

S3 - Circuits linéaires du premier ordre

Table des matières

1	Circuit RC série	1
1.1	Montage expérimental et oscillogrammes	1
1.2	Réponse indicielle	2
1.2.1	Calcul de la tension $u_C(t)$	2
1.2.2	Analyse des courbes	4
1.2.3	Durée du régime transitoire	5
1.2.4	Identification de la constante de temps	6
1.2.5	Calcul de $i(t)$	6
1.3	Régime libre	6
1.4	Influence de la fréquence de $e(t)$	7
2	Circuit RL série	9
2.1	Montage expérimental et oscillogrammes	9
2.2	Réponse indicielle	10
2.2.1	Calcul de $i(t)$	10
2.2.2	Calcul de $u_L(t)$	11
2.3	Régime libre	11

Définition d'un système du premier ordre

Un système est dit du premier ordre si l'équation différentielle qui le régit est d'ordre 1.

1 Circuit RC série

1.1 Montage expérimental et oscillogrammes

On considère une résistance $R = 1\text{ k}$ et un condensateur de capacité $C = 1\text{ }\mu\text{F}$ placés en série, dit circuit RC série ¹, alimenté par un générateur de tension carrée $e(t)$ de fréquence $f = 50\text{ Hz}$, de période T , variant de 0 V à $E = 1\text{ V}$ et de rapport cyclique $1/2$ (figure 1). A l'instant initial ($t = 0$), le condensateur est déchargé et $e(t)$ est sur un front montant.

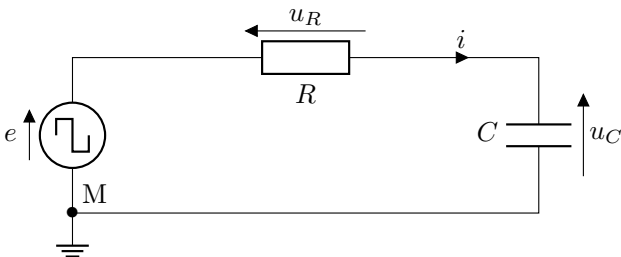


Figure 1 – Circuit RC série alimenté par une tension carrée

On observe la tension $e(t)$ sur la voie 1 de l'oscilloscope et la tension $u_C(t)$ sur la voie 2, on donne également le tracé de $i(t)$ en concordance des temps sur la figure 2.

1. <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/>

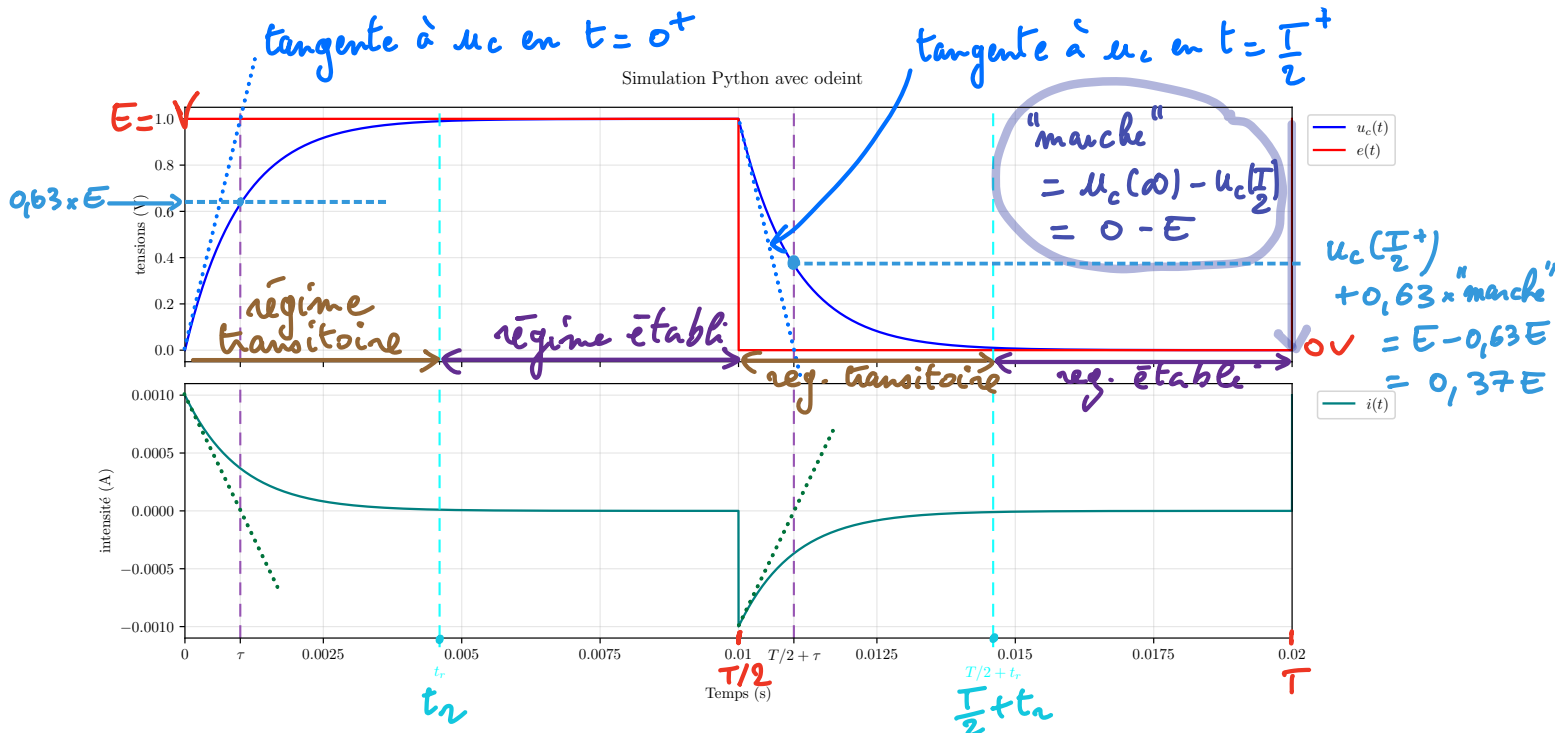


Figure 2 – Oscillogrammes d'une charge suivie d'une décharge

Propriété : Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

On rappelle une propriété du condensateur qui est mise en évidence ici : la **tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps**, alors que l'intensité du courant le traversant peut être discontinue.

1.2 Réponse indicielle

1.2.1 Calcul de la tension $u_C(t)$

Définition de la réponse indicielle d'un système

La réponse indicielle d'un circuit est définie comme sa réponse à un échelon de tension

Dans le cas présent, la réponse indicielle du circuit RC série correspond au cas où $t \in [0; T/2]$, le montage équivalent est représenté sur la figure 3.

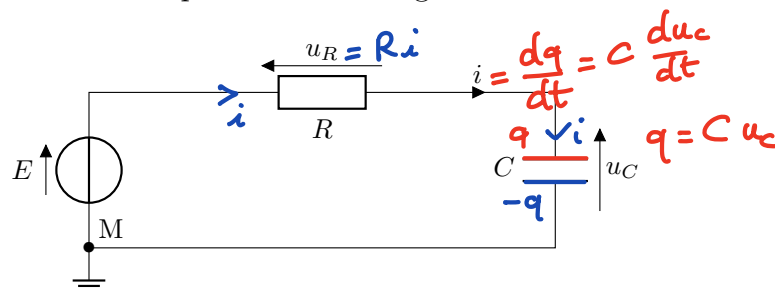


Figure 3 – Circuit RC équivalent lors de la phase de charge

L'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ est :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E \quad (1)$$

Démonstration : d'après la loi des Mailles :

$$R i + u_c = E$$

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

On doit avoir $\left[RC \frac{du_c}{dt} \right] = [E] \quad (\text{dimensions})$

$$\Rightarrow [RC] \frac{[u_c]}{T} = [E] \Rightarrow [RC] = T$$

Définition de la constante de temps du circuit RC série

On remarque que RC a la dimension d'un temps, on l'appelle **constante de temps** du circuit RC série et on la note τ :

$$\tau = RC$$

$$\text{ici } \tau = 10^3 \times 10^{-6} = 10^{-3} \text{ s.}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$u_C(t) = E \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (2)$$

Démonstration : à faire à la maison
puisque j'ai traité le cadre bleu ci-dessous.

Lien avec le cours de Mathématiques

Vous avez étudié en cours de Maths la résolution des équations différentielles du même type que (1) :

$$y' + ay = f(t) \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad (3)$$

Les correspondances avec l'équation (1) sont les suivantes : $u_C(t) = y$, $\frac{du_C}{dt} = y'$, $a = \frac{1}{\tau}$, $f(t) = \frac{E}{\tau}$.

◇ On commence par chercher la solution de l'équation homogène sans second membre associée à (3), notée $y_h(t)$:

$$y'_h + ay_h = 0 \Leftrightarrow y'_h e^{at} + ay_h e^{at} = 0 \Leftrightarrow (y_h e^{at})' = 0$$

$$\Leftrightarrow y_h e^{at} = A \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y_h(t) = A e^{-at} \Leftrightarrow u_{Ch}(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

◇ On cherche ensuite la solution particulière de (3), cette solution notée $y_p(t)$ doit nécessairement être du même type de $f(t)$, c'est à dire une constante dans notre cas. Cette solution particulière est donc trivialement :

$$\frac{du_{cp}}{dt} + \frac{u_{cp}}{\tau} = \frac{E}{\tau} \Rightarrow y_p(t) = u_{cp}(t) = E$$

◇ On sait ensuite que la solution générale de (3) est la somme de la solution de l'équation homogène sans second membre et de la solution particulière, soit :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \Leftrightarrow u_C(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$$

◇ Il reste à déterminer la constante d'intégration A en utilisant la condition initiale :

$$y(0) = u_C(0) = 0 \Leftrightarrow A e^0 + E = 0 \Leftrightarrow A = -E$$

◇ En conclusion on obtient finalement :

$$u_C(t) = -E e^{-t/\tau} + E \Rightarrow u_C(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

1.2.2 Analyse des courbes

◇ Lorsque $t \ll \tau$, le développement limité de la fonction exponentielle donne :

$$e^{-x} \sim 1 - x \quad \text{pour } x \ll 1 \Rightarrow \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx 1 - \frac{t}{\tau}$$

$$\Rightarrow u_C(t) \approx E \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \right) = \frac{E}{\tau} t$$

L'équation de cette droite correspond à la tangente à l'origine à la courbe $u_C(t)$ (la tracer sur l'oscillogramme de la figure 2).

◇ Lorsque $t \gg \tau$, la fonction exponentielle est telle que :

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx 0 \Rightarrow u_C(t) \approx E$$

L'équation de cette droite horizontale correspond à l'asymptote à la courbe $u_C(t)$.

Le point d'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote est tel que ² :

$$\frac{E}{\tau} t = E \Rightarrow t = \tau$$

Propriété de la tangente à l'origine

Lors de la réponse indicielle d'un système du premier ordre, la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$.

1.2.3 Durée du régime transitoire

Définition du temps de réponse du régime indicel

Par convention, on définit le **temps de réponse du système** (ici $u_C(t)$) comme l'instant t_r pour lequel le système a atteint 99% de la consigne (ici $e(t) = E$)

Ce qui se traduit mathématiquement par :

$$u_C(t_r) - \underbrace{u_C(0)}_0 = 0,99 E$$

$$\Rightarrow -E e^{-t_r/\tau} = -0,01 E$$

$$\Rightarrow E - E \exp\left(-\frac{t_r}{\tau}\right) = 0,99 E \Rightarrow \exp\left(-\frac{t_r}{\tau}\right) = 0,01 \Rightarrow t_r = \ln(100) \times \tau \approx 4,6 \tau$$

Propriété : Temps de réponse indicielle

Le temps de réponse indicielle d'un circuit du premier ordre est de $4,6 \tau$.

Définition du régime transitoire et du régime établi

Le **régime transitoire** correspond aux temps tels que $t < t_r$ et le **régime établi** à ceux tels que $t > t_r$. (indiquer les deux régimes sur le graphique).

2. <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/Condensateur.php>

1.2.4 Identification de la constante de temps

Plutôt que d'utiliser la propriété de la tangente à l'origine, moins précise, on préférera utiliser la propriété suivante :

$$u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) = 0,63 E$$

Dans le cas général (cette propriété sera démontrée en TD), on peut déterminer expérimentalement la constante de temps d'un circuit du premier ordre de la manière suivante :

- on repère la valeur finale $u_{C\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u_C(t)$ et la valeur initiale $u_C(t_0)$
- on repère la valeur de τ qui est l'instant pour lequel :

$$u_C(t_0 + \tau) = \underbrace{u_C(t_0)}_{\text{val. initiale}} + 0,63 \times \underbrace{(u_{C\infty} - u_C(t_0))}_{\text{"marché" à franchir.}}$$

1.2.5 Calcul de $i(t)$

La méthode Shadok³ pour déterminer $i(t)$ consisterait à trouver son équation différentielle puis à la résoudre, on lui préférera la méthode suivante :

Rappel : $u_C(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{CE}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$\tau = RC$

On retrouve les mêmes propriétés que pour $u_C(t)$ (tracer la tangente à l'origine et l'asymptote).

1.3 Régime libre

Définition du régime libre

Le régime libre d'un circuit est défini comme sa réponse pour une entrée nulle, les valeurs initiales des grandeurs électriques n'étant pas toutes nulles.

Le régime libre correspond ici au cas où $t \in [T/2; T]$, le montage équivalent est alors le suivant représenté sur la figure 4.

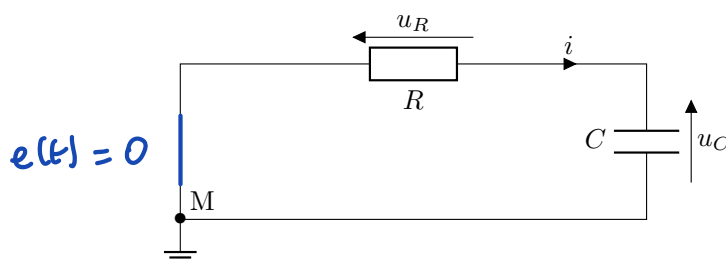


Figure 4 – Circuit RC équivalent lors de la phase de décharge (régime libre)

L'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ est :

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = 0$$

(2)
 $e(t)$ pendant cette phase de décharge.

3. Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?!

La solution de cette équation différentielle est :

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{t - T/2}{\tau}\right)$$

Démonstration : la solution générale de (2) est $u_c(t) = A e^{-t/\tau}$
 Or $u_c(T/2) = E \Rightarrow A e^{-T/(2\tau)} = E \Rightarrow A = E e^{+T/(2\tau)}$
 Au final : $u_c(t) = E e^{T/(2\tau)} \cdot e^{-t/\tau}$
 $= E \exp\left[-\frac{1}{\tau} \left(t - T/2\right)\right]$

1.4 Influence de la fréquence de $e(t)$

Lorsque la fréquence de $e(t)$ est telle que le condensateur n'a pas le temps de se charger complètement pour $t \in [0; T/2]$ puis de se décharger complètement pour $t \in [T/2; T]$, les oscillogrammes mettent en évidence un régime transitoire de durée $t_r = 4,6\tau$ suivi d'un régime périodique établi (identifier ces deux régimes sur les oscillogrammes) :

◇ Pour $f = 500$ Hz, soit $T = 2 \text{ ms} = 2\tau$ (figure 5) :

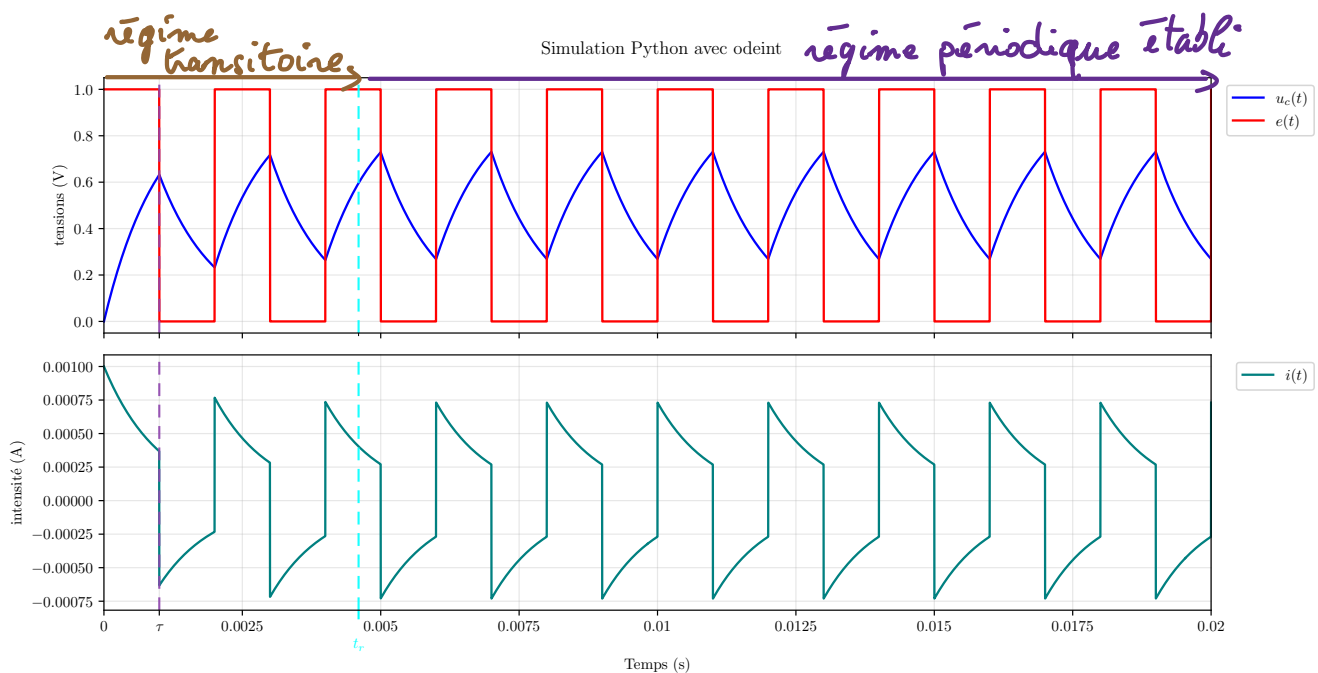


Figure 5 – Oscillogrammes pour une tension $e(t)$ de fréquence $f = 500$ Hz

◇ Pour $f = 5000$ Hz, soit $T = 0,2 \text{ ms} = 0,2\tau$ (figure 6) :

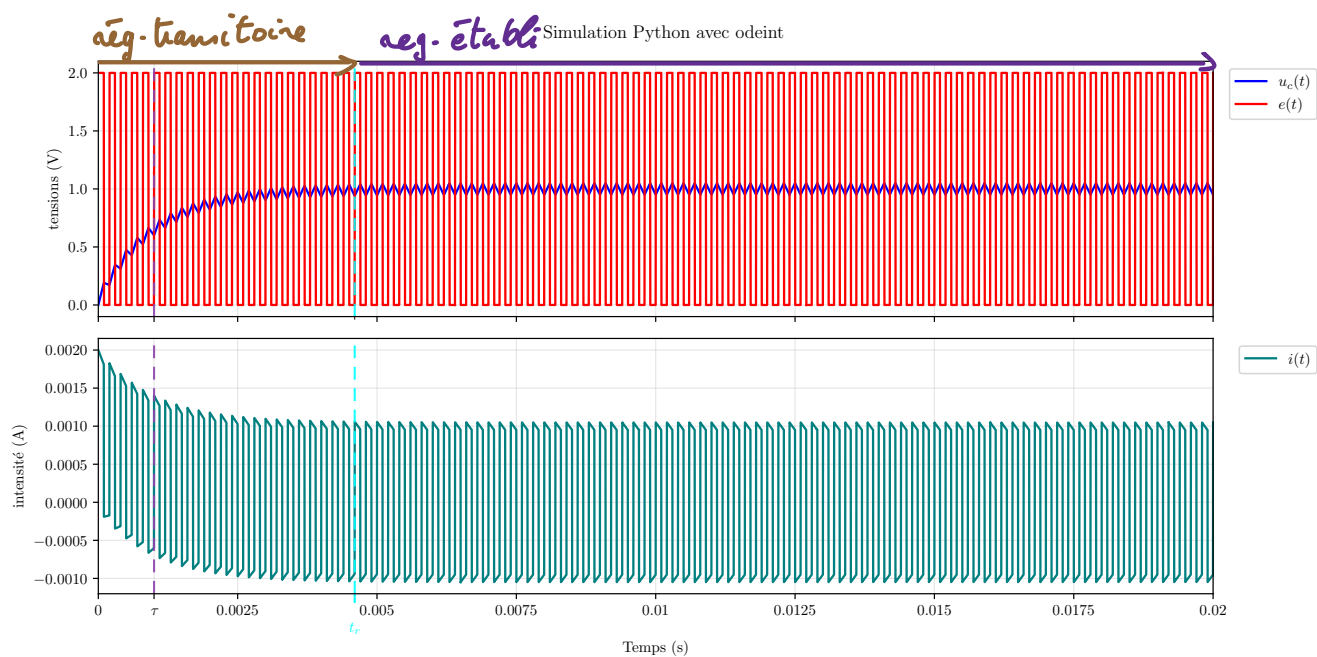


Figure 6 – Oscillogrammes pour une tension $e(t)$ de fréquence $f = 5000 \text{ Hz}$

2 Circuit RL série

2.1 Montage expérimental et oscillogrammes

On considère une bobine d'inductance $L = 1 \text{ H}$ une résistance $R = 1 \text{ k}$ placés en série, dit circuit RL série, alimenté par un générateur de tension carrée $e(t)$ de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, de période T , variant de 0 V à $E = 1 \text{ V}$ et de rapport cyclique $1/2$ (figure 7). A l'instant initial ($t = 0$), l'intensité du courant dans la bobine est nulle et $e(t)$ est sur un front montant.

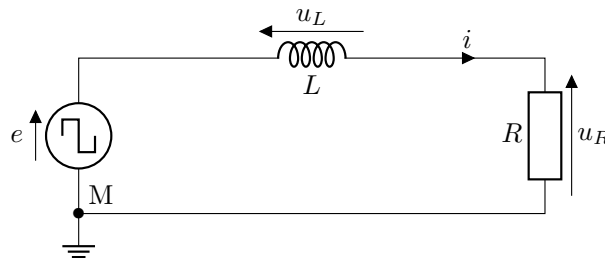


Figure 7 – Circuit RL série alimenté par une tension carrée

On observe la tension $e(t)$ sur la voie 1 de l'oscilloscope et la tension $u_R(t)$ sur la voie 2, on donne également le tracé de $u_L(t)$ et $i(t)$ en concordance des temps sur la figure 8.

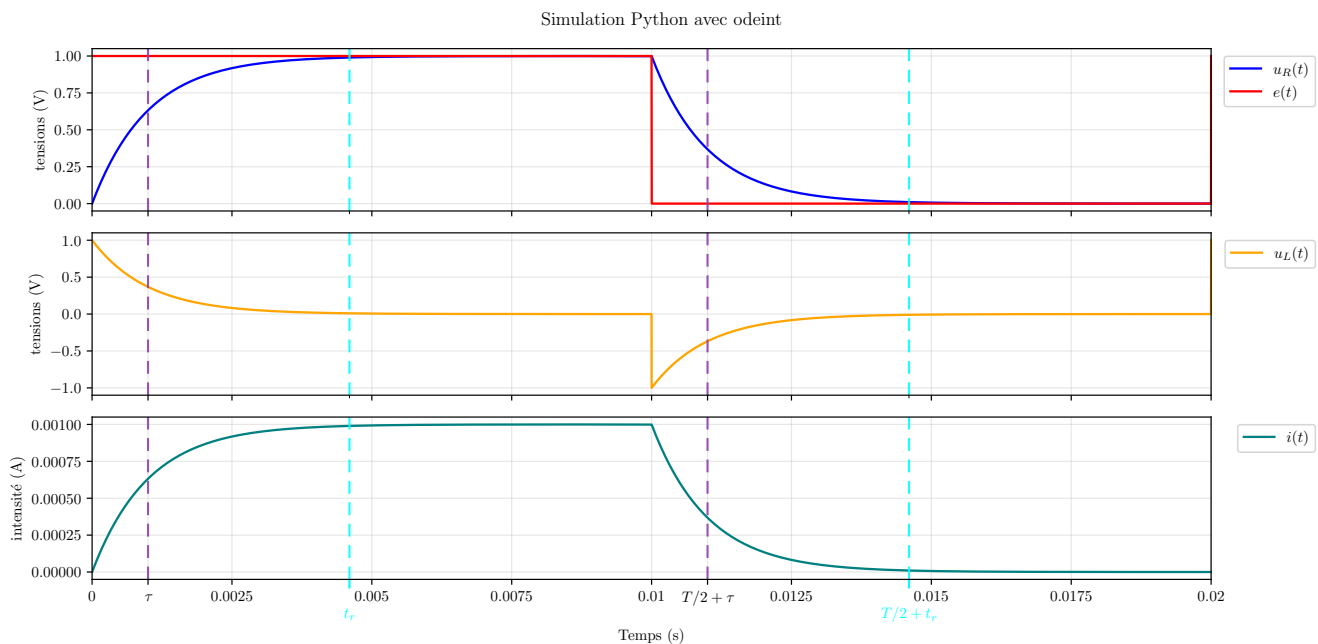


Figure 8 – Oscillogrammes pour le circuit RL série

Propriété : Continuité de l'intensité du courant traversant une bobine

On rappelle une propriété de la bobine qui est mise en évidence ici : **l'intensité du courant traversant une bobine est une fonction continue du temps**, alors que la tension à ses bornes peut être discontinue.

2.2 Réponse indicielle

2.2.1 Calcul de $i(t)$

La réponse indicielle d'un circuit correspond ici au cas où $t \in [0; T/2]$, le montage équivalent est représenté sur la figure 9.

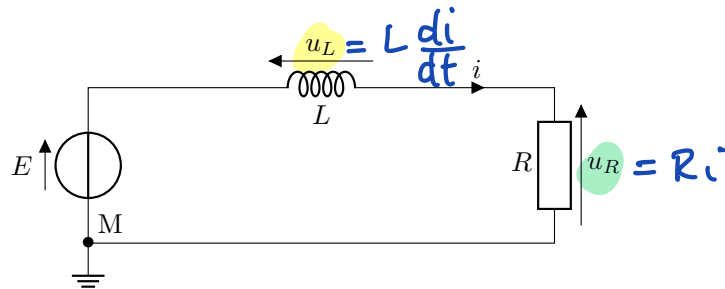


Figure 9 – Circuit RL série équivalent lorsque $e(t) = E$ (accumulation d'énergie dans L)

L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ est :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i(t) = \frac{E}{R} \quad (3)$$

Démonstration : *loi des mailles :*

$$\begin{aligned} Ri + L \frac{di}{dt} &= E \\ \Rightarrow \left(\frac{L}{R} \right) \frac{di}{dt} + i &= \frac{E}{R} \quad \times \frac{1}{R} \end{aligned}$$

τ

Définition de la constante de temps du circuit RL série

On remarque que $\frac{L}{R}$ a la dimension d'un temps, on l'appelle **constante de temps** du circuit RL série et on la note τ :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

Démonstration : (3) : $\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$

* Sol. de l'éq homogène : $i_h(t) = A e^{-t/\tau}$

* Sol. particulière est constante car du même type que $\frac{E}{R}$: $\tau \frac{di_p}{dt} + i_p = \frac{E}{R}$

* Sol. générale : $i(t) = i_h + i_p = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$

On $i(0) = 0 \Rightarrow A e^0 + E/R = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$.

Tracer la tangente à l'origine et l'asymptote sur la figure 8.

2.2.2 Calcul de $u_L(t)$

Pour la bobine, on sait que :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{LE}{R\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \stackrel{\tau = \frac{L}{R}}{=} E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Tracer la tangente à l'origine et l'asymptote sur la figure 8.

2.3 Régime libre

Le régime libre d'un circuit correspond ici au cas où $t \in [T/2; T]$, le montage équivalent est représenté sur la figure 10.

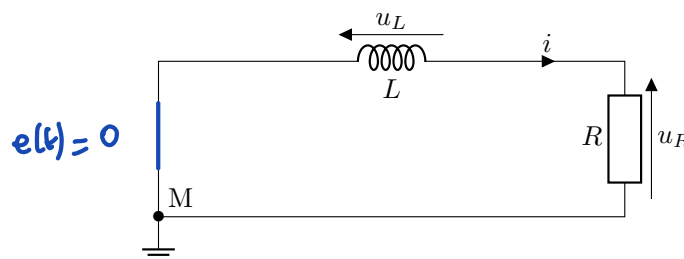


Figure 10 – Circuit RL série en régime libre lorsque $e(t) = 0$

L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ est :

$$\left(\frac{L}{R}\right) \frac{di}{dt} + i(t) = 0 \quad (4)$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t - T/2}{\tau}\right)$$

Démonstration : Condition initiale : $i(T/2) = \frac{E}{R}$ (C.I.)

- Solution générale de (4) : $i(t) = A e^{-t/\tau}$
- puis (C.I.) donne $A e^{-T/(2\tau)} = \frac{E}{R} \Rightarrow A = \frac{E}{R} e^{T/(2\tau)}$
- Au final : $i(t) = \frac{E}{R} e^{T/(2\tau)} e^{-t/\tau}$
 $= \frac{E}{R} \exp\left[-\frac{1}{\tau} \left(t - \frac{T}{2}\right)\right]$