

Applications linéaires

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - Cours -

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt{x}$.
2. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x - 1$.
3. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x|$.
4. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto (y, x)$.
5. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto 3x + 5y$.
6. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \sin(2x) + \sin(y)$. ☆
7. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto xy$.
8. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad x \mapsto (ex, \pi, x\sqrt{2})$.
9. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (x, y) \mapsto (e(x+y), \pi y, x\sqrt{2})$.
10. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad M \mapsto M'$ défini par : $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ si $\overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$ et $\vec{0}$ sinon.
11. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto$ la solution du système d'équations en (u, v) :

$$\begin{cases} u + v = x \\ u - 2v = y \end{cases}$$

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] - Cours -

Dans cet exercice, on notera $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions à images réelles quelconques définies sur un intervalle I .

1. Dire si les applications u suivantes sont linéaires.
 - a) Soient $a \in \mathbb{R}$, $a \in I$. $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto f(a)$.
 - b) si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $u : \mathcal{C}([\alpha, \beta]) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$.
 - c) $u : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^1 f(t) dt$.
 - d) $u : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{F}; \quad f \mapsto f'$.
 - e) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto \max_{t \in I} f(t)$ où $I = [0, 1]$.
 - f) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}; \quad f \mapsto \{t \mapsto 2f(t) + 1\}$.
 - g) $u : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|) dt$.

$$\text{h) } u : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{F}; \quad f \mapsto \{x \mapsto e^{-x}f(x) + \int_0^1 f(t) dt\}.$$

$$\text{i) } u : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}); \quad (\lambda, f) \mapsto \text{la primitive de } f \text{ qui vaut } \lambda \text{ en } x_0 = \pi.$$

$$\text{j) } u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$$

$$\text{k) } u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]; \quad P \mapsto XP' - P$$

2. Déterminer lesquelles de ces applications sont des endomorphismes.

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - Cours -

Dire si les application suivantes sont des endomorphismes :

$$\text{1. } u : \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}); \quad f \mapsto f'$$

$$\text{2. } u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]; \quad P \mapsto X^2P' - nXP$$

$$\text{3. } u : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x + 3y$$

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] - Cours -

1. Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans F . Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

- a) Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
- b) Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
- c) Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est génératrice de E , alors $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est génératrice de F .
- d) Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est génératrice de E , alors $e_1, e_2, \dots, e_p$ est génératrice de F .

2. Reprendre les questions en prenant $E = F$.

Matrice, injectivité, surjectivité

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer -

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f : E \rightarrow F$ l'application linéaire associée

à B dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{G}$ d'espaces vectoriel E et F .

1. Quelle est la dimension de E ? de F ?
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f .
3. L'application f est-elle injective? / surjective?

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] – Cours –

- On admettra que les applications ci-dessous sont linéaires. Déterminer la matrice de u dans une base de votre choix, $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$, où
 - $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (x, x + 2y, -x + y)$
 - $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$
 $P \mapsto (X^2 + 2)P' - 3XP$
 - $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' - 3f' + 2f = 0\}$ et $u : E \rightarrow E$
 $f \mapsto f'$
- Pour chaque cas, dire si u est injective ? surjective ?
- L'application u de la question 1.b) est-elle un endomorphisme ?

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] – Chercher –

☆

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$.

- Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E .
- En déduire une matrice de φ et $\operatorname{rg} \varphi$.

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – Chercher – Un peu de géométrie...

On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- On considère s la symétrie axiale par-rapport à l'axe des abscisses dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une formule pour s puis vérifier que c'est bien une application linéaire. Quelle est la matrice de la symétrie axiale dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?
- On considère p la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées. Déterminer une formule pour p et en déduire que c'est une application linéaire. Déterminer la matrice de p dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?
- Si le repère est orthonormé, on admet que la rotation r d'angle θ et de centre O dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est une application linéaire. Quelle est la matrice de r dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?
- Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – cours

- Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
- Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
- Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – Chercher – Mobiliser – Calculer –

Dire si les applications suivantes sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

- $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x + z, x + y + z)$
- $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (x - y, 2x + y, y)$
- $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans une des bases de $\mathbb{R}^3$.
- $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x^2, y^3)$
- $u : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
 $f \mapsto f'$
- $u : \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid v \text{ est } p \text{ périodique}\} \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $v \mapsto (v_0, \dots, v_{p-1})$
- $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto (P(0), P')$

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – Calculer –

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et λ un paramètre réel. On pose φ l'application linéaire de E dans E telle que

$$\begin{cases} \varphi(1) &= 1 + X \\ \varphi(X) &= 1 - X \\ \varphi(X^2) &= 1 + \lambda X^2 \end{cases}$$

- Quelle est l'image d'un polynôme quelconque de E par φ ?
- Comment choisir λ pour que φ soit surjective ? injective ?

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – Calculer – Chercher –

On considère l'application $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (2x - y, -4x + 2y)$$

- u est-elle linéaire ?
- Donner son noyau.
 - Quel est le rang de u ?
 - u est-elle surjective ?
 - Déterminer $\operatorname{Im} u$.
- Reprendre l'exercice avec $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + y, -x - y)$. Déterminer dans ce cas $u^2 = u \circ u$ sans faire de calculs supplémentaires.

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – Chercher – Soient A et B les sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$A = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} \quad B = \{(x, y, z) : x = -y = -z\}$$

1. Exprimer E et B respectivement comme l'image et le noyau d'une même application linéaire $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer à vue la dimension de B . En déduire la dimension de A sauf déterminer de base de A .

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – Calculer – On considère les applications

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, 2x + y, y) \quad (x, y, z) \mapsto (x + z, 5x - 2y + z)$$

1. On admet que f, g sont linéaires. Donner leur noyau respectif ainsi que leur image respective.
2. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. Qu'en est-il de $f \circ g$?

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – Calculer – Chercher – ☆
Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, $g \in \mathcal{L}(F, E)$, et :

$$\varphi : E \times F \longrightarrow E \times F$$

$$(x, y) \longmapsto (x + g(y), y)$$

Montrer que φ est un automorphisme de $E \times F$.

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – Chercher – ☆☆
Soit $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $U : E \rightarrow E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt. \\ \text{et } U(f)(0) = f(0). \end{cases}$$

1. Montrer que $U \in L(E)$.
2. Déterminer $\ker U$ et $\text{Im } U$.
3. Donner un exemple de fonction dans $\text{Im } u$ qui n'est pas dans $C^1([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et en donner un antécédent.

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] – Mobiliser – Chercher – Soit

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{où } a \text{ est un nombre complexe donné non nul.}$$

$$z \mapsto z + a\bar{z}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$?

3. Déterminer le noyau et l'image de f .

Changement de base

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] – Raisonner – Calculer –
Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. a) Donner la matrice A de T dans la base donnée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
b) Déterminer le noyau de T .
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3, f_2 = e_1 - e_2, f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
a) Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
b) Calculer $T(f_2)$ et $T(f_3)$.
3. En déduire la matrice B de T dans cette nouvelle base.

EXERCICE 19: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

1. Soient $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, ainsi que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer $M_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_3}(f)$ où $\mathcal{B}'_2 = \{(1, 0)_{\mathcal{B}_2}, (-1, 1)_{\mathcal{B}_2}\}$.
 - b) Déterminer $M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_3}(f)$ où $\mathcal{B}'_3 = \{(1, -1, 1)_{\mathcal{B}_3}, (-1, -1, 1)_{\mathcal{B}_3}, (0, 2, 0)_{\mathcal{B}_3}\}$.
2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base d'un espace vectoriel E et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de f dans a base $\mathcal{B}' = \{(1, 0, -1)_{\mathcal{B}}, (1, 2, 0)_{\mathcal{B}}, (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}\}$

EXERCICE 20: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, (0, 1, 2)_{\mathcal{B}}, (1, 0, 3)_{\mathcal{B}}\}$ deux bases d'un espace vectoriel E et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

EXERCICE 21: [Indications] [Correction] – Chercher – Calculer –

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\ker(u) = \text{Vect}\{X^2 - X, X^2 + 1\}$ et $u(2 + X) = 1 + X$. Déterminer l'image de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 22: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par sa matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\ker T$ et $\operatorname{Im} T$.
2. Soient $f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $f_3 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
 - a) Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice P de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (f_1, f_2, f_3) .
 - b) Calculer P^{-1} .
 - c) Écrire la matrice D de T dans la base (f_1, f_2, f_3) .
 - d) Trouver une manière plus simple de déterminer D .
3. En déduire A^3 .

Pour aller un peu plus loin

EXERCICE 23: [Indications] [Correction] – Chercher – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Donner des exemples d'endomorphismes nilpotents.
2. Soient f et g deux endomorphismes de E , nilpotents, et qui commutent. Montrer que $f \circ g$ et $f + g$ sont également nilpotents.
3. Montrer que si f est nilpotent alors $\operatorname{Id}_E - f \in GL(E)$ et exprimer son inverse $(\operatorname{Id}_E - f)^{-1}$.
4. Montrer que si f est nilpotent et $a \in GL(E)$ alors $a - f \in GL(E)$.

EXERCICE 24: [Indications] [Correction] – Chercher –

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $\{\vec{x}, f(\vec{x})\}$ est liée.
 - a) Montrer que si $\vec{x} \neq \vec{0}$, il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.
 - b) Comparer $\lambda_{\vec{x}}$ et $\lambda_{\vec{y}}$ lorsque $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre.
 - c) Montrer que f est une homothétie.
2. Montrer que si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E , f est une homothétie.

Indications

Exercice 7 [Correction]

1. Prendre une combinaison linéaire nulle et l'évaluer par φ^{n-1} .

Exercice 21 [Correction]

Déterminer d'abord une base de u dans des bases adaptées à l'énoncé.

(Pour avoir une matrice, il nous faut 3 antécédents et leurs images. En regardant bien, nous avons 6 de ces éléments clairement explicités dans l'énoncé.)

Il nous faut ensuite déterminer $u(P)$ où $P = a + bX + cX^2$ (polynôme qui serait donc exprimé dans la base canonique.) Nous avons pour ça par exemple les formules matricielles d'images d'un élément et de changement de base.

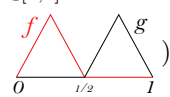
Exercice 24 [Correction]

1.
 - b) faire intervenir $\vec{x} + \vec{y}$ pour montrer que $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$
 - c) Montrer que pour $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée on a aussi $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$

Exercice 1

1. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt{x} : \text{non}$
($u(\lambda x) \neq \lambda u(x)$)
2. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x - 1 : \text{non}$
($u(0) \neq 0$)
3. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x| : \text{non}$
($u(-2x) \neq -2u(x)$).
4. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto (y, x) : \text{oui}$
5. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto 3x + 5y : \text{oui}$
6. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \sin(2x) + \sin(y) : \text{non}$
($u(\pi, \pi) = 0 \neq 2u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$)
7. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto xy : \text{non}$
($u(\lambda x) = \lambda^2 u(x) \neq \lambda u(x)$). Prendre par exemple $\lambda = -1$.)
8. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad x \mapsto (ex, \pi, x\sqrt{2}) : \text{non}$
($u(0) \neq 0$).
9. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad x \mapsto (e(x+y), \pi y, x\sqrt{2}) : \text{oui}$
10. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad M \mapsto M' : \text{non}$
($u(2M) \neq 2M'$)
11. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \mapsto \text{la solution du système d'équations} : \text{oui} :$
 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où P est la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1. a) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto f(a) : \text{oui}.$
- b) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt : \text{oui. Théorème de linéarité sur les intégrales impropres.}$
- c) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^1 f(t) dt : \text{oui}$
(somme de deux applications linéaires.)
- d) $u : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}; \quad f \mapsto f' : \text{oui}$
- e) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto \max_{t \in [0,1]} f(t) : \text{non}$
($u(-f) \neq -u(f) : u(-f)(x) = -\min_{t \in [0,1]} f(t)$,
ou alors $u(f+g) \neq u(f) + u(g) :$ )
- f) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}; \quad f \mapsto \{t \mapsto 2f(t) + 1\} : \text{non}$
($u(0) \neq 0$).

- g) $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|) dt : \text{non}$
($u(-f) = u(f) \neq -u(f)$)
- h) $u : \mathcal{C}([0,1]) \rightarrow \mathcal{C}^1; \quad f \mapsto \{x \mapsto e^{-x} f(x) + \int_0^1 f(t) dt\} : \text{oui}$
(somme d'applications linéaires.)
- i) $u : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}); \quad (\lambda, f) \mapsto \text{la primitive de } f \text{ qui vaut } \lambda \text{ en } x_0 = \pi : \text{oui}$
- j) $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) : \text{oui}$
(chaque coordonnée est linéaire.)
- k) $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]; \quad P \mapsto XP' - P : \text{oui}$
(somme d'AL)

Exercice 3

1. Non. Clairement linéaire, mais $P'(0)$ n'est pas forcément nul. Ex : $P(X) = X$.
2. Oui. Clairement linéaire comme somme d'AL. On vérifie que $\deg u(P) \leq n$.
3. Non. L'espace de départ n'est pas un espace vectoriel!

Exercice 4

1. a) Non. Exemple trivial : $u = 0$. Sinon, autre exemple : $M(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- b) Oui. On pose $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$. On applique u , puis la liberté de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
- c) Non. Exemple : $M(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- d) Non. Exemple : $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2. M(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (e_1, e_2) n'est pas générateur de $\mathbb{R}^3$.
2. Seul changement : pour d , on a $\dim E = \dim \text{rg}(u)$. Le théorème du rang donne u injective, puis :

Si $x \in E$, $u(x) = \lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_p u(e_p)$, d'où

$$x - \lambda_1 e_1 - \dots - \lambda_p e_p \in \ker u = \{0\}$$

Exercice 5

1. $\dim E = 4, \dim F = 3.$

2. Par des opérations de colonnes $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

où la quatrième colonne est donnée par $u(e_4 + (e_3 - e_1)) = (-1, 0, 1, 1)$
la troisième colonne est donnée par $2(e_3 - e_1) - (e_2 - e_1) = (-1, -1, 2, 0)$

Conclusion : $\ker B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $\text{Im } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

3. Non injective (noyau non nul).
Non surjective car $\dim \text{Im } B \neq \dim F$.

Exercice 6

1. a) Dans les bases canoniques : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 2 et donc, par thm du rang, $\dim \ker u = 2 - 2 = 0$.
D'où $\text{Im } u = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\ker u = \{0\}$.
- b) Dans les bases canoniques $(1, X, X^2, X^3)$ et $(1, X, X^2, X^3, X^4)$:
- $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- de rang 4 après calcul et par thm du rang,
 $\dim \ker u = 4 - \text{rg}(u) = 0$
D'où $\text{Im } u = \mathbb{R}_3[X]$ et $\ker u = \{0\}$.
- c) La résolution de l'équation différentielle donne une base $\{x \mapsto e^x; x \mapsto e^{2x}\}$, d'où la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ de rang 2 et par thm du rang, $\dim \ker u = \dim E - 2 = 0$
D'où $\text{Im } u = E$ et $\ker u = \{0\}$.

2. • Pour a :

Il ne peut y avoir surjectivité car

$$\dim R^3 \text{ (arrivée)} > \dim R^2 \text{ (départ)}$$

mais il y a injectivité car $\ker u = \{0\}$.

- Pour b :

Il ne peut y avoir surjectivité car

$$\dim R_4[X] \text{ (arrivée)} > \dim R_3[X] \text{ (départ)}$$

Il y a en revanche injectivité car $\ker u = \{0\}$.

- Pour c :

C'est un endomorphisme en dimension finie qui est injectif ($\ker u = \{0\}$) donc surjectif.

3. C'est bien un endomorphisme car on observe que la dernière ligne de la matrice est nulle et que, d'après la base d'arrivée, on a

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(1), \dots, u(X^3)) \subset \mathbb{R}_3[X]$$

Exercice 7

1. Montrons que la famille $\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-1}(x) = 0$. Alors : $\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-1}(x)) = 0$. Mais comme de plus $\varphi^n = 0$, on a l'égalité $\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-1}(x)) = \varphi^{n-1}(\lambda_0 x) + \varphi^n(\lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-2}(x)) = \lambda_0 \varphi^{n-1}(x)$. Comme $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$ on obtient $\lambda_0 = 0$.
En calculant ensuite $\varphi^{n-2}(\lambda_1 \varphi(x) + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-1}(x))$ on obtient $\lambda_1 = 0$ puis, de proche en proche, $\lambda_{n-1} = \dots = \lambda_0 = 0$. La famille $\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est donc libre. Elle compte n vecteurs. Comme $\dim(E) = n$ elle est libre maximale et forme donc une base de E .

Exercice 8

1. On examine s et on constate aisément que

$$s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x, -y)$$

On observe que

$$M_{\mathcal{B}}(s(x, y)) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

D'où le fait que s est linéaire et en même temps que

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On examine p et on constate aisément que

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x, 0)$$

On observe que

$$M_{\mathcal{B}}(p(x, y)) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

D'où le fait que p est linéaire et en même temps que

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On ne fait que déterminer les images des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et on obtient alors

$$M_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

4. Non. L'image de 0 n'est pas 0.

Exercice 9

- $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{rg} f = 4 - \dim \mathbb{R}^2 = 4 - 2 = \boxed{2}$
- $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^{26} - \dim \ker f = 26 - 0 = \boxed{26}$
- Impossible. Les dimensions devraient être les mêmes.

Exercice 10

- Non injective (théorème du rang), mais surjective.
- Non surjective (théorème du rang), mais injective.
- Bijective. (Surjective ssi injective et $\operatorname{rg} u = 3$.)
- Non injective! Attention, cette application n'est pas linéaire!! Il ne suffit pas de calculer $\ker u$...
Non surjective.
- Surjective (toute fonction continue admet une primitive).
Non injective : $\ker u$ est l'ensemble des fonctions constantes.
- La suite v étant p périodique, elle est déterminée par les p premiers termes, donc elle est injective : ($\ker u = \{(0)\}$) et Surjective.
- Injective : $\ker u = \{0\}$.
Surjective Si $(\alpha, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$, alors l'antécédent est P tel que $P(x) = \int_0^x Q(t) dt + \alpha$.

Exercice 11

1. Soit $P \in E$. Alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = a + bX + cX^2$$

d'où

$$\varphi(P) = a\varphi(1) + b\varphi(X) + c\varphi(X^2) = a + b + c + X(a - b) + c\lambda X^2$$

2. • Condition pour que φ soit surjective :

φ est surjective ssi $\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg} M(\varphi) = 3$. Or, la matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$ est

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

D'où $\operatorname{rg} = 3$ ssi $\lambda \neq 0$.

- Condition pour que φ soit injective :

φ Comme c'est un endomorphisme, φ est injective ssi elle est surjective. C'est donc la même condition.

Exercice 12

- Oui, écrire la matrice.
- $\ker u = \{(x, y) \mid 2x = y\} = \operatorname{Vect} \{(1, 2)\}$ (résolution de système).
 - Par le théorème du rang, $\operatorname{rg} u = 2 - 1 = 1$.
 - Non, car $\operatorname{rg} u \neq \dim \mathbb{R}^2$.
 - N'importe quel vecteur de $\operatorname{Im} u$ convient comme base. Exemple $(2, 1)$.
- $\operatorname{Im} u = \ker u$. D'où $u^2 = 0$

Exercice 13

- On considère $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x + y - z \\ -(x + y - z) \\ -(x + y - z) \end{pmatrix}$
- On voit directement que $B = \operatorname{Vect}((1, -1, -1))$ donc $\dim B = 1$. Par le théorème du rang, on obtient que $\dim A = 2$.

Exercice 14

- $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ker f = \{0\}; \mathcal{I}\mathfrak{m}(f) = \operatorname{Vect}((1, 2, 0); (0, 1, 1))$
 $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \ker f = \operatorname{Vect} \{(1, 2, -1)\}; \mathcal{I}\mathfrak{m}(f) = \operatorname{Vect}((1, 5); (1, 1))$
- $M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\operatorname{rg}(g \circ f) = 2$. C'est un automorphisme

3. • Méthode 1 :

$M(f \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. D'où $\ker(f \circ g) = \text{Vect}(1, 2, -1)$. Non injective et donc non bijective.

• Méthode 2 :

On sait déjà que $g((1, 2, -1)) = 0$, alors $f \circ g((1, 2, -1)) = 0$, d'où $\ker(f \circ g) \neq \{0\}$. D'où $f \circ g$ non injective.

Exercice 15

φ linéaire, on peut donc utiliser les propriétés des AL.

• Injectivité : (Calcul de $\ker \varphi$:)

$$\varphi((x, y)) = \{(0, 0)\} \Leftrightarrow \begin{cases} x + g(y) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

• Surjectivité :

Supposons $(z, t) \in E \times F$. On pose $y = t$ et $x = z - g(t)$. Alors $\varphi((x, y)) = (z, t)$. Il y a surjectivité.

Exercice 16

2. • Noyau : $\ker U = \{0\}$

Soit $f \in \ker U$. Alors, par définition, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\int_0^x f(t)dt = 0$$

or cette expression est celle de la primitive évaluée en x de f qui s'annule en 0. Si la primitive de f est nulle sur $]0; +\infty[$, alors f est nulle sur $]0; +\infty[$. Par continuité, f est nulle partout.

• Image : l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ des fonctions $\mathcal{C}^1(]0; +\infty[)$ t.q. $\lim_{x \rightarrow 0} xG'(x) = 0$.

★ Analyse :

Supposons que $G \in \mathfrak{Im} u$. Alors il existe $f \in E$ tel que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt. \\ \text{et } G(0) = f(0). \end{cases}$$

Autrement dit,

- G est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
- pour $x \neq 0$, $xG(x) = \int_0^x f(t)dt$ d'où

$$f(x) = (xG(x))' = G(x) + xG'(x).$$

• Comme f et G sont continues en 0, avec $G(0) = f(0)$, par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus, on a également

$$\lim_{x \rightarrow 0} xG'(x) = 0.$$

Tout ceci nous indique au passage que

$$\boxed{\text{Im } u \subset D}$$

★ Synthèse :

Soit $G \in D$. On pose $f(x) = \begin{cases} (xG(x))' = G(x) + xG'(x) & \text{si } x \neq 0 \\ G(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrons que $f \in \mathcal{C}^0$:

- f est clairement continue sur $]0; +\infty[$.
- En 0, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} G(x) + xG'(x) = G(0) = f(0)$ (continuité de G .)

On a donc $G = u(f)$, d'où $\text{Im } u \subset D$ et donc

$$\boxed{\text{Im } u = D}$$

3. Soit $\boxed{G(x) = \sqrt{x}}$ pour $x \in [0; +\infty[$. On a

$$G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{si } x > 0$$

d'où

$$xG'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

i.e.

$$G \in \text{Im } u \quad \text{mais } G' \text{ ne peut pas être continue en } 0$$

Notons que, dans ce cas, si on note $u(f) = G$, on a

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \text{ pour } x \geq 0}$$

Exercice 17

1. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\bar{z}') = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$ -linéaire.

2. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$ -linéaire.

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \text{Ker } f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ , $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\text{Ker } f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\text{Im } f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\text{Ker } f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, $\text{Im } f$ est une droite vectorielle et pour déterminer $\text{Im } f$, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1+a$. Donc, si $a \neq -1$, $\text{Im } f = \text{Vect}(1+a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ et $\text{Im } f = i\mathbb{R}$.

Exercice 18

1. a) Par définition, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) On trouve

$$\ker T = \text{Vect}((1, 0, -1))$$

2. a) On pose $\mathcal{G} = (f_1, f_2, f_3)$ et

$$P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On observe que

$$\text{rg}(P) = 3$$

La famille $\mathcal{G}$ est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$

b) On observe que

$$T(f_2) = f_2 \quad T(f_3) = f_3$$

3. On a déjà les images de f_1, f_2, f_3 , ce qui nous donne la nouvelle matrice

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 19

1. a) $M_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_3}(f) = P_{\mathcal{B}'_2 \rightarrow \mathcal{B}_2} M(f)_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}$

$$\text{avec } P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}'_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } P_{\mathcal{B}'_2 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $M_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(f) = P_{\mathcal{B}'_2 \rightarrow \mathcal{B}_2} M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(f) P_{\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathcal{B}'_3} = M_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_3}(f) P_{\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathcal{B}'_3}$

$$\text{or, } P_{\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathcal{B}'_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où}$$

$$M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 7 & 6 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 20

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 21

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (2 + X, X^2 - X, X^2 + 1)$. On a

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{alors } P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, comme

$$M(u)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$M(u)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = M(u)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\boxed{u(a + bX + cX^2) = (a - b - c)(1 + X)}$$

Exercice 22

$$2. \quad a) \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en calculant, on obtient $\text{rg} P = 3$ et donc (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$b) \quad P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

c) Par formule de cours, on a

$$D = P^{-1}AP$$

d'où après calcul

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

d) On note que $T(f_1) = 0 = 0$, $T(f_2) = 3f_2$, $T(f_3) = 4f_3$. On peut donc remplir D en conséquence.

3.

$$A^3 = PD^3P^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 32 & -14 \\ 9 & 48 & -30 \\ 9 & -16 & 34 \end{pmatrix}$$

Exercice 23

1. la dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$, toute application ayant pour matrice une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) stricte
2. Commutativité pour $f \circ g$ et Formule de Leibniz pour $f + g$.
3. Observer que $\text{Id}_E^p - f^p = (\text{Id}_E - f) \circ (\text{Id}_E + f + f^2 + \dots + f^{p-1})$
4. Observer que $a - f = a \circ (\text{Id}_E - a^{-1} \circ f \circ a) \circ a^{-1}$ et appliquer l'exercice à $a^{-1} \circ f \circ a$.

Exercice 24

1. b) Soient $x, y \in E$ linéairement indépendants.
D'une part, $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$.
D'autre part, $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$
Ainsi, par unicité de la décomposition dans une base, on a

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

- c) Pour montrer que f est une homothétie, il faut montrer qu'il existe λ (constant!) tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x$$

Soit $x_0 \in E$ non nul. On pose $\lambda = \lambda_{x_0}$. On va montrer que pour tout $x \in E$, on a $\lambda_x = \lambda$.

★ Si x et x_0 sont linéairement indépendants, c'est fait (question précédente.)

★ Si x et x_0 sont colinéaires non nuls, comme x_0 est non nul, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = \alpha x_0$$

d'où

$$f(x) = \begin{cases} \alpha f(x_0) = \alpha \lambda x_0 \\ \lambda_x x = \lambda_x \alpha x_0 \end{cases}$$

Toujours parce que $x, x_0 \neq 0$, on obtient $\lambda_x = \lambda$.

★ Si $x = 0$, on a bien $f(x) = 0 = \lambda 0$.

★ Conclusion : on a bien $f(x) = \lambda x$.

2. Soit $\vec{x} \in E$,
- si x est nul, la famille $\{\vec{x}, f(\vec{x})\}$ est liée.
 - sinon complétons $\{\vec{x}\}$ en $\{\vec{x}, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ une base de E et considérons l'application linéaire g telle que

$$g(\vec{x}) = \vec{x} \text{ et } g(\vec{e}_i) = -\vec{e}_i \text{ pour tout } i.$$

alors

$$\ker(g - Id) = Vect\{\vec{x}\}$$

et comme $g \circ f = f \circ g$, on a

$$f(x) \in \ker(g - Id) = Vect\{\vec{x}\}$$

donc $\{\vec{x}, f(\vec{x})\}$ est liée.

Remarque : en fait il suffit que f commute avec tout automorphisme de E . C'est la preuve ci-dessus puisque $g \in GL(E)$.