

Exercice 1. Gain moyen

Une urne contient 2 boules rouges, 3 boules blanches et 5 boules noires. Un jeu consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne. Chaque boule rouge fait gagner 3€, une blanche rapporte 2€ et une noire coûte 3€.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le "gain algébrique" (éventuellement négatif).

1. Calculer la loi de probabilité de X .
2. Le jeu est-il équitable ?
3. Quelle valeur faut-il donner à une boule rouge pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 2. Tirages successifs

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement et sans remise 5 boules. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues.

1. Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$.
2. Trouver une relation liant X et Y . En déduire la loi de Y ainsi que son espérance.

Exercice 3. Retrouver la loi

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 2, 4, 6 et 8. Déterminer la loi de X sachant que :

$$\mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X > 6) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 2) = P(X = 4).$$

Calculer alors $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4. Retrouver le paramètre

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ dont la loi vérifie :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = \alpha \times k.$$

1. Calculer α .
2. Déterminer l'espérance et la variance de X . On pourra utiliser la formule :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

3. Déterminer la loi et l'espérance de $Y = X + 1$.

Exercice 5. Loi d'un dé truqué

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X , calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y , et son espérance.

Exercice 6. Chaîne de Markov

Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k , alors à l'instant $n + 1$, il sera sur le point d'abscisse $k + 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$ et en 0 sinon. On appelle X_n la variable égale à l'abscisse du mobile à l'instant n . On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1 .
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = p \mathbb{P}(X_{n-1} = k - 1).$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E(X_n) = p E(X_{n-1}) + p$$

puis déterminer $E(X_n)$ en fonction de n et p .

Exercice 7. Vaches laitières

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie avec la probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie dans une étable de n vaches, on procède à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

- **Première méthode** : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
- **Deuxième méthode** : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose

$$Y_n = \frac{X_n}{n}.$$

1. Déterminer la loi de Y_n , et montrer que

$$E(Y_n) = 1 + \frac{1}{n} - 0.85^n.$$

2. Etudier la fonction $f(x) = ax + \ln(x)$, pour $a = \ln(0.85)$.
3. On précise que $\ln(0.85) \approx -0.163$, $\ln(17) \approx 2.83$ et $\ln(18) \approx 2.89$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
4. Montrer que

$$f(n) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad E(Y_n) < 1.$$

En déduire la réponse (en fonction de n à la question posée).

Exercice 8. Transformation d'une loi binomiale

Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Donner (puis reconnaître) la loi de $Y = n - X$.

Exercice 9. Code de la route

L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p . On note, pour $1 \leq i \leq 40$,

A_i l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i -ème question".

On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $P(A_i)$.
2. Déterminer la loi de S .
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 35 bonnes réponses ?

Exercice 10. Théorème de transfert

Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. Calculer l'espérance de $Y = 2^X$
2. (a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer que

$$\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Calculer l'espérance de $Z = \frac{1}{X+1}$.

Exercice 11. Méthode du maximum de vraisemblance

Un étang contient des brochets et des truites. On note p la proportion de truites dans l'étang. On souhaite évaluer p . On prélève 20 poissons au hasard. On suppose que le nombre de poissons est suffisamment grand pour que ce prélèvement s'apparente à 20 tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de truites obtenues.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Le prélèvement a donné 8 truites. Pour quelle valeur de p la quantité $P(X = 8)$ est-elle maximale ?

Exercice 12. Variable aléatoire dépendant d'une loi binomiale

Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué :

- Si $X = k$ avec $k > 0$ alors le compteur affiche la bonne valeur.
- Si $X = 0$, alors le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n .

On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Montrer que $E(Y) \geq E(X)$.