on identifiera (avec addition et multiplication classique).

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{R}^*$.
2. $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$
3. $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1 - x_2| = 1\}$.

4. $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 > 0\}$
5. $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 \leq 0\}$
6. $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$.
7. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$.
8. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = 0, x = z\}$;
9. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3\}$.
10. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \geq 0\}$ ☆
11. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^x e^z = 1\}$.
12. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - z = x + y + z = 0\}$
13. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.
14. L'ensemble des solutions (x, y, z) du système : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$
15. L'ensemble des solutions (x, y, z) du système : $\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$
16. L'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(1, 1, 2)$.

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] Cas des sous ensembles de $\mathbb{C}^n$. – *Cours* –

Déterminer si les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ à adapter dans chaque cas) ?

1. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
2. $F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 + 3z_2 = 0\}$.
3. $F = \{\alpha e^{i\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{C} \mid \alpha \geq 0\}$
4. $F = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) = \frac{\pi}{4} [\pi]\}$
5. $F = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) = \frac{\pi}{4} [\pi]\} \cup \{0\}$.

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] – *Cours* – Montrer que les ensemble suivants, où $I = [a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$:

1. $F = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (peut être utilisé dans les exercices)
2. $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$.
3. $F = \{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)dt = 0\}$.

4. F l'ensemble des fonctions f sur I continues, vérifiant

$$2f(a) = f(b) + \int_a^b tf(t) dt.$$

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – *Cours* – Sous-espaces vectoriels de fonctions réelles.

On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Le sous-ensemble de E ci-dessous est-il un sous-espace vectoriel de E ?

1. $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ est bornée}\}$
2. $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires.
3. $\mathcal{H}$ l'ensemble des primitives de $x \mapsto xe^x$.
4. $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = 0\}$
5. $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 1\}$
6. L'ensemble des fonctions croissantes.
7. $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \exists(a, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos(x - \varphi)\}$ ★
8. $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ s'annule en } 0\}$
9. $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ s'annule}\}$
10. L'ensemble des fonctions f telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
11. $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$
12. L'ensemble des fonctions f telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
13. L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant $af'' + bf' + cf = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont fixés.

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – *Cours* – Sous-espaces vectoriels de polynômes.

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)

1. $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] : P'' = 0\}$,
2. $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] : P' = 1\}$,
3. $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] : \deg(P) = n\}$,
4. $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] : P + X^2P'' = 0\}$,
5. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 2.

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – *Cours* – Espaces vectoriels de matrices

Pour tout ensemble E ci-dessous, dire si c'est est un espace vectoriel.

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
2. E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 telles que le coefficient "en haut à gauche" est 1.
3. $E = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & -2\lambda \\ 3\lambda & 2\lambda + \mu \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – *Calculer* –

Pour chaque sous-espace vectoriel A de $\mathbb{K}^3$ ci-dessous, déterminer une équation cartésienne décrivant A :

1. $A = \text{Vect}\{(1, 0, 2); (1, -1, -1)\}$.
2. $A = \text{Vect}\{(3, 1, 1); (1, -1, 1)\}$.
3. $A = \text{Vect}\{(3, 1, 1); (1, -1, 1), (2, 2, 0)\}$.

EXERCICE 12: [Indications] [Correction]

1. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(a + b, a - b, a + 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
 a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
 b) Déterminer une base de $F \cap G$.
2. Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1), (0, 2, -1, 0)\}$.
 a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
 b) Déterminer une base de $F \cap G$.

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – *Cours* –

Trouver une famille génératrice de $\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{cases} x + iz - 2t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \right\}$

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – *Calculer* –

Trouver α et β scalaires pour que $(\alpha, \beta, 4, 1)$ appartienne au sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(2, 1, 3, 1)$ et $(-1, 1, 2, 1)$.

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – *Cours* – Montrer que l'ensemble

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a+c & a-b & a-c \\ a & a-b-2c & a+b \\ a+c & c & a-b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en exhibant une famille génératrice de F .

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Calculer* – *Raisonner* –

On pose $a = (1, 1, 1)$, $b = (0, 2, 1)$, $u = (3, -1, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$. Montrer que $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(u, v)$.

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] – *Cours* –

Montrer que $x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{4})$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $f_1 : x \mapsto \sin x$ et $f_2 : x \mapsto \cos x$.

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] – Cours – Chercher –

Soient f_1, f_2 des éléments de $\mathcal{F}] - 1, 1[, \mathbb{R}$ définis par :

$f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \cos(x)$. On note $\mathcal{E} = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

1. Montrer que les deux applications $g_1 : x \mapsto \cos^2(\frac{x}{2})$ et $g_2 : x \mapsto \sin^2(\frac{x}{2})$ engendrent $\mathcal{E}$.
2. la fonction $x \mapsto \sin(x)$ appartient-elle à $\mathcal{E}$?

Familles libres / liées

EXERCICE 19: [Indications] [Correction] – Cours –

Dire si dans les cas suivants les vecteurs ci-dessous sont linéairement indépendants (et forment une base de $\mathbb{K}^3$) :

1. $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
2. $\vec{a} = (0, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (3, 2, 2)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
3. $\vec{a} = (-1, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, 2, -1)$, $\vec{c} = (i, -1, 1)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
4. $\vec{a} = (-1, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (3, 0, 2)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
5. $\vec{a} = (1, 2, -2)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, 2)$, $\vec{d} = (1, -1, 0)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

EXERCICE 20: [Indications] [Correction] – Cours –

Dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ les applications suivantes sont-elles linéairement indépendantes ?

1. $f : x \mapsto \cos x$, $g : x \mapsto \sin x$, $h : x \mapsto \tan x$ ($I =] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$).
2. $f, g, h, k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \cos x$, $g(x) = x \cos x$, $h(x) = \sin x$ et $k(x) = x \sin x$.
3. $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \cos 2x$, $h : x \mapsto \sin^2 \frac{x}{2}$
4. $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \cos 2x$, $h : x \mapsto \sin^2 x$
5. $f : x \mapsto e^{ax}$, $g : x \mapsto e^{bx}$, $h : x \mapsto e^{cx}$, a,b,c 2 à 2 distincts.
6. $f : x \mapsto \frac{x}{4x^4+1}$, $g : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2+x^2}$, $h : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2+x^2}$ sur le domaine de définition $]1, +\infty[$

EXERCICE 21: [Indications] [Correction] – Cours –

Déterminer si les polynômes ci-dessous sont linéairement indépendants.

1. $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X + 1$, $Q(X) = X^3 - 2X^2 + 8X$
2. $P(X) = X^2 - X + 2$, $Q(X) = X^2 + 8X - 1$, $R(X) = 2X + 3$, $S(X) = 1$
3. $P(X) = (X - 1)(X - 2)$, $Q(X) = X^3 - X + 1$, $R(X) = X + 1$.
4. $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3X + 3$, $Q(X) = 2X^3 + X^2 + X + 2$, $R(X) = -5X^2 + 5X + 4$
5. $P(X) = (X - 1)(X + 3)(X^2 + 1)$, $Q(X) = X^3 + X - 1$, $R(X) = X - 1$.

EXERCICE 22: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

★

1. Montrer que les applications suivantes, définies sur le domaine de définition $]1, +\infty[$, sont liées :

$$f : x \mapsto \arctan \frac{1}{2x^2}, \quad g : x \mapsto \arctan \frac{x}{x-1}, \quad h : x \mapsto \arctan \frac{x+1}{x}$$

2. En déduire une base de l'espace vectoriel $\text{Vect}(f, g, h)$.
3. Que dire de la liberté si le domaine de définition est $]0, 1[$?

★

Bases et changement de bases

EXERCICE 23: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{(2, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $(-4, 1, -3)$ dans la base $\mathcal{B}$.

EXERCICE 24: [Indications] [Correction] – Cours – Déterminer dans chacun des cas si les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ forment une base (notée $\mathcal{B}$) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et si oui,

déterminer les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 25: [Indications] [Correction] – Cours –

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, et en donner une base lorsque c'est possible :

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + 2z = 0\}$.
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = -z\}$.
3. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0; y + z = 0; z + t = 0; t + x = 0\}$.
4. $\text{Vect}\{(1, 2, -3), (1, 2, -3), (-1, 5, 6)\}$
5. $\text{Vect}\{(1, 2, -1), (3, 1, 3), (2, -1, 4)\}$
6. $\text{Vect}\{(4, 1, 3), (2, 0, -2), (4, -5, 8), (1, 1, -1)\}$.
7. $\{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(\sqrt{2}) = 0\}$.
8. l'ensemble des fonctions affines.

EXERCICE 26: [Indications] [Correction] – Calculer –

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = ((1, -2, 2), (1, 2, -1), (3, 1, 1))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}'$.
3. En déduire les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

EXERCICE 27: [Indications] [Correction] - *Calculer* -

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ définie par

$$\begin{cases} u_1 &= 3e_1 - 2e_3 \\ u_2 &= e_1 - e_2 - 2e_3 \\ u_3 &= 2e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

EXERCICE 28: [Indications] [Correction] - *Calculer* -

Soient $P(X) = 2 + X - X^2$, $Q(X) = 2 - X + X^2$, $R(X) = 2 + 2X + X^2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (P, Q, R)$ est une base et déterminer les coordonnées des trois polynômes 1, X , X^2 dans $\mathcal{B}'$.

EXERCICE 29: [Indications] [Correction] - *Cours - Calculer* -

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$

1. Montrer que les polynômes 1, X , $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$ forment une base de E .
2. Quelles sont en fonction de a, b, c, d les coordonnées dans cette base d'un élément de E s'écrivant $aX^3 + bX^2 + cX + d$.

EXERCICE 30: [Indications] [Correction] - *Calculer* -

☆

Soient f, g, h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \cos x - e^x, \quad g(x) = 2x + 2 \cos x + e^x, \quad h(x) = 2x - \cos x + e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (id, \cos, exp)$ est une base de $F = Vect(id, \cos, exp)$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (f, g, h)$ est aussi une base de F .
3. Déterminer les coordonnées de $\cos$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Indications

Exercice 2 [Correction]

On pourra constater que la loi $+$ est la loi habituelle. On pourra donc se demander ce qu'il est véritablement nécessaire d'étudier.

Exercice 3 [Correction]

1. Là encore la loi $+$ est la loi habituelle. Commencer par aller voir les propriétés les plus simples.
2. La loi $\cdot$ est la loi habituelle.

Exercice 8 [Correction]

7. Penser aux formules de trigonométrie.

Exercice 12 [Correction]

1. b) On peut expliciter F et G soit tous 2 à l'aide d'une (ou plusieurs) équation(s) cartésienne(s), soit tous 2 à l'aide d'une expression paramétrique.
2. b) On peut trouver une équation cartésienne pour G ou alors plus rapide ici réutiliser la même technique que dans la question 1 en introduisant un système d'équations paramétriques.

Exercice 17 [Correction]

Penser aux formules de trigo.

Exercice 20 [Correction]

6. Les fonctions ne sont pas indépendantes.

Exercice 22 [Correction]

1. On pourra penser à utiliser des limites pertinentes ainsi qu'à travailler sur les dérivées pour obtenir les éventuels coefficients. On pourra de plus s'intéresser à la dérivée pour montrer l'égalité finale.

Exercice 1

- $(\mathbb{R}_+^*, \boxplus)$ est un groupe commutatif :
 - Loi interne : Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a \boxplus b = ab > 0$.
 - Associativité : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a \boxplus (b \boxplus c) = a(bc) = (ab)c = (a \boxplus b) \boxplus c$.
 - Élément neutre : 1 est l'élément neutre.
 - Symétrique : Le symétrique de a est $\frac{1}{a}$ pour tout $a > 0$.
 - Commutativité : la multiplication est commutative.
- Loi $\bullet$:
 - Loi externe : Ok
 - Élément neutre : ...
 - Distributivité de $+$ par rapport à $\bullet$: $(\lambda + \mu) \bullet a = \dots$
 - Distributivité de $\bullet$ par-rapport à $\boxplus$: $\lambda \bullet (a \boxplus b) = (a \boxplus b)^\lambda = \dots$
 - Distributivité de $\cdot$ par rapport à $\bullet$: ...

Exercice 2

Réponse : Non.

- Groupe commutatif : La loi $+$ est la loi habituelle, il n'y a donc rien à signaler de ce côté là.
- Loi $\bullet$:
 - Loi externe, $\lambda \bullet (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - Élément neutre : $1 \bullet (x, y) = (x, 0) \neq (x, y)$.

Exercice 3

1. Réponse : Non

- Groupe commutatif, RAS.
- Loi $\bullet$:

Il n'y a contradiction avec la propriété du symétrique $(-1) \bullet (a, b)$ pour tout $(a, b) \neq 0$ car

$$(-1) \bullet (a, b) = (a, b) \neq (-a, -b)$$

qui est le symétrique de (a, b) .

2. Réponse : Non

- Commutativité de $\boxplus$: Non.

Exercice 4

- $(E, +)$ est un groupe commutatif car c'est l'addition usuelle. Il n'y a donc rien à dire.

- Montrons les propriétés liées à la multiplication.

★ Clairement, E est stable par multiplication.

★ 1 est neutre : $1.X = (1 + 0.i)(x, y) = (1.x, 1.y) = X$.

★ Associativité de la multiplication :

$$\begin{aligned} \underbrace{\lambda}_{a+ib} \cdot \left(\underbrace{\mu}_{\alpha+i\beta}(x, y) \right) &= (a+ib) \left(\underbrace{\alpha x - \beta y}_{x'} \underbrace{\alpha y + \beta x}_{y'} \right) \\ &= (ax' - by', ay' + bx') \\ &= (a\alpha x - a\beta y - b\alpha y - b\beta x, a\alpha y + a\beta x + b\alpha x - b\beta y) \\ &= ((a\alpha - b\beta)x - (a\beta - b\alpha)y, (a\beta + b\alpha)x + (a\alpha - b\beta)y) \\ &= ((a\alpha - b\beta) + i(b\alpha + a\beta))(x, y) \\ &= ((a+ib)(\alpha+i\beta))(x, y) \end{aligned}$$

★ Distributivité à gauche et à droite : même principe.

Exercice 5

1. Ces ensembles ne sont pas des espaces vectoriels :

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ne sont pas stables par multiplication par $\frac{1}{2}$.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas stable par multiplication par un réel non rationnel. Prenons par exemple un irrationnel x . Alors

$$\underbrace{1}_{\in \mathbb{Q}} \times x = x \notin \mathbb{Q}$$

- $\mathbb{R}^*$ ne contient pas 0.

- Oui.
- Non, $0 \notin F$.
- Non : $O = (0, 0, 0) \notin F$.

5. Non : F n'est pas stable par multiplication par (-1) . Par exemple :

$$-1 \times \underbrace{(2, 3)}_{\in F} = \underbrace{(-2, -3)}_{\notin F}$$

6. Oui, on a

$$F = Vect((1, 1, 1))$$

7. Non : F n'est pas stable par addition. Exemple :

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F$$

8. Oui,

$$F = Vect((1, 0, 1))$$

9. Non. $O = (0, 0, 0) \notin F$.

10. Oui :

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

Or, cette dernière expression est toujours positive. Ainsi,

$$F = \mathbb{R}^2$$

11. En passant au ln, on obtient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}$. C'est un espace vectoriel.
12. oui
13. non. $O = (0, 0) \notin F$.
14. Non. $O = (0, 0, 0) \notin F$.
15. Oui. C'est le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Ou alors on résoud le système)
16. Oui. Les vecteurs orthogonaux à un vecteur dans $\mathbb{R}^3$ forment un plan passant par $\vec{0}$.

Exercice 6

1. Non : $0 \notin F$.
2. Oui . $F = Vect((-3, 1))$
3. C'est une demi-droite dans le plan complexe. Ce n'est pas un sev de $\mathbb{C}$ (non stable par multiplication par -1 .)
4. Il manque 0. Ce n'est pas un sev de $\mathbb{C}$.
5. Non. (Non stable par multiplication par i par exemple.)

Exercice 7

On notera $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

1. On a que $F \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ d'élément neutre la fonction nulle f_0 . On utilisera donc le TCSEV.

On observe que $f_0 \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. De plus, pour toutes fonctions $f, g \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, par propriétés sur les fonctions, on sait alors que

$$f + \alpha g \in F$$

Par TCSEV, on sait alors que F est un sev de E .

2. On a que $F \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ d'élément neutre la fonction nulle f_0 . On utilisera donc le TCSEV.

On observe que $f_0 \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. De plus, pour toutes fonctions $f, g \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, par propriétés sur les fonctions, on sait alors que

$$(f + \alpha g)'(a) = f'(a) + \alpha g'(a) = f'(b) + \alpha g'(b) = (f + \alpha g)'(b)$$

d'où

$$f + \alpha g \in F.$$

Par TCSEV, on sait alors que F est un sev de E .

3. On a que $F \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ d'élément neutre la fonction nulle f_0 . On utilisera donc le TCSEV.

On observe que $\int_a^b f_0(t)dt = \int_a^b 0 dt = 0 \times (b - a) = 0$, d'où

$$f_0 \in F.$$

De plus, pour toutes fonctions $f, g \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, par propriétés sur les intégrales, on sait alors que

$$\int_a^b (f + \alpha g) = \int_a^b f + \alpha \int_a^b = 0 + \alpha \times 0 = 0$$

d'où

$$f + \alpha g \in F.$$

Par TCSEV, on sait alors que F est un sev de E .

4. On a que $F \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ d'élément neutre la fonction nulle f_0 . On utilisera donc le TCSEV.

On observe que $2f_0(a) - f_0(b) - \int_a^b tf_0(t) dt = 2 \times 0 - 0 - \int_a^b 0 dt = 0$, d'où

$$f_0 \in F.$$

De plus, pour toutes fonctions $f, g \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, par propriétés sur les intégrales, on sait alors que

$$2(f+\alpha g)(a) = 2f(a) + \alpha g(a) = f(b) + \int_a^b tf(t) dt + \alpha g(b) + \alpha \int_a^b tg(t) dt = (f+\alpha g)(b) + \int_a^b t(f+\alpha g)(t) dt$$

d'où

$$f + \alpha g \in F.$$

Par TCSEV, on sait alors que F est un sev de E .

Exercice 8

1. $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. $\mathcal{H}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
5. $\mathcal{H}$ n'est pas un espace vectoriel car la fonction nulle n'appartient pas à $\mathcal{H}$.
6. $\mathcal{H}$ n'est pas un espace vectoriel car l'ensemble n'est pas stable par multiplication par -1 . (Les fonction strictement croissantes deviennent strictement décroissantes.)
8. oui
9. non
10. Non : l'application nulle n'est pas dans $\mathcal{H}$.
11. Oui
12. Non : l'application nulle n'est pas dans $\mathcal{H}$.
13. Oui.

Exercice 9

1. C'est un ev
2. C'est un ev
3. Ce n'est pas un ev ($0 \notin F$).
4. C'est un ev
5. C'est un ev :

$$\text{Vect}(1, X, X^3, X^4, \dots)$$

Exercice 10

1. Non. La matrice nulle n'est pas dans E .
2. Non. La matrice nulle n'est pas dans E .

$$3. E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & -2+\pi \\ -\frac{1}{2}+3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 11

1. $A = \text{Vect} \left\{ (1, 0, 2); (1, -1, -1) \right\} : 2x + 3y - z = 0$
2. $A = \text{Vect} \left\{ (3, 1, 1); (1, -1, 1) \right\} : -x + y + 2z = 0$
3. $A = \text{Vect} \left\{ (3, 1, 1); (1, -1, 1), (2, 2, 0) \right\} :$
c'est le même qu'avant ! : $-x + y + 2z = 0$

Exercice 12

- a) $G = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, -1, 3))$ c'est donc un sev de $\mathbb{R}^3$.

Pour F , on peut le faire rapidement par caractérisation des sev ou alors chercher $F = \text{Vect}(\dots)$.

- b) On pose $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} M \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} F \in F \\ F \in G \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \text{il existe } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = a + b, y = a - b, z = a + 3b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a + b) + (a - b) + (a + 3b) = 0 \\ \text{il existe } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = a + b, y = a - b, z = a + 3b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ \text{il existe } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = a + b, y = a - b, z = a + 3b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ \text{il existe } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = 0, y = 2a, z = -2a \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$F \cap G = \{(0, 2a, -2a)/a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, -1))$$

2. b) On a

$$G = \{a(1, 0, 1, 1) + b(1, 1, 0, -1) + c(0, 2, -1, 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

i.e. $G = \{(a + b, b + 2c, a - c, a - b) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Ensuite : on pose $M(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} M \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} F \in F \\ F \in G \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x = a + b, y = b + 2c, z = a - c, t = a - b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a + b) + (b + 2c) + (a - c) + (a - b) = 0 \\ \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x = a + b, y = b + 2c, z = a - c, t = a - b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -(3a + b) \\ \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x = a + b, y = b - 2(3a + b), z = a + (3a + b), t = a - b \end{cases} \end{aligned}$$

i.e.

$$F \cap G = \{(a + b, -6a - b, 4a + b, a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -6, 4, 1), (1, -1, 1, -1))$$

Exercice 13

$$\text{Vect}((2, 2, 0, 1), (-i, -1, 1, 0))$$

Exercice 14

$$\alpha = 5, \beta = 1. \text{ On a } (\alpha, \beta, 4, 1) = 2(2, 1, 3, 1) - (-1, 1, 2, 1).$$

Exercice 15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16

• Méthode 1 : même équation cartésienne : $x + y - 2z = 0$.

• Méthode 2 : Vérifier que $a, b \in \text{Vect}(u, v)$, puis (a, b) libre.

Exercice 17

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}$$

Exercice 18

$$1. \quad 1 = \cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2}) \quad \text{et} \quad \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1.$$

2. Analyse : supposons que $x \mapsto \sin x \in \mathcal{E}$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\sin x = a + b \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Cherchons a, b :
pour $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $1 = a$.
pour $x = -\frac{\pi}{2}$, on trouve $-1 = a$!

Exercice 19

1. indépendants car non colinéaires, mais ne forment pas de base de $\mathbb{R}^3$ (pas assez nombreux).
2. indépendants donc base de $\mathbb{R}^3$.
3. indépendants donc base de $\mathbb{C}^3$.
4. non indépendants : $(3, 0, 2) = -(-1, 2, 0) + 2(1, 1, 1)$, donc ne forment pas une base de $\mathbb{C}^3$
5. non indépendants : il y en a trop, donc ne forment pas une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 20

2. libre.
3. libre.
4. Non indépendant. $g = f - 2h$.
5. indépendant :

$$\lambda e^{ax} + \mu e^{bx} + \gamma e^{cx} = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(\lambda + \mu e^{(b-a)x} + \gamma e^{(c-a)x}) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu e^{(b-a)x} + \gamma e^{(c-a)x} = 0$$

puis limite en $-\infty$.

6. Non indépendant. On peut obtenir un système en prenant des x particuliers sur l'expression $\alpha f + \beta g + \gamma h$, par exemple :

$$\begin{cases} \text{quand } x \rightarrow 1^+ : & \alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ \text{en multipliant par } x^2 \text{ puis limite en } +\infty : & \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

De solutions $\text{Vect}((4, -1, 1))$.

On va donc pouvoir vérifier par calcul (mise sous même dénominateur) que

$$4f - g + h = 0 \text{ et donc les fonctions ne sont pas indépendantes.}$$

Exercice 21

1. indépendants car non colinéaires.
2. non indépendant. Il y en a trop !
3. ind. car de degrés échelonnés.
4. non indépendant par identification des coefficients : $2P - Q = R$
5. Ils sont indépendants : les degrés 2 à 2 distincts.

Exercice 22

1. On a la relation

$$\arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x-1} + \arctan \frac{x+1}{x} = 0$$

On l'obtient en posant

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$$

On obtient une relation sur les coefficients en faisant par exemple la limite en $+\infty$ de l'expression et la limite en $1+$ de la dérivée. On obtient le système

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

de solutions $\text{Vect}((1, -1, 1))$. On propose alors la relation donnée plus haut, que l'on démontre pour tout $x \in \mathbb{R}$ en posant $\varphi = f - g + h$; en montrant que $\varphi' = 0$ (et donc que φ est constante) et en déterminant la constante. Ainsi, par calcul, on obtient

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{1}{x^3 + \frac{1}{4x}} + \frac{1}{(x-1)^2 + x^2} + \frac{1}{x^2 + (x+1)^2}\right) = \dots = 0$$

Ainsi, il existe une constante $x \in \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(x) = c$$

Or, on a que $c = \lim_{x \rightarrow +\infty} f - g + h = -1 + 1 = 0$, d'où la réponse annoncée.

2. On note $F = \text{Vect}(f, g, h)$. La famille étant liée, on a $\dim F \leq 2$. Or, les fonctions f, g par exemple sont non colinéaires (sinon, on aurait $\frac{1}{2x^2}$ et $\frac{x}{x-1}$ colinéaires, ce qui n'est pas le cas). Elles forment donc une famille libre dans un espace de dimension ≤ 2 . Ainsi,

$$\text{La famille } \{f, g\} \text{ est une base de } \text{Vect}((f, g, h)).$$

3. On ne peut plus faire de limite en $+\infty$. En revanche, on peut faire des limites en 0^+ pour φ et 0^+ et 1^- pour φ' . On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

qui admet comme seule solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est libre.

Exercice 23

$$2. \quad (-4, 1, -3) = -(2, 1, 1) + 2(1, 1, 0) - 2(2, 0, 1) \text{ d'où } M_{\mathcal{B}}((-4, 1, -3)) = (-1, 2, -2)$$

Exercice 24

- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4, on n'a que trois éléments. ça ne peut pas être une base.
- Non, on a $A - B + C = D$.
- La famille est libre. C'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car le cardinal de la famille est $4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si on note $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ est :

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$M_{\mathcal{B}}(M) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0)M_{\mathcal{B}_0}(M)$$

D'où :

$$M_{\mathcal{B}_0}(M) = P^{-1}M_{\mathcal{B}}(M) = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

où on a calculé

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{16} & \frac{17}{80} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{16} & \frac{43}{80} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{8} & -\frac{29}{40} \end{pmatrix}$$

Exercice 25

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + 2z = 0\} = \text{Vect}((1, 1, 0); (-2, 0, 1))$. Or, les vecteurs $(1, 1, 0); (-2, 0, 1)$ sont non colinéaires, donc linéairement indépendants. Une base de A et donc $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0); (-2, 0, 1)\}$.
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = -z\} = \text{Vect}((1, 1, -1))$. Une base de A et donc $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1)\}$.
- $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0; y + z = 0; z + t = 0; t + x = 0\} = \text{Vect}((1, -1, 1, -1))$. Une base de A et donc $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1, -1)\}$.
- $A = \text{Vect}\{(1, 2, -3), (1, 2, -3), (-1, 5, 6)\}$. Clairement, la famille $\{(1, 2, -3), (1, 2, -3), (-1, 5, 6)\}$ est non libre. Ce n'est donc pas une base. Il faut en extraire une. Or, $A = \text{Vect}\{(1, 2, -3), (-1, 5, 6)\}$. Les vecteurs $(1, 2, -3), (-1, 5, 6)$ sont non colinéaires, donc linéairement indépendants, aussi $\mathcal{B} = \{(1, 2, -3), (-1, 5, 6)\}$ est une base de A .

5. $A = \text{Vect} \{(1, 2, -1), (3, 1, 3), (2, -1, 4)\}.$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Ainsi, $\dim A = 2$. Il suffit donc de trouver une famille libre dans A de cardinal 2. Par exemple, $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (3, 1, 3)\}.$

6. $A = \text{Vect} \{(4, 1, 3), (2, 0, -2), (4, -5, 8), (1, 1, -1)\}.$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & -1 \end{pmatrix} = 3. \text{ Autrement dit, } \dim A = 3. \text{ Pour trouver une}$$

base de A , il faut extraire une famille de 3 éléments linéairement indépendants dans A .

★ Première possibilité :

Ici $A = \mathbb{R}^3$ car $A \subset \mathbb{R}^3$, avec $\dim A = \dim \mathbb{R}^3$. Une base de A peut donc être la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

★ Deuxième possibilité :

On extrait une famille libre de trois éléments parmi les vecteurs $\{(4, 1, 3), (2, 0, -2), (4, -5, 8), (1, 1, -1)\}$. Par exemple, $\{(4, 1, 3), (2, 0, -2), (1, 1, -1)\}$. Une base de A peut donc être $\mathcal{B} = \{(4, 1, 3), (2, 0, -2), (1, 1, -1)\}.$

★ Troisième possibilité :

En calculant le rang de la famille de vecteurs, si on ne fait que des opérations sur les colonnes, les vecteurs colonnes de la matrice obtenus engendrent A . Par exemple, en ne faisant que des opérations sur les colonnes, on peut obtenir :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de A est donc $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1), (0, -3), (0, 0, -12)\}.$

7. $A = \{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(\sqrt{2}) = 0\}$. Les polynômes s'annulant en $\sqrt{2}$ s'écrivent tous $(X - \sqrt{2})Q$, ainsi,

$$A = \{(X - \sqrt{2})Q \mid Q \in \mathbb{R}_3[X]\}$$

autrement dit,

$$\begin{aligned} A &= \{(X - \sqrt{2})(a + bX + cX^2 + dX^3) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(X - \sqrt{2}) + bX(X - \sqrt{2}) + cX^2(X - \sqrt{2}) + dX^3(X - \sqrt{2}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((X - \sqrt{2}), X(X - \sqrt{2}), X^2(X - \sqrt{2}), X^3(X - \sqrt{2})) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que la famille

$$((X - \sqrt{2}), X(X - \sqrt{2}), X^2(X - \sqrt{2}), X^3(X - \sqrt{2}))$$

est libre, ce qui sera le cas, parce que c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

Une base de A est donc $((X - \sqrt{2}), X(X - \sqrt{2}), X^2(X - \sqrt{2}), X^3(X - \sqrt{2}))$.

8. L'ensemble des fonctions affines est

$$A = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid \text{il existe } a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) = ax + b\}$$

Autrement dit,

$$A = \text{Vect}\{h, id\}$$

où $h(x) = 1$ et $id(x) = x$.

De plus, les fonctions h et id sont non colinéaires, elles forment donc une base de A .

Exercice 26

$$2. \quad M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad \text{En notant } \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3), \text{ on a } (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3.$$

Exercice 27

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -4 & 7 & -6 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 28

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 29

1. Les polynômes sont de degrés 2 à 2 distincts. La famille est donc libre. Elle est constituée de $4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$ éléments. C'est donc une base.

2. Si on note $\mathcal{B} = (f_0, f_1, \dots, f_3)$ les polynômes de la base de la question 1 (dans le même ordre), on a
 $1 = f_0, X = f_1, X^2 = f_1 + f_2, X^3 = f_1 + 3f_2 + f_3$, d'où

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = df_0 + (a + b + c)f_1 + (3a + b)f_2 + af_3 = (d, a + b + c, 3a + b, a)_{\mathcal{B}}$$

Exercice 30

2. On a $f, g, h \in F$. On peut donc écrire les coordonnées de f, g, h dans la base $\mathcal{B}$ et calculer le rang de la matrice associée : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. On peut résoudre le système, ou alors inverser la matrice de passage :
 $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Ainsi, les coordonnées de $\cos$ se trouvent sur la deuxième colonne.