Nombre complexe : point de vue algébrique

1 L'ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$

Définition : nombre complexe

Soient a et b deux nombres réels.
On appelle **nombre complexe** un nombre z s'écrivant sous la forme :

$$z = a + ib$$

où i est tel que $i^2 = -1$.
a est appelé la **partie réelle** de z et b est sa **partie imaginaire**.
On note $a =$Re(z) et $b =$ Im(z).
La forme $z = a + ib$ d'un nombre complexe est appelée **forme algébrique**.

Définition : ensemble des nombres complexes

L'ensemble de tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. Il contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Exemple

$z = 3 + 5i$ est un nombre complexe. Sa partie réelle vaut 3 et sa partie imaginaire vaut 5.
$z = 2 - 3i$ est un nombre complexe. Sa partie réelle vaut 2 et sa partie imaginaire vaut -3.
π est un nombre complexe, sa partie imaginaire vaut 0.

Remarques

- Tous les nombres réels sont des nombres complexes dont la partie imaginaire vaut 0.
- Quand un nombre complexe est de la forme $z = ib$, de partie réel nulle, on parle d'imaginaire pur.
- On peut additionner, soustraire, multiplier deux nombres complexes. On peut également les diviser, à condition de ne pas diviser par 0.

Exemple

Soient $z = 3 + 5i$ et $z' = 2 - 3i$.

$$\begin{aligned} z + z' &= 3 + 5i + 2 - 3i \\ &= 5 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - z' &= 3 + 5i - (2 - 3i) \\ &= 1 + 8i \end{aligned}$$

Suite de l'exemple

$$\begin{aligned} z \times z' &= (3+5i)(2-3i) \\ &= 3\times 2 + 3\times(-3i) + 5i\times 2 + 5i\times(-3i) \\ &= 6 - 9i + 10i + 15 \\ &= 21 + i \end{aligned}$$

2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition : conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par :

$$\bar{z} = a - ib$$

Il s'agit du nombre complexe ayant la même partie réelle que z mais dont la partie imaginaire est l'opposée de celle de z.

Propriété : conjugué et opérations

Soit z et z' deux nombres complexes. Soit n en entier naturel non nul.

(1) $\bar{\bar{z}}$

(2) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

(3) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

(4) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

(5) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$

(6) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

Démonstration

Posons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

(1) $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.

(2) $$\begin{aligned} \overline{z+z'} &= \overline{a + ib + a' + ib'} \\ &= a + a' - i(b+b') \\ &= a - ib + a - ib' \\ &= \bar{z} + \bar{z'} \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} \overline{z \times z'} &= \overline{(a+ib)(a'+ib')} \\ &= \overline{aa' + iab' + iba' + i^2bb'} \\ &= \overline{aa' - bb' + i(ab' + ba')} \\ &= aa' - bb' - i(ab' + ba') \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{et } \bar{z} \times \bar{z'} &= (\overline{a+ib}) \times (\overline{a'+ib'}) \\ &= (a - ib)(a' - ib') \\ &= aa' - bb' - i(ab' + ba') \end{aligned}$$
On a donc bien $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

Suite des démonstrations

(4) **Initialisation** Triviale pour $n = 1$.

Hérédité Supposons que pour un entier $n \geqslant 1$ on ait $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} \\ &= \overline{z^n} \times \bar{z} \text{ d'après la propriété (3)} \\ &= \bar{z}^n \times \bar{z} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \bar{z}^{n+1}\end{aligned}$$

Conclusion La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour $n \geqslant 1$. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(5) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\dfrac{1}{a+ib}\right)} = \left(\dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}\right) = \overline{\left(\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \overline{\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b}{a^2+b^2}i$

et $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{a-ib} = \dfrac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \dfrac{a+ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b}{a^2+b^2}i$.

On a donc bien $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

(6) $$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$$

Propriété : inverse d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué. On a :

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Propriété : inverse d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué. On a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

Exemple

Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = 2 - 3i$.

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3+5i} = \dfrac{3-5i}{(3+5i)(3-5i)} = \dfrac{3-5i}{9+25} = \dfrac{3}{34} - \dfrac{5}{34}i$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{3+5i}{2-3i} = \dfrac{(3+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{-9+19i}{13} = \dfrac{-9}{13} + \dfrac{19}{13}i$

3 Formule du binôme

Théorème : formule du binôme

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient deux nombres complexes a et b. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Démonstration

Soit la propriété suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Initialisation Pour $n = 0$:

D'une part :$(a+b)^0 = 1$ et d'autre part : $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité Supposons que pour un entier $n \geqslant 0$, la propriété soit vraie.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1} b^k + b^{n+1} \quad \text{A l'aide de la relation de Pascal} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + {}_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

Suite de la démonstration

La proposition est donc vraie au rang $n+1$: elle est donc héréditaire.

Conclusion La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire pour $n \geqslant 0$. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exemple

On souhaite calculer, à l'aide du triangle de Pascal et de la formule du binôme $(2-i)^4$.

$$\begin{aligned}(2-i)^4 &= 2^2 + 4\times 2^3 \times (-i) + 6\times 2^2 \times (-i)^2 + 4\times 2\times (-i)^3 + (-i)^4 \\ &= 16 - 32i - 24 + 8i + 1 \\ &= -7 - 24i\end{aligned}$$

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

Exercices sur les nombres complexes (1)

> Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes

Exercice n°1 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $(3+i)(5-i)$ **b.** $(7+2i)(10-i)$ **c.** $(-7+2i)^2$

Exercice n°2 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $\dfrac{2}{2-i}$ **b.** $\dfrac{1+i}{8-4i}$ **c.** $\dfrac{3-4i}{1+i}$

Exercice n°3 Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants et donner sa forme algébrique.

a. $(3+i)(-13-2i)$ **b.** $i(1-i)^3$ **c.** $\dfrac{2-3i}{8+5i}$

> Résoudre une équation du type $az = b$

Exercice n°4 Résoudre les équations suivantes :

a. $iz = 1+2i$ **b.** $(1+i)z = 5$ **c.** $4z = i-2$

Exercice n°5 Résoudre les équations suivantes :

a. $3z + 2iz = 3-i$ **b.** $(5-i)(z+3) = i$

> Résoudre une équation faisant intervenir z et $\bar{z}$

Exercice n°6 Résoudre les équations suivantes :

a. $z+\bar{z} = 6$ **b.** $z + 2\bar{z} = 8+i$ **c.** $z+\bar{z} = i$

Exercice n°7 Résoudre les équations suivantes :

a. $i\bar{z} + 2(z-5) = 0$ **b.** $3 + iz + 2i = z$ **c.** $(3+i)z - 3(5z-2) = 0$

Correction des exercices sur les nombres complexes (1)

> Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes

Exercice n°1

a. $(3+i)(5-i) = 15 - 3i + 5i - i^2 = 15 - 3i + 5i + 1 = 16 + 2i$

b. $(7+2i)(10-i) = 70 - 7i + 20i - 2i^2 = 70 + 13i + 2 = 72 + 13i$

c. $(-7+2i)^2 = (-7)^2 + 2 \times (-7) \times 2i + (2i)^2 = 49 - 28i - 4 = 45 - 28i$

Exercice n°2

a. $\dfrac{2}{2-i} = \dfrac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{4+2i}{5} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i$

b. $\dfrac{1+i}{8-4i} = \dfrac{(1+i)(8+4i)}{(8-4i)(8+4i)} = \dfrac{8+4i+8i+4i^2}{64+16} = \dfrac{4+12i}{80} = \dfrac{1}{20} + \dfrac{3}{20}i$

c. $\dfrac{3-4i}{1+i} = \dfrac{(3-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-1-5i}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$

Exercice n°3

a. $\overline{(3+i)(-13-2i)} = (3-i)(-13+2i) = -39 + 6i + 13i + 2 = -37 + 19i$

b. $\overline{i(1-i)^3} = -i(1+i)^3 = -i(1+3i-3-i) = 2i + 2$

c. $\overline{\left(\dfrac{2-3i}{8+5i}\right)} = \dfrac{2+3i}{8-5i} = \dfrac{(2+3i)(8+5i)}{(8-5i)(8+5i)} = \dfrac{16+10i+24i-15}{64+25} = \dfrac{1}{89} + \dfrac{34}{89}i$

> Résoudre une équation du type $az = b$

Exercice n°4

a. $iz = 1+2i \Leftrightarrow z = \dfrac{1+2i}{i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+2i) \times (-i)}{i \times (-i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i - 2 \times (-1)}{1}$$

$$\Leftrightarrow z = 2 - i$$

b. $$\begin{aligned}(1+i)z = 5 &\Leftrightarrow z = \frac{5}{1+i}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{5(1-i)}{(1-i)(1+i)}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{5-5i}{2}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}4z = i-2 &\Leftrightarrow z = \frac{i-2}{4}\\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\end{aligned}$$

Exercice n°5

a. $$\begin{aligned}3z + 2iz = 3 - i &\Leftrightarrow (3+2i)z = 3-i\\ &\Leftrightarrow z = \frac{3-i}{3+2i}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{(3-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{9-9i-2}{13}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{7}{13} - \frac{9}{13}i\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(5-i)(z+3) = i &\Leftrightarrow (5-i)z + (5-i)\times 3 = i\\ &\Leftrightarrow z(5-i) = i - 15 + 3i\\ &\Leftrightarrow z(5-i) = -15 + 4i\\ &\Leftrightarrow z = \frac{-15+4i}{5-i}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{(-15+4i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{-75-15i+20i+4i^2}{26}\\ &\Leftrightarrow z = -\frac{79}{26} + \frac{5}{26}i\end{aligned}$$

> Résoudre une équation faisant intervenir z et $\bar{z}$

Exercice n°6 On posera $z = a + ib$.

a. $z + \bar{z} = 6 \Leftrightarrow a + ib + a - ib = 6$

$\Leftrightarrow 2a + 0bi = 6$

$\Leftrightarrow a + 0bi = 3$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{3 + ib\,;\, b \in \mathbb{R}\}$.

b. $z + \bar{z} = i \Leftrightarrow a + ib + a - ib = i$

$\Leftrightarrow 2a + 0i = 0 + i$

Cette équation n'admet pas de solution.

c. $z = 2\bar{z} = 8 + i \Leftrightarrow a + ib + 2(a - ib) = 8 + i$

$\Leftrightarrow 3a - ib = 8 + 1$

$\Leftrightarrow 3a = 8 \text{ et } -b = 1$

Cette équation admet une unique solution $z = \dfrac{8}{3} - i$

Exercice n°7 On posera $z = a + ib$.

a. $i\bar{z} + 2(z - 5) = 0 \Leftrightarrow i(a - ib) + 2a + 2ib - 10 = 0$

$\Leftrightarrow ia - i^2 + 2a + 2ib = 0$

$\Leftrightarrow (b + 2a - 10) + i(a + 2b) = 0$

Il faut donc que $2a + b - 10 = 0$ et que $a + 2b = 0$. On trouve alors $a = \dfrac{20}{3}$ et $b = \dfrac{-10}{3}$.
L'unique solution de l'équation est donc le nombre complexe $z = \dfrac{20}{3} - \dfrac{10}{3}i$.

b. $3 + iz + 2i = z \Leftrightarrow iz - z = -3 - 2i$

$\Leftrightarrow z(-1 + i) = -3 - 2i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-3 - 2i}{-1 + i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(-3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1 + 5i}{2}$

L'unique solution de cette équation est $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$.

c. $$\begin{aligned}(3+i)z-3(5z-2)=0 &\Leftrightarrow (3+i)z-15z+6=0\\ &\Leftrightarrow z(-12+i)=-6\\ &\Leftrightarrow z=\frac{-6}{-12+i}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{6(12+i)}{(12-i)(12+i)}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{72+6i}{145}\end{aligned}$$

L'unique solution de cette équation est $z=\dfrac{72}{145}+\dfrac{6}{145}i$.