

Fiches d'Exercices de BCPST1

Tristan Poullaouec

Année 2025-26

Table des matières

Table des matières	i
I – Équations et inéquations	1
1/ Règles de calcul	1
2/ Résolution d'équations	2
3/ Résolution d'inéquations	3
II – Trigonométrie	4
1/ Le cercle trigonométrique	4
2/ Formules de trigonométrie	4
3/ Équations trigonométriques	5
III – Le langage mathématique	6
1/ Notions de logique	6
2/ L'art de la démonstration	7
IV – Calculs de limites et de dérivées	8
1/ Calculs de limites	8
2/ Calculs de dérivées	9
3/ Relations de comparaison	9
V – Ensembles et applications	11
1/ Théorie des ensembles	11
2/ Applications	12
VI – Les nombres complexes	13
1/ Définitions et propriétés algébriques	13
2/ Argument et exponentielle complexe	14
VII – Généralités sur les fonctions réelles	15
VIII – Études de fonctions	17
1/ Éléments de symétrie	17
2/ Limites et asymptotes	17
3/ Applications de la dérivation	18
4/ Études complètes de fonctions	19
IX – Calcul intégral	20
1/ Définition et propriétés fondamentales	20
2/ Recherches de primitives	21
3/ Sommes de Riemann	22

X – Équations différentielles	23
1/ Équations du premier ordre	23
2/ Équations du second ordre	24
XI – Autour de la récurrence	26
XII – Ensembles finis et dénombrement	28
XIII – Systèmes linéaires	30
XIV – Géométrie du plan et de l'espace	32
1/ Généralités et repérage	32
2/ Produit scalaire	32
3/ Déterminant	33
4/ Droites et cercles du plan	34
5/ Droites et plans de l'espace	35
XV – Les statistiques descriptives	36
1/ Statistiques univariées	36
2/ Statistiques bivariées	37
XVI – Les polynômes réels	38
1/ L'ensemble $\mathbb{R}[X]$	38
2/ Racines d'un polynôme	39
XVII – Les développements limités	40
1/ Développements en 0	40
2/ Développements en l'infini	41
XVIII – Fonctions usuelles	42
1/ Les fonctions valeur absolue et partie entière	42
2/ Logarithme népérien et exponentielle	42
3/ Puissances réelles	43
4/ Les fonctions circulaires	44
XIX – Les matrices	45
XX – Nombres et suites réels	46
1/ Généralités	46
2/ Limites de suites	47
3/ Suites monotones	48
XXI – Limites et continuité	50
XXII – Dérivabilité	52
XXIII – Les espaces vectoriels	54
XXIV – Les applications linéaires	56

XXV – Probabilités sur un univers fini	60
1/ Calculs « simples »	60
2/ Probabilités conditionnelles	62
3/ Indépendance d'événements	64
XXVI – Variables aléatoires et lois usuelles	67
1/ Espérance et Variance	67
2/ Lois usuelles	69
XXVII – Fonctions de deux variables	70

I – Équations et inéquations

1/ Règles de calcul

Exercice 1. Développer et simplifier les expressions suivantes :

- (a) $(3x + 2)(5 - 2x)$ (b) $(x - 1)(3x^2 - 2)$ (c) $2(3 - 2x)x - 2(x - 2)$
(d) $(5x + 1)(2(x - 1) - 5x)$ (e) $(2 + 2(x - 5))(x - 1)$ (f) $(x + 1)^2 + (2x - 1)^2$

Exercice 2. Même exercice :

- (a) $(3x + 2)^2$ (b) $(5x - 6)^2$ (c) $(3 - 2x)(3 + 2x)$ (d) $(x - 2)(4x + 8)$

Exercice 3. Factoriser les expressions suivantes :

- (a) $(3x - 1)(2x + 1) + (5 - x)(2x + 1)$ (b) $(3x + 4)(2x - 1) + 4(3x + 4)$
(c) $(3 - 2x)(x + 1) + (3 - 2x)^2$ (d) $(x + 1)(x - 1) + (2x + 3)(5x + 5)$

Exercice 4. Même exercice :

- (a) $3(2x - 2) + (x + 1)(1 - x)$ (b) $2x(x + 1) + (x + 1)(x^2 + 1)$
(c) $12x^2 - 6x + (2x - 1)(5 - 2x)$ (d) $25x^2 - 9 + 4(x + 7)(5x + 3)$

Exercice 5. Effectuer les calculs ci-dessous, en simplifiant au maximum les résultats :

- (a) $\frac{7}{5} + \frac{8}{5}$ (b) $\frac{13}{10} + \frac{6}{5}$ (c) $\frac{6}{21} + \frac{1}{7}$ (d) $\frac{5}{6} + \frac{7}{24}$
(e) $\frac{2}{7} + \frac{6}{11}$ (f) $\frac{5}{8} + 2$ (g) $\frac{6}{8} - \frac{-2}{6}$ (h) $-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - \frac{5}{6}$

Exercice 6. Simplifier les fractions suivantes :

- (a) $\frac{5 \times 21}{14 \times 20}$ (b) $\frac{15 \times 12}{9 \times 25}$ (c) $\frac{24 \times 28}{18 \times 7}$ (d) $\frac{99 \times 25}{22 \times 125}$
(a) $\frac{9 \times 12 \times 10}{27 \times 10 \times 6}$ (b) $\frac{3 \times 6}{8 \times 12 \times 18}$ (c) $\frac{24}{72} \times \frac{30}{20}$ (d) $\frac{27}{18} \times \frac{6}{5}$

Exercice 7. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

- (a) $8^2 \times 4^5$ (b) $(11^5)^{-4}$ (c) $4^8 \times 3^{-8}$ (d) $5,2^4 \times 10000$ (e) $7^5 \div 7^{-3}$
(f) $48^5 \times 18^{-4}$ (g) $35^3 \times 12^4 \times 28^{-5}$ (h) $55^4 \times 22^5 \times 10^{-3}$ (i) $39^5 \times 65^6 \times 15^{-2}$

Exercice 8. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ la plus simple possible :

(a) $\sqrt{48}$ (b) $\sqrt{360}$ (c) $3\sqrt{6} \times 4\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{39} \times 2\sqrt{13}$

Exercice 9. Écrire les fractions suivantes sans radical au dénominateur :

(a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{48}}$ (b) $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ (c) $\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{11}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$

2/ Résolution d'équations

Exercice 10.

Un rectangle voit son aire doubler lorsque l'on augmente sa largeur de 4 cm et sa longueur de 3 cm. Quelle est l'aire de ce rectangle, sachant que sa largeur initiale est 7 cm ?

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes :

(a) $x^2 + 4 = x + 4$ (b) $x(x - 3) - x^2 = 0$ (c) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 0$
(d) $(5x - 1)(2 - x) + (2x - 4)(3 - 2x) = 0$ (e) $-(12x - 2)(2 - 3x) = 36x^2 - 12x + 1$

Exercice 12. Même exercice :

(a) $\frac{x-5}{x-1} + \frac{4}{x+1} = 0$ (b) $\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{3-x}$ (c) $\frac{2x-2}{x-1} = \frac{3x+3}{2x+1}$
(d) $\frac{x+3}{3x+2} = \frac{x-2}{3x+3}$ (e) $\frac{(x-2)x}{x+1} = \frac{2x^2+1}{x+1}$ (f) $\frac{2x-3}{3x+1} + \frac{3-2x}{x+4} = 0$

Exercice 13. Résoudre les équations du second degré suivantes :

(a) $x^2 + x - 1 = 0$ (b) $-3x^2 + 6x - 2 = 0$ (c) $x^2 + 5x + 2 = 0$
(d) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ (e) $2x^2 - 13x + 15 = 0$ (f) $4x^2 + 4x - 5 = 0$

Exercice 14. Trouver une équation du second degré dont les solutions sont $\sqrt{3} - 1$ et $\sqrt{3} + 1$.

Exercice 15.

Trouver deux nombres dont la somme vaut $S = 12$ et le produit $P = 20$.

Procéder de même avec $S = 5$ et $P = -14$

Exercice 16. En s'aidant de racines évidentes, factoriser les polynômes suivants :

(a) $x^2 + x - 2$ (b) $2x^2 + 3x + 1$ (c) $4x^2 + x - 3$

Exercice 17.

En choisissant un changement de variable adapté, résoudre les équations suivantes :

(a) $x^4 - x^2 - 6 = 0$ (b) $4x^4 + 9x^2 + 2 = 0$ (c) $\frac{5}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 = 0$
(d) $4x + 5\sqrt{x} - 9 = 0$ (e) $6x + 11\sqrt{x} + 3 = 0$ (f) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

Exercice 18.

Résoudre les équations suivantes à l'aide du changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$:

$$(a) \quad x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$(b) \quad x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 8x + 1 = 0$$

Exercice 19. Résoudre les équations suivantes :

$$(a) \quad |4x + 1| = 3$$

$$(b) \quad |x + 1| = |x - 3|$$

$$(c) \quad |3x - 2| = 2x + 4$$

$$(d) \quad |x + 2| + |x - 5| = 11$$

$$(e) \quad 2|x + 2| + |x - 5| = 9$$

$$(f) \quad |x + 2| - 2|x - 5| = 5$$

Pour les trois dernières, on s'aidera d'un tableau afin de simplifier les expressions proposées.

3/ Résolution d'inéquations

Exercice 20.

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(a) \quad -3x + 7 \leq x + 2$$

$$(b) \quad -6(x + 5) < x + 5$$

$$(c) \quad \frac{x+1}{4} \geq \frac{x-2}{3}$$

$$(d) \quad (2x + 4)(2 - x) \geq 0$$

$$(e) \quad x^3 \leq x$$

$$(f) \quad (x + 1)(1 - x) > (2x - 1)(x + 1)$$

$$(g) \quad \frac{x^2 - 1}{x + 2} < 0$$

$$(h) \quad \frac{2x + 1}{x - 3} > -1$$

$$(i) \quad \frac{2x - 4}{4x + 1} \leq \frac{3x + 5}{6x}$$

Exercice 21. Même exercice :

$$(a) \quad |x - 8| \leq 5$$

$$(b) \quad |2x + 3| > 4$$

$$(c) \quad |2x - 11| \leq |x - 5|$$

$$(d) \quad \begin{cases} |x - 3| > 2 \\ |x + 4| \leq 3 \end{cases}$$

Exercice 22.

Résoudre les inéquations du second degré suivantes :

$$(a) \quad x^2 + 6x < -16$$

$$(b) \quad 70x < 25x^2 + 49$$

$$(c) \quad (x + 3)(x - 1) < 2x + 6$$

$$(d) \quad 2x^2 - 8x + 2 \geq 0$$

$$(e) \quad -3x^2 + 12x < 12$$

$$(f) \quad -2x^2 + 5x - 4 \leq -4x + 5$$

Exercice 23.

Résoudre les équations suivantes en faisant attention aux ensembles de définition :

$$(a) \quad \sqrt{x + 12} = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$$

$$(b) \quad \sqrt{4 - x} = x - 2$$

$$(c) \quad \sqrt{2x - 6} = x - 3$$

II – Trigonométrie

1/ Le cercle trigonométrique

Exercice 1. Déterminer des abscisses curvilignes des points suivants :

$$I(1;0) \quad J(0;1) \quad K(-1;0) \quad A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercice 2. Placer sur $\mathbb{U}$ les points d'abscisses curvilignes $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{8}$ et $-\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 3. Déterminer les abscisses curvilignes des sommets de polygones réguliers à n côtés centrés sur O et admettant $I(1;0)$ pour sommet, pour $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, et $n = 8$.

Exercice 4. Donner les valeurs exactes des nombres suivants :

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) & \text{(b)} \sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) & \text{(c)} \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) & \text{(d)} \sin\left(\frac{20\pi}{3}\right) \\ \text{(e)} \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) & \text{(f)} \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) & \text{(g)} \cos\left(\frac{1651\pi}{6}\right) & \text{(h)} \sin\left(\frac{-19\pi}{6}\right) \end{array}$$

2/ Formules de trigonométrie

Exercice 5. Calculer le cosinus, le sinus et la tangente de $\pi/12$, $5\pi/12$ et $7\pi/12$.

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \cos(x - \pi) & \text{(b)} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{(c)} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{(d)} \sin(x - \pi) \\ \text{(e)} \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) & \text{(f)} \cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) & \text{(g)} \sin(2013\pi - x) \end{array}$$

Exercice 7. Montrer que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sin^4(x) - \cos^4(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) & \text{(b)} 2(\sin(x) \cos(x))^2 = 1 - \sin^4(x) - \cos^4(x) \\ \text{(c)} (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2 & \text{(d)} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \text{ si } \cos(x) \neq 0. \end{array}$$

Exercice 8.

- 1) Pour $\theta \neq \pi + 2k\pi$, on pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$.
- 2) Établir alors que $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$.
- 3) Retrouver enfin l'expression de $\tan(\theta)$ en fonction de t .

3/ Équations trigonométriques

Exercice 9.

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \cos x = \frac{1}{2} & \text{(b)} \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{(c)} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{(d)} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & \text{(e)} 4\sin^2(x) - 2(\sqrt{3} + 1)\sin(x) + \sqrt{3} = 0 \end{array}$$

Exercice 10. Même exercice :

$$\text{(a)} \tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5) \qquad \text{(b)} 2\tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$$

Exercice 11.

Un phare mesure 100 m de haut. Sachant que le rayon de la Terre est de 6 400 km, à quelle distance voit-on sur mer du haut de ce phare ?

Exercice 12. Calculer $\arccos(\cos \frac{2\pi}{3})$, $\arccos(\cos \frac{-2\pi}{3})$, $\arccos(\cos 4\pi)$ et $\arctan(\tan \frac{3\pi}{4})$.

Exercice 13. Calculer $\arcsin(\frac{-\sqrt{2}}{2})$, $\arccos(\frac{-\sqrt{2}}{2})$, $\arcsin(\frac{-1}{2})$ et $\arccos(\frac{-1}{2})$.

Exercice 14. Calculer $\arctan(-\sqrt{3})$, $\arctan(-1)$, $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Exercice 15.

Simplifier les expressions suivantes sur des intervalles à préciser :

$$\text{(a)} \tan(\arcsin x) \qquad \text{(b)} \sin(\arccos x) \qquad \text{(c)} \cos(\arctan x) \qquad \text{(d)} \sin(\arctan x)$$

Exercice 16.

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} 3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x) & \text{(b)} \sin x - \sin 3x + \sin 5x = 0 \\ \text{(c)} \cos x - \sqrt{3}\sin x = 1 & \text{(d)} (\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x + \sqrt{3} - 1 = 0 \end{array}$$

Exercice 17.

- 1) Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'inéquation $\sin(x) < 1/2$.
- 2) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ l'inéquation $-1/2 < \cos(x) < \sqrt{3}/2$.

III – Le langage mathématique

1/ Notions de logique

Dans les exercices qui suivent, P, Q et R sont trois assertions.

Exercice 1.

On note P : « les chiens aboient » et Q : « la caravane passe ».

Exprimer en fonction de P et / ou de Q les propositions suivantes :

- 1) Les chiens n'aboient pas.
- 2) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
- 3) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
- 4) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 2.

Simplifier l'assertion « (NON P ET Q) OU (NON P ET NON Q) OU (P ET Q) ».

On pourra utiliser une table de vérité afin de reconnaître une assertion plus simple.

Exercice 3.

Soit a un réel. Écrire et simplifier les négations des propositions suivantes :

- (1) $a \leq -2$ ou $a \geq 3$ (2) $a \leq 5$ et $a > -1$ (3) $a \leq 5$ et $3 > a$

Exercice 4.

On pose P : « je pars », Q : « tu restes » et R : « il n'y a personne ».

Traduire en français usuel (et lisible) les propositions suivantes :

$$(P \text{ ET NON } Q) \implies R \qquad (\text{NON } P \text{ OU NON } Q) \implies \text{NON } R$$

Exercice 5.

Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

- 1) « NON P ET Q » puis « NON P OU Q ».
- 2) « P OU (Q ET R) » puis « P ET (Q OU R) ».
- 3) « $P \implies (\text{NON } Q)$ » puis « $P \iff Q$ ».
- 4) « $(\text{NON } P \text{ ET } Q) \implies R$ ».

Exercice 6.

Montrer que les assertions suivantes sont toujours vraies :

- 1) « $(P \text{ ET } Q) \implies P$ »
- 2) « $P \implies (P \text{ OU } Q)$ »
- 3) « $P \text{ OU } (P \implies Q)$ »

2/ L'art de la démonstration

Exercice 7.

En raisonnant par contraposition, montrer que :

- 1) $x \neq y \implies \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$ si x et y sont deux réels distincts de 1.
- 2) Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.
- 3) Si l'entier a^2 n'est pas un multiple de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.

Exercice 8.

En raisonnant par l'absurde, montrer que :

- 1) Si x est un nombre réel tel que $x \leq \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, alors $x \leq 0$.
- 2) Si n est le carré d'un entier non nul, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 9.

On range $n + 1$ paires de chaussettes dans n tiroirs.

Montrer qu'au moins l'un des tiroirs contient deux paires de chaussettes.

Exercice 10.

Soient A, B et C trois points non alignés.

Montrer que les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ sont sécantes.

IV – Calculs de limites et de dérivées

1/ Calculs de limites

Exercice 1.

Étudier les limites des expressions suivantes en $+\infty$:

(a) $x^2 - 5x + 6$

(b) $\sqrt{x^2 + 1} - x$

(c) $\frac{x^3}{x^2 + 1} - x$

Exercice 2.

Étudier les limites des expressions suivantes en 0 :

(a) $\frac{\sqrt{1+x}}{x}$

(b) $\frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$

(c) $\frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x^2}}$

(d) $\frac{\sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}}$

Exercice 3.

Étudier les limites des expressions suivantes en -2 :

(a) $\frac{x+4}{x^2+3x+2}$

(b) $\frac{x+2}{x^2+3x+2}$

(c) $\frac{x^2-x-6}{2x^2+5x+2}$

Exercice 4.

Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$

Exercice 5.

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$

Exercice 6.

Étudier les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos x - 3x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2+2-\cos x}$

2/ Calculs de dérivées

Exercice 7.

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en 0 :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \quad g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad h : x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

Exercice 8.

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en 1 :

$$f : x \mapsto |x^2 + 2x - 3| \quad g : x \mapsto (x - 1) \sqrt{|x^2 - 1|} \quad h : x \mapsto \begin{cases} x \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 9.

Déterminer les ensembles de dérivabilité puis les dérivées des fonctions :

$$\begin{aligned} f : x \mapsto 3x^7 - \frac{x^4}{4} + 3 & \quad g : x \mapsto 4\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} & \quad h : x \mapsto \cos x \times \sin x \\ k : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} & \quad l : x \mapsto (x^2 + x)^7 & \quad m : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2} \end{aligned}$$

Exercice 10. Même exercice :

$$f : x \mapsto \cos(\cos x) \quad g : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad h : x \mapsto \sin^2(3x+2) \quad k : x \mapsto \frac{1}{\sin^4 x}$$

Exercice 11.

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f : x \mapsto x^2 - \frac{2}{x} & \quad g : x \mapsto \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} & \quad h : x \mapsto x e^{x^2+1} & \quad k : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \\ l : x \mapsto x \sqrt{x^2 + 3} & \quad m : x \mapsto \frac{x}{(x^2 + 3)^3} & \quad n : x \mapsto \frac{1}{x \ln x} & \quad p : x \mapsto \frac{e^x}{2e^x + 5} \end{aligned}$$

3/ Relations de comparaison

Exercice 12.

- 1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on a $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$.
- 2) Soient $a > 1$ et $\alpha > 0$. Montrer que $x^\alpha = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(a^x)$

Exercice 13.

Étudier les limites des expressions suivantes en $+\infty$:

$$(a) -4x^2 + 6x - 7 \quad (b) \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 + x - 3} \quad (c) \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$$

Exercice 14.

Comparer $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de a dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = x \ln x$, $g(x) = \ln(1 + 2x)$ et $a = 0$.
- 2) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ et $a = -1$.
- 3) $f(x) = x^{-\frac{1}{x}}$, $g(x) = \ln x$ et $a = 0$.

Exercice 15.

Étudier les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \cos x) + \sin x \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x - 4 \cos x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{x^2 - 1}{2x^3 + 1}\right)$$

Exercice 16.

Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{3 \sin x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x \ln x} \quad (f) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

Exercice 17.

Trouver un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de :

$$(a) \sqrt{x^2 + 2x - 3} \quad (b) \tan\left(\frac{\pi x}{2x + 1}\right) \quad (c) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$$

Exercice 18.

Trouver un équivalent simple au voisinage de 0 de :

$$(a) \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos x} \quad (b) \frac{\sin x + \cos x - \tan x - 1}{x^2} \quad (c) \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{\tan x}$$

Exercice 19.

Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\ln x + 1} \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(1 + e^{-x}) \right]^{\frac{1}{x}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^x$$

V – Ensembles et applications

1/ Théorie des ensembles

Exercice 1.

On considère l'ensemble $E = \{a; b; c; d\}$. Déterminer toutes les parties de E .

Exercice 2.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

- 1) Comparer les parties $A \cap (A \cup B)$ et A .
- 2) Montrer que $A \cup B = A \cap B$ si, et seulement si, $A = B$.
- 3) Simplifier $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.
- 4) Montrer que A et B sont disjointes si, et seulement si, $\overline{A} \cup \overline{B} = E$.

Exercice 3.

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E .

- 1) Montrer que $(A \cup B) \subset C$ si, et seulement si, $A \subset C$ et $B \subset C$.
- 2) Montrer que $A \cap C = A \cup B$ si, et seulement si, $B \subset A \subset C$.

Exercice 4.

Écrire la négation des propositions suivantes :

- 1) Toutes les voitures rapides sont rouges.
- 2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 < q < \varepsilon$.
- 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 < 0$.
- 4) Tout triangle rectangle possède un angle droit.
- 5) Il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir.

Exercice 5.

Peut-on intervertir les quantificateurs « $\forall n \in \mathbb{N}$ » et « $\exists m \in \mathbb{N}$ » dans ce qui suit ?

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n^2 \geq m$
- 3) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n \geq m$
- 4) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n^2 \geq m$

2/ Applications

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$.

- 1) On pose $A = [-1 ; 4]$. Déterminer l'ensemble $f(A)$.
- 2) Soient B et C deux parties de $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que $B \subset C \implies f(B) \subset f(C)$.
 - (b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 7.

Soit u une application de E dans F . Soient A et A' deux parties non vides de E .

- 1) Montrer que $u(A \cup A') = u(A) \cup u(A')$.
- 2) Montrer que $u(A \cap A') \subset u(A) \cap u(A')$ et que l'inclusion inverse est fausse.
- 3) Si u est injective, montrer que $u(A \cap A') = u(A) \cap u(A')$.

Exercice 8.

Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G .

- 1) Si $g \circ f$ est injective, montrer que f est injective.
- 2) Si $g \circ f$ est surjective, montrer que g est surjective.

Exercice 9.

Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G .

- 1) Si f et g sont injectives, montrer que $g \circ f$ est injective.
- 2) Si f et g sont surjectives, montrer que $g \circ f$ est surjective.
- 3) Si f et g sont bijectives, montrer que $g \circ f$ est bijective.

Exercice 10.

Montrer que les fonctions suivantes sont des bijections entre des intervalles à préciser :

$$f : x \longmapsto x^2 - 1 \qquad g : x \longmapsto x^3 + 2x - 1 \qquad h : x \longmapsto x^5 + 3x^3 + 2x - 1$$

Exercice 11.

Même exercice avec les fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto e^{3x} + 2e^x - 5 \qquad g : x \longmapsto e^{x^3} - 1 \qquad h : x \longmapsto 2 \ln x + x^3 + x$$

VI – Les nombres complexes

1/ Définitions et propriétés algébriques

Exercice 1.

Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres :

$$Z_1 = \frac{z}{z-1} \qquad Z_2 = z^2 - \frac{1}{z} + 2 - i \qquad Z_3 = \frac{-iz - 1}{z+1}$$

Exercice 2.

Déterminer à quelles conditions sur $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ le nombre Z est réel ou imaginaire pur :

$$(a) \ Z = \frac{z+i}{z-i} \qquad (b) \ Z = z^2 + z + 1 \qquad (c) \ Z = \frac{z^2}{z+2i} \qquad (d) \ Z = \frac{z+i}{z-1}$$

Exercice 3.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$(a) \ (1+i)(1+2i) \qquad (b) \ i(5-i)(i-1) \qquad (c) \ \frac{18+26i}{-2+2i} \\ (d) \ \frac{1}{2+i} - \frac{1}{3-i} \qquad (e) \ \frac{1}{2+3i} - \frac{1}{4+5i} \qquad (f) \ (1+2i)^3$$

Exercice 4.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Parmi les nombres suivants, lesquels sont réels ou imaginaires purs ?

$$\alpha = 2 + z\bar{z} \qquad \beta = z^2 - \bar{z}^2 \qquad \gamma = (z + i\bar{z})(\bar{z} - iz) \qquad \delta = (i^2 z)(i\bar{z})$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2\bar{z} + 1 - i = i\bar{z} + 2$.

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z - i| = |z + i| \iff z \in \mathbb{R}$

Exercice 7. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

Exercice 8. Quel est l'ensemble des points $M(z) \in \mathcal{P}$ tels que $z + \bar{z} = |z|$?

Exercice 9. Déterminer les points $M(z)$ du plan complexe tels que

$$(a) \ |z + 1 - i| = |2 + i| \qquad (b) \ |z| = |\bar{z} + 2|$$

Exercice 10.

- 1) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4$. Montrer que : $\exists (X, Y) \in \mathbb{Z}^2, (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = X^2 + Y^2$.
- 2) Décomposer 34 et 58 en somme de carrés d'entiers.
- 3) Trouver alors m et $n \in \mathbb{N}$ tels que $1972 = m^2 + n^2$.

2/ Argument et exponentielle complexe

Exercice 11. Mettre sous forme exponentielle $(\sqrt{3} + i)^{20}$, $\frac{7}{\sqrt{2} + i}$ et $\frac{3 - 4i}{(1 + i)^2}$.

Exercice 12. Calculer $(1 - i\sqrt{3})^{1991}$, $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{10}$, $\frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^3} + \frac{(1 - i)^4}{(1 + i)^3}$ et $\left(\frac{i}{1 + i}\right)^{2004}$.

Exercice 13. On pose $u = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$. Déterminer S et T .

Indication : on pourra calculer leur somme et leur produit.

Exercice 14.

Soit $u = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Déterminer les modules et arguments de $\frac{1}{u}$, $-\frac{1}{u}$, $\frac{u-1}{u+1}$ et $\frac{u+1}{1-u}$.

Exercice 15. Soient $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

- 1) Écrire z_1 , z_2 et $z = z_1/z_2$ sous forme exponentielle.
- 2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- | | |
|---|---|
| (1) $z^2 - 2(1 + 2 \cos \theta)z + 5 + 4 \cos(\theta) = 0$ | (2) $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$ |
| (3) $z^2 \sin^2 \alpha - 4z \sin \alpha + 4 + \cos^2 \alpha = 0$ | (4) $z^2 - (3 + 4i)z + (5i - 1) = 0$ |
| (5) $(1 + i)z^2 - (5 + i)z + 6 + 4i = 0$ | (6) $z^2 - \alpha(\alpha + i)z + i\alpha^3 = 0$ |
| (7) $\left(\frac{z - 3i}{z + 2i}\right)^2 - 6\left(\frac{z - 3i}{z + 2i}\right) + 13 = 0$ | (8) $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$ |

Exercice 17.

Pour a , b et c des réels convenables, on pose $z = (1 + i \tan a)(1 + i \tan b)(1 + i \tan c)$.

- 1) Calculer $(\cos a \cos b \cos c)z$ et $\text{Im}(z)$.
- 2) En déduire que $\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) = \tan(a) \tan(b) \tan(c) \iff a + b + c \equiv 0 [\pi]$.
- 3) Calculer $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ en choisissant bien a , b et c . En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 18. Linéariser les expressions suivantes :

- (a) $\cos^4 x$ (b) $\sin^3 x$ (c) $\frac{\sin^2 x}{1 + \tan^2 x}$ (d) $\sin x \cos^2 x$ (e) $\cos x \sin 3x$

Exercice 19. Déterminer $\int e^x \cos(2x) dx$ à l'aide des formules d'Euler.

VII – Généralités sur les fonctions réelles

Exercice 1.

Trouver les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1} \quad g : x \mapsto \sqrt{1 + \cos x} \quad h : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Exercice 2.

Tracer dans un même repère les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ lorsque

$$(a) \quad f : x \mapsto x^2 \text{ et } g : x \mapsto \sqrt{x} \quad (b) \quad f : x \mapsto 2x + 3 \text{ et } g : x \mapsto x$$

Exercice 3.

- 1) On note f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer $f \circ f$. Qu'en déduire ?
- 2) On définit $f : x \mapsto 5x - 8$ et $g : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 4.

Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f : x \mapsto -x^2 + 2x \text{ sur }]-\infty; 0], & \quad g : x \mapsto x\sqrt{x} \text{ sur } [0; +\infty[, \\ h : x \mapsto \frac{1}{3x^2 + 5} \text{ sur }]0; +\infty[, & \quad k : x \mapsto \sqrt{1 - \cos x} \text{ sur } [0; \pi]. \end{aligned}$$

Exercice 5.

Les fonctions u et v ont pour tableaux de variations respectifs

x	0	1	3
$u(x)$		2	
	0	$\nearrow$	$\searrow$
			0

et

x	0	2	3
$v(x)$	3		2
	$\searrow$	$\nearrow$	
		1	

On suppose en outre que $u\left(\frac{1}{2}\right) = u(2) = 1$.

- 1) Quels sont les domaines de définition de u et v ?
- 2) Dresser le tableau de variations de $u \circ v$.
- 3) Dresser le tableau de variations de $v \circ u$.

Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n(1-x)^n$.

Exercice 7.

Les fonctions u et v ont pour tableaux de variations respectifs

x	-4	1	5	10		
$u(x)$	6	$\searrow$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0
			-2			

et

x	-2	3	8	
$v(x)$	7	$\searrow$	$\nearrow$	12
			0	

Dresser alors le tableau de variations de $v \circ u$ sachant que $u(0) = 3$, $v(0) = 4$ et $v(6) = 5$.

Exercice 8.

On va prouver dans cet exercice que toute fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

- 1) Analyse : on suppose que $f = g + h$, avec g paire et h impaire sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Exprimer $f(x)$ et $f(-x)$ en fonction de $g(x)$ et $h(x)$.
 - (b) En déduire les expressions de $g(x)$ et $h(x)$.
- 2) Synthèse : il faut maintenant vérifier que les fonctions g et h déterminées au cours des questions précédentes font bien l'affaire.

Exercice 9.

Étudier la parité des fonctions suivantes :

- 1) $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$
- 2) $g : x \mapsto x \cos x - x^3$ définie sur $[-2; 3]$
- 3) $h : x \mapsto x^2 + x + 1$ définie sur $]-1; 1[$
- 4) les fonctions polynomiales (trouver les paires et les impaires)

Exercice 10.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 1) Si f est paire, que peut-on dire de sa dérivée f' ?
- 2) Même question lorsque f impaire ou que f est périodique.

Exercice 11.

Étudier les périodicités des fonctions suivantes :

- 1) $f : x \mapsto \cos(x/3)$ définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) $g : x \mapsto \sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$.
- 3) $h : x \mapsto \sin x \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$.

Montrer alors que la fonction f est constante.

Indication : supposer par l'absurde que $f(a) \neq f(b)$ pour deux réels a et b , et considérer les suites de termes généraux $f(a + nT)$ et $f(b + nT)$.

VIII – Études de fonctions

1/ Éléments de symétrie

Exercice 1.

Montrer que les courbes $\mathcal{C}$ suivantes possèdent les axes de symétrie Δ proposés.

1) $\mathcal{C} : y = x^2 - 6x + 20$ et $\Delta : x = 3$.

2) $\mathcal{C} : y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$ et $\Delta : x = \frac{1}{2}$.

3) $\mathcal{C} : y = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$ et $\Delta : x = 1$.

Exercice 2.

Montrer que les courbes $\mathcal{C}$ suivantes possèdent les centres de symétrie A proposés.

1) $\mathcal{C} : y = \frac{3x - 1}{2x + 1}$ et $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2) $\mathcal{C} : y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{6}$ et $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

3) $\mathcal{C} : y = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$ et $A(1, 2)$.

2/ Limites et asymptotes

Exercice 3.

Déterminer les droites asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f : x \mapsto -1 + \frac{2}{3x - 1} & g : x \mapsto \frac{5 - 2x}{3x + 1} & h : x \mapsto 2 - 5x + \frac{3}{x + 4} \\ j : x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} & k : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2} & l : x \mapsto \frac{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 1}{1 + \sqrt{x}} \end{array}$$

Exercice 4.

Montrer que, pour les quatre premières courbes de l'exercice précédent, l'intersection des asymptotes constitue un centre de symétrie.

Exercice 5.

Étudier les asymptotes des courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 3} \quad g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x \quad h : x \mapsto \frac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$$

3/ Applications de la dérivation

Exercice 6.

On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et l'on note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.

- 1) Déterminer les réels a, b et c sachant que $f(0) = 2$, $f(-1) = 5$ et $f'(-1) = 2$
- 2) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1 .

Exercice 7.

Montrer que les paraboles d'équations respectives $y = -x^2 + \frac{7x}{2} - \frac{1}{2}$ et $y = 2x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{5}{2}$ admettent une tangente commune en leur unique point d'intersection.

Exercice 8.

On considère la fonction $f : x \mapsto a + \frac{b}{x+c}$ et l'on note $\mathcal{H}$ sa courbe représentative.

- 1) Déterminer les réels a, b et c sachant que $f(0) = -3$, $f(2) = 0$ et $f'(2) = -1$.
- 2) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{H}$ au point d'abscisse 2 .

Exercice 9.

Déterminer tous les réels a tels que la tangente à l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{3-3x}{2x+1}$ au point d'abscisse a soit parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 10.

Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f : x \mapsto x^3 - 12x & g : x \mapsto x\sqrt{x} & h : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 2} \\ j : x \mapsto \frac{3x-1}{2x+1} & k : x \mapsto \frac{x^2-2}{x-1} & l : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 \end{array}$$

Exercice 11.

Étudier la périodicité, la parité et les variations de la fonction $f : x \mapsto \cos x - \cos^2 x$. Tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Exercice 12.

Encadrer les fonctions suivantes sur les intervalles proposés :

- 1) $f : x \mapsto 5x^2 - 3x - 2$ sur $[0; 4]$.
- 2) $g : x \mapsto -2x^2 + 4x + 3$ sur $[-3; 5]$.
- 3) $h : x \mapsto 4x^3 - 3x^2 - 6x$ sur $]-2; 2[$.

Exercice 13.

- 1) Montrer que $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ et $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ pour tout $x \geq 0$.
- 2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Exercice 14.

Établir les inégalités suivantes en étudiant les variations de fonctions subtilement choisies :

- 1) $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
- 3) $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 15.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'inégalité de Bernoulli $(B_n) : \forall t \geq 0, (1+t)^n \geq 1+nt$.

- 1) Vérifier que (B_0) et (B_1) sont vraies.
- 2) On fixe $n \geq 2$ et l'on définit sur $[0; +\infty[$ la fonction $\varphi : x \mapsto (1+x)^n - 1 - nx$.
 - (a) Calculer φ' et φ'' .
 - (b) Déterminer le signe de φ'' et en déduire celui de φ' .
 - (c) Prouver alors l'inégalité (B_n) .

Exercice 16. Montrer que les courbes :

- 1) de la fonction carrée et de $\exp$ sont situées au-dessus de toutes leurs tangentes.
- 2) de la fonction racine carrée et de $\ln$ sont situées en-dessous de toutes leurs tangentes.

Exercice 17.

On définit sur $[0; +\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x} - \frac{3x^2}{16}$.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 4.

4/ Études complètes de fonctions

Exercice 18.

Étudier complètement les fonctions apparaissant dans les exercices 1, 2, 3, 5 et 10.

Exercice 19.

Procéder à une étude complète des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 f : x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{x^2+1}\right) & g : x \mapsto e^{-x} + \frac{1-x}{x+1} & h : x \mapsto (x-1)^2 \sqrt{x-1} \\
 j : x \mapsto \ln(1+x^2) & k : x \mapsto x-4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & l : x \mapsto x - \sin x
 \end{array}$$

IX – Calcul intégral

1/ Définition et propriétés fondamentales

Exercice 1.

On définit sur l'intervalle $I = [0; 10]$ les fonctions f et g par

$$\begin{array}{llll} \forall x \in [0, 2[& f(x) = -1 & \forall x \in [0, 1[& g(x) = 1 \\ \forall x \in [2, 5[& f(x) = 2 & \forall x \in [1, 4[& g(x) = -2 \\ \forall x \in [5, 7[& f(x) = -3 & \forall x \in [4, 8[& g(x) = 3 \\ \forall x \in [7, 9[& f(x) = 1 & \forall x \in [8, 9[& g(x) = -1 \end{array}$$

Calculer les intégrales sur I des fonctions f , g , f^2 , $f + g$ et fg .

Exercice 2.

Donner les signes des nombres réels suivants :

$$(a) \int_0^2 -x^2 dx \quad (b) \int_1^{0.5} \ln(t) dt \quad (c) \int_5^{23} e^{-u^2} du \quad (d) \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \tan(v) dv$$

Exercice 3.

Comparer les nombres réels suivants :

$$\begin{array}{ll} (a) \int_1^2 x e^x dx \text{ et } \int_1^2 x^2 e^x dx \\ (b) \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \text{ et } \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ (c) \int_0^{\pi/4} \sin u du \text{ et } \int_0^{\pi/4} \cos u du \end{array}$$

Exercice 4.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

On considère la fonction $P : t \mapsto \int_a^b [f(x) + tg(x)]^2 dx$.

1) Quel est le signe de la fonction P sur $\mathbb{R}$?

2) En déduire que $\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

Montrer que : $\forall x > 0, \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)$. (Interprétation géométrique?).

2/ Recherches de primitives**Exercice 6.**

Déterminer les expressions des primitives suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{x dx}{1+x^4} & \text{(b)} \int \frac{2x+3}{x^2+1} dx & \text{(c)} \int \frac{x^4(1-x)^2}{1+x^2} dx \\ \text{(d)} \int \frac{x^2 dx}{x^3-1} & \text{(e)} \int \frac{dx}{x^2-1} & \text{(f)} \int \frac{(x+2) dx}{x^2+2x+3} \end{array}$$

Exercice 7.

Même exercice :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} & \text{(b)} \int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2(x)} & \text{(c)} \int \frac{e^{\tan x} dx}{\cos^2(x)} \\ \text{(d)} \int (x^3+5x^2-2)e^x dx & \text{(e)} \int \cos(x)e^{2x} dx & \text{(f)} \int x^2 e^{-2x} dx \end{array}$$

Exercice 8.

Calculer au moyen d'une intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_1^2 \ln x dx & \text{(b)} \int \arctan x dx & \text{(c)} \int x \sin(x) dx \\ \text{(d)} \int_0^1 \ln(1+x^2) dx & \text{(e)} \int x e^{ax} dx & \text{(f)} \int x^\alpha \ln x dx \end{array}$$

Exercice 9.

Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.

Déterminer les primitives suivantes à l'aide d'un changement de variables :

$$\text{(a)} \int \sin^3 x dx \quad \text{(b)} \int x e^{\sqrt{x}} dx \quad \text{(c)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad \text{(d)} \int \cos^2(x) \sin^3(x) dx$$

Exercice 11.

Soit $a > 1$. Démontrer que $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln t dt}{1+t^2} = 0$

Exercice 12.

Déterminer les expressions des primitives suivantes :

(a) $\int x \sqrt{1+x^2} \, dx$

(b) $\int x \sqrt{2x+1} \, dx$

(c) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1}}$

(d) $\int \frac{x \, dx}{x + \sqrt{x}}$

(e) $\int \frac{dx}{x \sqrt{2-x}}$

(f) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{1+x^2}$

3/ Sommes de Riemann**Exercice 13.**

À l'aide de sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^1 (2x+1) \, dx$

(b) $\int_0^1 e^u \, du$

(c) $\int_0^1 E(2z) \, dz$

Exercice 14.

Calculer les limites des suites suivantes :

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

(b) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3}$

(c) $\frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (n+k)^{\frac{1}{n}}$

(d) $\frac{1}{n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$

Exercice 15.

Même exercice :

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{2n+k}{n^2+k^2}$

(b) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$

(c) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$

X – Équations différentielles

1/ Équations du premier ordre

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a) $y' + 2y = 8$ (b) $y' + 2y = 2t^2 - t + 3$ (c) $y' + 2y = 2 \sin(t) - \cos(t)$
(d) $y' - 3y = 2$ (e) $y' + 2y = e^{2t}$ (f) $y' + y = e^{3t} + 2 \sin t + t^2$
(g) $y' + 3y = e^t$ (h) $y' - 3y = (t^3 + 1)e^{-t}$ (i) $y' + y = \sin(t)$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a) $y' - 5y = e^{5t}$ (b) $y' - y = (t^2 + 1)e^t$
(c) $y' + 2y = \cos t e^{-2t}$ (d) $y' - y = 2 \sin t + \frac{e^t}{t^2 + 1}$
(e) $y' + y = \frac{1}{1 + e^t} + (t + 2)e^t$ (f) $y' - y = \frac{e^t}{\sqrt{1 - t^2}}$

Exercice 3.

Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(x)f(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(x)f(-x)$ et calculer $g'(x)$.

Exercice 4.

On cherche à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x)f(y)$$

- 1) Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
- 2) Dériver la relation proposée par rapport à x en $x = 0$.
- 3) Résoudre alors l'équation différentielle obtenue et conclure.

Exercice 5.

En posant $z = 1/y$, résoudre l'équation différentielle $y' = y(1 - y)$.

Exercice 6.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a) $y' + ty = t^3$ (b) $y' + 3t^2y = t^2 + e^{-t^3}$ (c) $y' + (\tan t)y = \sin t$
(d) $ty' - y = t^2e^t$ (e) $(1 - t^2)y' - 2ty = 1$ (f) $(1 + t^2)y' = ty + \sqrt{1 + t^2}$

Exercice 7.

Même exercice, en recherchant en outre les solutions maximales :

$$(a) \quad ty' + y = 1 \quad (b) \quad ty' - 2y = t^3 \quad (c) \quad (1-t)y' - y = t \quad (d) \quad t^2y' - y = 0$$

Exercice 8.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $t^n y' - \alpha y = 0$, où $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Déterminer de plus les solutions maximales de cette équation.

Exercice 9.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(a) \quad y' + y \cos t = \sin t \cos t \quad (b) \quad y' \cos t + y \sin t = e^{-t} \cos^2 t \quad (c) \quad y' \tan t + y = \sin t$$

Exercice 10.

Résoudre, sur son domaine de définition, l'équation $2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$.

Déterminer les solutions maximales de cette équation.

Exercice 11.

On considère l'équation différentielle $ty' + (1-t)y = \frac{te^t}{t^2 + 1}$.

La résoudre sur $]0; +\infty[$. Existe-t-il une solution qui prend la valeur 0 en $t = 1$?

Exercice 12.

Déterminer la solution de l'équation $ty' - y = t^3$ sur $]0; +\infty[$ telle que $y(1) = 0$.

2/ Équations du second ordre

Exercice 13. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{lll} (a) \quad y'' - 2y' + y = 0 & (b) \quad y'' - 5y' + 6y = 0 & (c) \quad y'' - 3y' = 0 \\ (d) \quad y'' - 4y' + 3y = t^2 - 2t & (e) \quad y'' + 4y' = t^2 + 7t - 2 & (f) \quad y'' + 2y' - 8y = e^{3t} \end{array}$$

Exercice 14.

Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ soit bornée.

Exercice 15.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a) \quad y'' + 4y' + 4y = (2t^2 + 1)e^{2t} & (b) \quad y'' + 4y' + 4y = (2t^2 + 1)e^{-2t} \\ (c) \quad y'' - 2y' + y = e^t - e^{-t} & (d) \quad y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \cos(t) \\ (e) \quad y'' + 4y = t \cos^2(t) & (f) \quad y'' - 2y' + 2y = 2 \sin(t) \end{array}$$

Exercice 16.

Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a) $y'' - 2y' + my = \cos(t)$ (b) $y'' + 4y = \sin(mt)$
 (c) $my'' - (1 + m^2)y' + my = te^t$ (d) $y'' + my = \cos(t)e^t$

C'est un exercice assez long, réservé aux gens très motivés ... car il faut falloir distinguer à chaque fois différents cas selon les valeurs de m . D'ailleurs j'ai eu la flemme de rédiger le corrigé ...

Exercice 17.

- 1) Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation (E) : $y' - y = \frac{e^t}{2\sqrt{t}}$
- 2) Déterminer la solution f de (E) pour laquelle $f(1) = e$.
- 3) Montrer que f est solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation (F) : $y'' - 2y' + y = \frac{-e^t}{4t\sqrt{t}}$.
- 4) En déduire toutes les solutions de (F) sur $]0; +\infty[$.

Exercice 18.

- 1) Montrer que pour tout $m \in]0; 2[$, l'équation différentielle $y'' + (1 - 2m)y' - 2my = e^{2t}$ admet une unique solution y_m telle que $y_m(0) = y'_m(0) = 0$.
- 2) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{m \rightarrow 1} y_m(x) = y_1(x)$

Exercice 19.

En posant $y(t) = tz(t)$, résoudre l'équation $t^2y'' - 2ty' + (2 - t^2)y = 0$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 20.

Résoudre les équations suivantes grâce aux changements de variables $u(t)$ proposés.

Méthode : dans chaque cas, on cherche la solution y sous la forme $y(t) = z(u(t))$.

- 1) $y'' + y' \tan(t) - y \cos^2(t) = 0$ en posant $u = \sin t$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
- 2) $ty'' + (4t^2 - 1)y' + 4t^3y = 8t^3$ en posant $u = t^2$ sur $]0; +\infty[$.
- 3) $y'' + y' + e^{-2t}y = e^{-4t} + 2e^{-3t} - 3e^{-2t}$ en posant $u = e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.
- 4) $t^2y'' + 3ty' + y = 1 + t^2$ en posant $u = \ln(t)$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 21.

Résoudre l'équation $(1 + x)^2y'' + (1 + x)y' = 2$ sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

XI – Autour de la récurrence

Exercice 1.

Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

- 1) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) $2^{3n} - 1$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) $n^2 \leq 2^n$ pour tout $n \geq 4$.

Exercice 2.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que $u_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Montrer que $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

Montrer que $f(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = \sqrt{15 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que si $u_0 \in [0; 5]$, alors $0 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Montrer que si $u_0 \in [4; 10]$, alors $4 \leq u_n \leq 10$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $2 \leq u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $0 \leq u_{n+1} < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7.

Déterminer les expressions des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes :

- 1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Déterminer la dérivée n -ième de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r ; on pose $v_n = 2^{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Déterminer les expressions des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes :

- 1) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + 12$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = u_n \sqrt{2} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{7} + \frac{6}{7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Déterminer une suite arithmétique $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant la même relation de récurrence.
- 2) On pose $v_n = u_n - w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
- 3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 12. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) On pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
- 2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 13.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) On pose $s_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Déterminer ensuite son expression.
- 2) Procéder de même avec la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - 8u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) En déduire l'expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 14. Déterminer les expressions des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes :

- 1) $u_0 = -1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
- 2) $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
- 3) $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{3} - 1/2$ et $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

Exercice 15.

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1/3$, $u_{n+1} = u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + 2v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} , u_n et v_n .
- 2) En déduire que $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.
- 3) Exprimer u_n puis v_n en fonction de n .

XII – Ensembles finis et dénombrement

Exercice 1.

Soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence l'égalité de Bernoulli

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$$

La retrouver ensuite à l'aide d'une somme télescopique.

Exercice 2.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \sum_{k=1}^n k^3$, $D_n = \sum_{k=1}^n (k+1)^3$ et $B_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

- 1) Exprimer D_n en fonction de C_n .
- 2) En partant du développement de $(k+1)^3$, établir une relation entre D_n , C_n et B_n .
- 3) En déduire B_n .

Exercice 3.

Montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln\left(\sin \frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin \frac{k\pi}{2n}\right)$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 4.

- 1) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$
- 2) En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 5.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ puis $g(x) = \sum_{k=0}^n k x^k$.

Indication : on pourra exprimer $g(x)$ à l'aide de $f'(x)$.

Exercice 6.

En lançant un dé trois fois, combien peut-on former de nombres à trois chiffres :

- (a) différents ? (b) avec trois chiffres distincts ? (c) avec deux chiffres distincts ?

Exercice 7.

Un octet est une liste de huit chiffres pris parmi 0 ou 1. Combien y a-t-il d'octets :

- (a) différents ? (b) contenant trois 1 ? (c) commençant et finissant par 1 ?

Exercice 8.

- 1) Dénombrer les entiers naturels de trois chiffres ayant deux chiffres identiques.
- 2) Montrer que parmi 677 personnes, au moins deux ont les mêmes initiales.

Exercice 9. Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- 1) Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés ?
- 2) Quel est le nombre de partitions en deux parties d'un ensemble à n éléments ?
- 3) Combien y a-t-il d'entiers naturels $N < 10^n$ dont la somme des chiffres vaut 3 ?
- 4) Soient E un ensemble fini et $A \subset E$ tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(A) = p \leq n$.
Combien y a-t-il de parties de E contenant A ?

Exercice 10. Soient m et n deux entiers non nuls.

- 1) Déterminer le nombre de n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$.
Indication : se ramener au dénombrement de listes d'entiers distincts en considérant $y_i = \sum_{k=1}^i x_k$.
- 2) Déterminer le nombre de n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$.

Exercice 11.

Combien existe-t-il d'anagrammes du mot abracadabra ?

Exercice 12. Montrer que $(k+1) \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \binom{n}{k}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Exercice 13.

On tire n boules dans une urne qui contient n boules blanches et n boules rouges.

- 1) Combien y a-t-il de tirages contenant k boules rouges et $(n-k)$ boules blanches ?
- 2) En déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 14. Développer $(1-x)^6$, $(x-2)^5$ et $(2x+1)^3$.

Exercice 15. Développer $(\cos x + i \sin x)^4$ puis exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.

Exercice 16.

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cos(px) \quad (2) \sum_{p=0}^n \frac{1}{p+1} \binom{n}{p} \quad (3) \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} \text{ et } \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} 3^k$$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \binom{i}{j}$.

XIII – Systèmes linéaires

Exercice 1.

Parmi les systèmes linéaires suivants, lesquels sont compatibles ?

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x - 3y + z + t = 0 \\ x + 2y - z - 3t = 0 \\ -x - y + 2t = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Exercice 2.

Même exercice :

$$(a) \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 2y = -2 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

Exercice 3.

Transformer les systèmes linéaires suivants en systèmes équivalents *échelonnés*.

Les résoudre dans la foulée.

$$(a) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y - z = -9 \\ 2x - y + 3z = 16 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 2y - z + t = 3 \\ 2x + 4y + z - 2t = -1 \end{cases}$$

Exercice 4.

Même exercice :

$$(a) \begin{cases} x - 3y + 2z = 2 \\ 2y - z = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ 2x - y = -4 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 5.

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 2 \\ -x + y + 7z + 2t = 3 \\ 2x + y - 8z + t = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y - 3z - 4t = -1 \\ 2x + 2y + 2z - 3t = 2 \\ 3x + 6y - 2z + t = 8 \\ 2x + y + 5z + t = 5 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - y + z + t = -1 \\ 5x + 2y - z + 3t = 5 \\ -3x - 4y + 3z + 2t = 1 \\ 6x + y - 2t = 8 \end{cases}$$

Exercice 6.

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 10 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -x + 4y + z = -1 \\ 2x - 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 7.

Même exercice :

$$(a) \begin{cases} -y + z = 1 \\ -5x + 2y - z = -1 \\ x - 2z = 4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y - 2z = 3 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 10x + 9y + z = -50 \\ 9x + 10y + 5z = 40 \\ x + 5y + 9z = 180 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ x + y + 2z = 9 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 4x + 8z = 1 \\ y - 6z = 2 \\ 2x - 4z = 3 \\ 5x - y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 8.

Idem avec des systèmes tout-terrain :

$$(a) \begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2x - z + 3t = 9 \\ 3x + 3y + 2z = 4 \\ -x - 2y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 0 \\ x - y - z + t = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - 2y + z + t = -2 \\ 2x - y - z - t = -1 \\ x + y + z + t = -8 \\ x + y - 2z - t = 6 \end{cases}$$

Exercice 9.

Déterminer, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - ay = a \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} ax + (1 - a)y = 1 \\ (1 - a)x - ay = a \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - y + az = a \\ x + ay - z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y + (2a - 1)z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 3(a + 1) \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = -1 \\ x + y + az + t = 1 \\ x + y + z + at = -1 \end{cases}$$

Exercice 10.

Soient a et b deux paramètres réels. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} x - 2y = a \\ -2x + 4y = b \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + by = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -ax + ay - z = -1 \\ bz = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 3x + 3y - z = 4a \\ (2 - a)x + 2y - 2z = -2b \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$$

Exercice 11.

Petit hommage à Œdipe :

$$(a) \begin{cases} -iy = 1 \\ ix - y = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} ix - iy = 1 + i \\ ix + y = 1 - i \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} (1 + 2i)x - iy = 1 \\ ix - (1 + i)y = 1 + 3i \end{cases}$$

XIV – Géométrie du plan et de l'espace

1/ Généralités et repérage

Exercice 1.

Soient A, B, C et D quatre points quelconques.

On définit les points G, H et I par $\overrightarrow{GB} = 4\overrightarrow{GA}$, $3\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD}$ et $6\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC}$.

Montrer que ces trois points sont alignés et trouver le réel λ tel que $\overrightarrow{GI} = \lambda \overrightarrow{GH}$.

Exercice 2. Soient A, B, C, D, E et F tels que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BD}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et de $\overrightarrow{AF}$, puis en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

2) Les droites (EF) et (AB) sont-elles sécantes ?

Exercice 3.

Soient A, B, C et D quatre points quelconques, $I = m[AB]$, $J = m[CI]$ et $K = m[DJ]$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 4. Soient ABC un triangle non plat, $E = m[BC]$, $F = m[AE]$ et $\{G\} = (BF) \cap (AC)$.

1) Calculer les coordonnées des points E, F et G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) En déduire le nombre réel t tel que $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AC}$.

Exercice 5.

Soient A, B, C et D tels que $(AC) \perp (BD)$. Montrer que $BC^2 + DA^2 = AB^2 + CD^2$.

Exercice 6.

On pose $A(2, -3)$, $B(4, -1)$ et $C(-4, 5)$ dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

2/ Produit scalaire

Exercice 7.

Soient A et B tels que $AB = 3$. Construire le(s) point(s) M tel(s) que $AM = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 6$.

Exercice 8. Soient A, B, C et D quatre points Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Exercice 9.

Soient A, B, C et D tels que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} \leq 0$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} \leq 0$. Montrer que $AC \geq BD$.

Indications : développer $AC^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\|^2$ et faire apparaître $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\|^2$.

Exercice 10. Soient A et B deux points et $I = m[AB]$. Montrer que pour tout point M :

$$1) MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$$

$$2) MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA}$$

$$3) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$$

Exercice 11. Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, p le demi-périmètre et S la surface du triangle ABC.

$$1) \text{ Montrer que } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} \text{ (Formule d'Al-Kashi).}$$

$$2) \text{ Montrer que } 2S = bc \sin \widehat{A} \text{ puis que } \frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} \text{ (Formule des sinus).}$$

$$3) \text{ Montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si } \sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}.$$

$$4) \text{ Montrer que } \sin^2 \widehat{A} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4b^2c^2}.$$

$$\text{En déduire que } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Formule de Héron).}$$

On se place dans les exercices suivants dans plan muni d'un r.o.n. $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice 12. Trouver tous les vecteurs orthogonaux au vecteur non nul $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Exercice 13.

Déterminer tous les réels m tels que $\vec{u} = (m-4)\vec{i} + (2m+1)\vec{j} \perp \vec{v} = 2m\vec{i} + (3-m)\vec{j}$.

Exercice 14.

Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = m\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ et $\vec{v} = -3\vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$ soient orthogonaux.

Exercice 15. Soient A(1,2), B(2,5) et C(6,4). Déterminer $\cos \widehat{ABC}$.

Exercice 16.

Considérons le triangle du plan ABC avec A(4,1), B(2,3) et C(-5,-3).

Déterminer des équations de la hauteur issue de C et de la médiatrice de [BC].

3/ Déterminant

Exercice 17. Soient A(1,2), B(2,5) et C(6,4). Déterminer $\sin \widehat{ABC}$.

Exercice 18. Déterminer l'aire du quadrilatère ABCD, où A(-1,2), B(4,3), C(3,5) et D(2,6).

Exercice 19.

On considère les vecteurs $\vec{u}(1, \sqrt{3})$ et $\vec{v}(-1, 1)$.

Déterminer les coordonnées d'un point M(x, y) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 20. On considère le système linéaire (S) $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que (S) admet une unique solution si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.
- 2) Dans ce cas, montrer que $x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ et $y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.
- 3) Application : résoudre $\begin{cases} x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = a \\ -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) = b \end{cases}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque.

4/ Droites et cercles du plan

Exercice 21.

Soient $A(2, 1)$ et $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$.

Exercice 22. Trouver un point et un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $4x + y - 3 = 0$.

Exercice 23. Soit ABC un triangle non plat.

- 1) Déterminer dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ des équations des médianes de ce triangle.
- 2) Retrouver que ces trois médianes sont concourantes.

Exercice 24. Soient $A(3, 2)$ et $B(-5, 1)$. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 25.

Déterminer l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

Exercice 26. Soient les points $A(-4, -1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, 3)$ et le vecteur $\vec{u} = (1, 2)$.

- 1) Donner des équations cartésiennes des droites $\mathcal{D}_1 = (AB)$ et $\mathcal{D}_2 = (C, \vec{u})$.
- 2) Déterminer leur intersection D .
- 3) Soit $E(16, 64)$. Trouver une équation cartésienne de la droite (DE) .

Exercice 27.

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites d'équations respectives $3x + 4y + 3 = 0$ et $12x - 5y + 4 = 0$. Sont-elles concourantes ? Si oui, déterminer des équations de leurs bissectrices.

Exercice 28.

On considère le triangle ABC formé des points $A(4; -4)$, $B(10; 8)$ et $C(-8; 8)$. Déterminer l'orthocentre H , le centre de gravité G puis le centre du cercle circonscrit O . Comparer ensuite les vecteurs $\vec{OG}$ et $\vec{OH}$.

Exercice 29.

Déterminer l'intersection des cercles $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$.

Exercice 30.

- 1) Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-2, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
- 2) Déterminer $\{M \in \mathcal{P} \mid 2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 8 = k\}$ pour $k = 6$ et $k = -4$.

Exercice 31.

- 1) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
- 2) Déterminer son intersection avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + 3y - 2 = 0$.

Exercice 32.

Soient A et B deux points du plan et k un réel. Déterminer $\{M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k\}$.

5/ Droites et plans de l'espace

Exercice 33.

Trouver un point et deux vecteurs directeurs du plan d'équation $3x - 2y + z + 5 = 0$.

Exercice 34.

Montrer que les plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa' + bb' + cc' = 0$.

Exercice 35. Calculer l'angle entre les plans $\mathcal{P} : x + y + z = 3$ et $\mathcal{P}' : 2x + y - z = 4$.

Exercice 36. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ dans les exemples suivants :

- 1) $A(3, -1, 2)$ et $\mathcal{P} : 2x + 6y - z = 7$.
- 2) $A(1, 2, -3)$ et $\mathcal{P} = (B, \vec{u}, \vec{v})$, où $B(-2, 1, 0)$, $\vec{u}(1, -6, 2)$ et $\vec{v}(3, -1, 1)$.

Exercice 37. Calculer l'angle entre les droites $\mathcal{D} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$

Exercice 38. Calculer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ dans les cas suivants :

- 1) $A(4, -3, 2)$, $\mathcal{D}$ passe par $B(1, 0, -1)$ et est dirigée par $\vec{v}(2, -1, 3)$.
- 2) $A(2, -1, 1)$ et la droite $\mathcal{D}$ a pour système d'équations $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$

Exercice 39.

Déterminer la droite dirigée par $\vec{u}(1, 2, 3)$ et rencontrant les droites $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Exercice 40.

Déterminer la droite menée par $A(1, 1, 2)$ et coupant les droites $\begin{cases} z = 0 \\ 2x = 3y \end{cases}$ et $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2z \end{cases}$

XV – Les statistiques descriptives

1/ Statistiques univariées

Exercice 1. Déterminer les différents quartiles des séries statistiques ci-dessous :

- 1) {0; 2; 5; 8; 9; 12; 15; 18; 20}
- 2) {2; 5; 7; 10; 12; 15; 17; 20; 21; 22}
- 3) {2; 5; 7; 7; 7; 9; 11; 12}

Exercice 2.

Afin de renouveler le mobilier d'un lycée, le proviseur commande une enquête sur la taille d'un échantillon de 100 élèves. Voici les résultats obtenus en cm :

165	159	158	185	168	170	154	166	164	163
185	169	157	189	164	185	160	163	164	165
158	185	184	177	170	155	190	187	157	173
158	155	178	183	157	179	178	192	150	182
182	159	150	160	178	176	167	164	157	161
170	169	179	171	173	169	187	187	165	154
189	159	156	158	159	159	166	169	187	191
188	168	153	170	155	165	182	156	179	169
177	153	189	188	166	164	171	189	177	153
189	188	166	164	171	189	158	161	176	168

- 1) Regrouper ces données en classe de 10 cm d'amplitude [150 ; 160 [, [160 ; 170 [, etc... et donner le tableau des effectifs.
- 2) Calculer la moyenne de cette série.
- 3) Représenter graphiquement la série statistique.

Exercice 3.

Une entreprise fabrique des pièces métalliques dont le diamètre, mesuré en millimètres, est donné dans le tableau suivant :

Diamètre	[4.0 ; 4.2 [	[4.2 ; 4.4 [	[4.4 ; 4.6 [	[4.6 ; 4.8 [	[4.8 ; 5.0 [
Effectif	6	24	41	25	4

En supposant que la répartition est uniforme au sein de chaque classe, calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon.

Exercice 4.

Procéder de même avec l'échantillon suivant :

Longueur	[35 ; 37 [	[37 ; 39 [	[39 ; 41 [	[41 ; 43 [	[43 ; 45 [
Effectif	3	25	50	20	2

2/ Statistiques bivariées

Exercice 5. Pour chacune des séries statistiques doubles ci-dessous :

- tracer le nuage de points ;
- trouver le point moyen du nuage ;
- proposer un ajustement entre les deux variables ;
- établir cet ajustement par le calcul.

1)

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	7	6	6	4	5	6	2	3

2)

X	1	2	5	7	10	12	15	20
Y	2	3	5	6	7	8	9	10

3)

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	3	19	69	356	835	832	1455	1738

Exercice 6.

Plus une région est vaste, plus le nombre d'espèce y vivant est grand. Pour modéliser mathématiquement ce phénomène et mesurer la *biodiversité*, on utilise la loi SPAR càd « species-area relationship ». Celle-ci stipule que la surface S de la région étudiée et le nombre N d'espèces présentes dans cette région sont reliées par la formule

$$N = C S^z$$

où C et z sont des constantes dépendant de la région. On fait les mesures suivantes :

S	1	2	4	8	16	32	64
N	6	7	8	10	10	13	14

Afin de déterminer C et z, on effectue une régression linéaire sur de $\ln(N)$ par rapport à $\ln(S)$.

- 1) Justifier le choix de cette régression linéaire.
- 2) Tracer le nuage de points correspondant aux variables $\ln(N)$ et $\ln(S)$.
- 3) Déterminer la droite de régression linéaire. et la placer sur le dessin.
- 4) Donner des valeur approchées de C et z.

XVI – Les polynômes réels

1/ L'ensemble $\mathbb{R}[X]$

Exercice 1.

Montrer *par calcul direct* que $(X^3 + X^2 + X + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1$.

Exercice 2.

En utilisant l'identité $(1 - X^2)^{2n} = (1 + X)^{2n} (1 - X)^{2n}$ et en identifiant les coefficients de X^{2n} , montrer que $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$.

Exercice 3. Déterminer tous les polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 = XQ^2$.

Exercice 4. Calculer le degré de $(X + 1)^n - (1 - X)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer le degré de $P(X + 1) - P(X)$ en fonction de celui de P .

Exercice 6.

Soient P un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$ et $Q = dP - XP'$. Montrer que $\deg(Q) \leq d - 1$.

Exercice 7.

Soient P et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.

Grâce à l'algorithme de Horner, calculer $P(\alpha)$ pour

- 1) $P = X^3 - 3X - 1$ et $\alpha = 4$.
- 2) $P = X^4 + 2X^3 - 7X^2 + 6X - 12$ et $\alpha = 5$.
- 3) $P = X^5 - 2X^4 + 5X^3 - 3X + 2$ et $\alpha = 2$.

Exercice 9.

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est-il stable par produit ?

Exercice 10. Effectuer la division euclidienne de :

- 1) $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ par $X^2 + 1$.
- 2) $2X^4 + 5X^3 - 3X + 2$ par $X^3 - 3X + 1$.
- 3) $6X^5 - X^4 + 2X^3 - 7X + 1$ par $X^2 - 2$.

2/ Racines d'un polynôme

Exercice 11.

Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$?

Exercice 12.

En s'aidant de racines évidentes, factoriser les polynômes suivants :

$$(a) \ 3X^3 + X^2 - 8X + 4 \quad (b) \ X^3 + 6X^2 + 9X + 4 \quad (c) \ -3X^3 + 11X^2 + 24X - 20$$

Exercice 13.

Déterminer les racines du polynôme $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$.

Indication : il y a une racine « évidente » multiple.

Exercice 14.

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que α est une racine d'ordre $(r - 1)$ de P' .

Exercice 15.

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que -1 soit racine double du polynôme $X^5 + aX^2 + aX + 1$.

Exercice 16.

Montrer que le polynôme $P = 36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$ a deux racines doubles.

Indication : on pourra chercher à écrire P comme le développement d'un carré.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que $X^{2n} - 1$ se factorise par $X^2 - 1$.
- 2) Montrer que $(X + 1)^n - nX - 1$ se factorise par X^2 .

Exercice 18.

En effectuant le changement de variables $Z = z + 1/z$, déterminer les racines de l'équation algébrique $2z^4 - 5z^3 + 4z^2 - 5z + 2 = 0$.

XVII – Les développements limités

1/ Développements en 0

Exercice 1. Rechercher les développements limités à l'ordre 3 en 0 de :

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \sqrt{1+x/2} & \text{(b)} & \frac{1}{3+x} \\ \text{(c)} & \frac{\sin x}{x} & \text{(d)} & \frac{1}{(x+1)(x-2)} \\ \text{(e)} & \frac{e^x}{1-x} & \text{(f)} & e^x \ln(1-x) \\ \text{(g)} & 3^x & \text{(h)} & e^{\cos x} \\ \text{(i)} & e^{\tan x} & \text{(j)} & \frac{e^{x/1+x}}{(1+x)^2} \\ \text{(k)} & \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{(l)} & (1+\sin x)^{1/x} \end{array}$$

Exercice 2. Même exercice, sauf qu'on pousse à l'ordre 5 :

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \sin(x) \cos(2x) & \text{(b)} & (1 - \cos x) \ln(1+x) \\ \text{(c)} & \ln(\cos x) & \text{(d)} & \frac{x}{\sin x} \\ \text{(e)} & \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) & \text{(f)} & \cos x^{\sin x} \\ \text{(g)} & e^{\sin x} & \text{(h)} & \tan x \end{array}$$

Exercice 3. Trouver des équivalents en 0 de :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x(1 + \cos(x)) - 2 \tan x & \text{(b)} & (1+x)^{\frac{1}{x}} \\ \text{(c)} & \sin(x)^{\sin(2x)} \end{array}$$

Exercice 4. Calculer les limites en 0 des expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \frac{2^x - 3^x}{x} & \text{(b)} & [\ln(1+x)]^x \\ \text{(c)} & \frac{e^x - \sqrt{1-x}}{x} \\ \text{(d)} & (\tan x)^{\sin x} & \text{(e)} & \frac{1 - x \sin x - \cos x}{(e^x - 1)^2} \\ \text{(f)} & \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \end{array}$$

Exercice 5. Étudier les tangentes au point d'abscisse 0 des courbes des fonctions

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x} \\ \text{(b)} & g : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2) \\ \text{(c)} & h : x \mapsto x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ \text{(d)} & i : x \mapsto x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) \end{array}$$

Exercice 6. Étudier la continuité et la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \\ \text{(b)} & g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

2/ Développements en l'infini

Exercice 7. Rechercher les développements limités à l'ordre 4 en $+\infty$ de :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} & \text{(b)} \quad \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} & \text{(c)} \quad \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \\ \text{(d)} \quad \frac{x^2+2}{x^2+x} & \text{(e)} \quad \frac{\sin(1/x)}{x+1} & \text{(f)} \quad \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x \end{array}$$

Exercice 8. Calculer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :

$$\text{(a)} \quad x(e^{1/x} - 1) \quad \text{(b)} \quad \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} \quad \text{(c)} \quad x \left[e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] \quad \text{(d)} \quad \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^x$$

Exercice 9. Trouver des équivalents en $+\infty$ de :

$$\text{(a)} \quad x^{\frac{1}{x}} \quad \text{(b)} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} \quad \text{(c)} \quad \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\sqrt{x^2+x}}$$

Exercice 10. Étudier les branches infinies des courbes des fonctions suivantes :

$$\text{(a)} \quad f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \quad \text{(b)} \quad g : x \mapsto \frac{x}{1+e^{1/x}} \quad \text{(c)} \quad h : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$$

XVIII – Fonctions usuelles

1/ Les fonctions valeur absolue et partie entière

Exercice 1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{|x| + 1}$ et l'on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- 1) Déterminer son ensemble de définition puis étudier sa parité.
- 2) Dresser le tableau complet des variations de f .
- 3) Montrer que tout réel $y \in]-1; 1[$ admet un unique antécédent par f .
On déterminera son expression en fonction de y .

Exercice 2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

- 1) $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
- 2) $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
- 3) $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ou $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 3. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$.

2/ Logarithme népérien et exponentielle

Exercice 4. Trouver l'intrus parmi les nombres suivants :

$$A = \ln \sqrt{e^3} + e^{\ln \sqrt{3}} \quad B = \ln(\sqrt[4]{e}) \quad C = e^{-2 \ln(2)} \quad D = \frac{e^{\ln(3) - \ln(2)}}{e^{\ln(3) + \ln(2)}}$$

Exercice 5. Montrer que $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Résoudre sur leurs ensembles de définition respectifs

- 1) les équations $\ln(1 - 3x) = 2$ et $\ln(x^2 - 9) = \ln(x)$
- 2) l'inéquation $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leq \ln 2$

Exercice 7. Étudier les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2) & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2)^2 \ln(x^3 - 8) & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{x^3} \\ \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\ln(1 - 4x)} & \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x \ln x + \sqrt{x}} & \text{(f)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{array}$$

Exercice 8. Étudier les fonctions suivantes et donner l'allure de leurs courbes :

$$f : x \mapsto \ln(1 + x^2) \quad g : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2} \quad h : x \mapsto \ln(\sin x)$$

Exercice 9. Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x} \quad g : x \mapsto \frac{1}{x \ln x} \quad h : x \mapsto \frac{2x + \cos x}{(1 + \sqrt{x^2 + 1 + \sin x}) \sqrt{x^2 + 1 + \sin x}}$$

Exercice 10. En procédant à des études de variations, montrer que :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x \quad (b) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad e^x \geq 1 + x + x^2/2$$

Exercice 11. Étudier les limites suivantes :

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x} \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(x)} - 1}{x} \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x - x^2 \quad (d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x + x^2}$$

3/ Puissances réelles

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$(a) \quad 2^{x+3} = 3^{x+2} \quad (b) \quad 2^{x-1} + 2^{2-x} = 3 \quad (c) \quad 2x^{\frac{4}{5}} - 5x^{\frac{2}{5}} + 2 = 0 \quad (d) \quad 5^x - 12 \times 2^x = 29$$

Exercice 13. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$(a) \quad 2^n < 10^3 \quad (b) \quad 3^n < 100 \quad (c) \quad (0,2)^n > 0,0001$$

Exercice 14. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^n \sqrt{x} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \quad g : x \mapsto \sqrt[4]{e^x} \quad h : x \mapsto \ln\left(x + e^{\sqrt[5]{x^3-2}}\right)$$

Exercice 15. Étudier les fonctions suivantes et donner l'allure de leurs courbes :

$$f : x \mapsto \exp\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad g : x \mapsto x e^{\sqrt{1-x^2}} \quad h : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ j : x \mapsto x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2} \quad k : x \mapsto x^x \quad l : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 16. Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad g : x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad h : x \mapsto \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$$

Exercice 17. Soient a et b deux réels tels que $1 < a < b$.

- 1) Comparer au voisinage de $+\infty$ les expressions $a^{(b^x)}$ et $b^{(a^x)}$.
- 2) Comparer au voisinage de $+\infty$ les expressions $a^{(a^x)}$ et $x^{(a^x)}$.

4/ Les fonctions circulaires

Exercice 18.

Calculer de deux manières différentes l'argument du complexe $z = (5 - i)^4(1 + i)$.

En déduire que $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$. (Formule de Machin)

Exercice 19.

Résoudre les équations suivantes :

$$(a) \quad \arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4} \qquad (b) \quad \arctan(x) + \arctan(x^3) = \frac{3\pi}{4}$$

Exercice 20.

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2 \arctan x$.

Que peut-on en déduire ?

Exercice 21.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 2 \arctan\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \qquad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \qquad h : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

Exercice 22.

Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad g : x \mapsto (x + 1) \arctan x$$

Exercice 23.

Déterminer des DL_5 en 0 des fonctions arcsin, arccos et arctan.

XIX – Les matrices

Exercice 1. Effectuer les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^n$$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A :

$$(a) \ n = 2 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \ n = 3 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = B \times C$, sachant que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 4. Calculer les puissances successives des matrices suivantes :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soient $A = \text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

Quelle est la tête de la matrice $P(A)$? À quelles conditions a-t-on $P(A) = 0$?

Exercice 6. Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n telle que $A^3 = 0_n$. Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.

XX – Nombres et suites réels

1/ Généralités

Exercice 1.

Les parties $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $B = \left\{\frac{2}{n} - n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ sont-elles majorées / minorées ?

Si oui, déterminer leurs bornes supérieures / inférieures. Sont-ce des max / min ?

Exercice 2.

Même question avec les parties suivantes (et deux réels $a > 0$ et $b > 0$) :

$$A = \left\{\frac{n}{mn+1} \mid (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\} \quad B = \left\{\frac{n}{mn+1} \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\right\} \quad C = \{x^2 - 2x + 3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$D = \{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\} \quad E = \{a + (-1)^n b/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \quad F = \{-x^2 + 2x \mid x \in]1; 2[\}$$

Exercice 3.

Soient A et B deux parties non vides telles que $x \leq y$ pour tout $(x, y) \in A \times B$.

Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 4. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée, $x \in \mathbb{R}$ et

$$-A = \{-a \mid a \in A\} \quad x + A = \{x + a \mid a \in A\}$$

1) Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$ et $\inf(-A) = -\sup(A)$.

2) Montrer que $\sup(x + A) = x + \sup(A)$ et $\inf(x + A) = x + \inf(A)$.

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1) Déterminer $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$.

2) On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Déterminer alors $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$.

Exercice 6. Étudier les variations des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes :

$$(a) \ u_n = 3n + (-1)^n \quad (b) \ u_n = n - 3^n \quad (c) \ u_n = n + \cos n \quad (d) \ u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$(e) \ u_n = \frac{n}{3^n} \quad (f) \ u_n = (0, 1)^n n^2 \quad (g) \ u_n = n^2(3 - n) \quad (h) \ u_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k+1}\right)$$

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ soient croissantes.

Peut-on en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ?

Exercice 8. Étudier les variations des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

- 1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 9. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes sont-elles bornées ?

$$(a) \ u_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{7}\right)^k \quad (b) \ u_n = \frac{3n}{n+1} \quad (c) \ u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$$

Exercice 10.

- 1) Le produit de deux suites réelles minorées est-il minoré ?
- 2) Le produit de deux suites réelles majorées est-il majoré ?

2/ Limites de suites

Exercice 11. Étudier les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes :

$$\begin{array}{lll} (a) \ u_n = n^2 - 1 + \frac{1}{n} & (b) \ u_n = (1 - 3n)(n^2 - 2) & (c) \ u_n = 1 - 5^n \\ (d) \ u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3 & (e) \ u_n = \frac{1}{n + 5^n} & (f) \ u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{7^k} \\ (g) \ u_n = \frac{\sqrt{n} - n}{2n + 1} & (h) \ u_n = \frac{n}{\sqrt{n} + 1} - \frac{n}{\sqrt{n} + 2} & (i) \ u_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n \end{array}$$

Exercice 12. Étudier les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes :

$$\begin{array}{lll} (a) \ u_n = 4n^2 - n + 5 & (b) \ u_n = \frac{5n + 3}{3n^2 + 5} & (c) \ u_n = \frac{2n + 3}{3n - 1} \\ (d) \ u_n = \cos(n) - n & (e) \ u_n = \frac{3 - \sin(n)}{n} & (f) \ u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cos(n) \\ (g) \ u_n = 2n + (-1)^n & (h) \ u_n = \frac{3^n + 4^n}{4^n} & (i) \ u_n = \frac{\sqrt{n}}{n + \frac{(-1)^n}{n}} \end{array}$$

Exercice 13. Étudier la convergence des suites définies dans l'exercice 9.

Exercice 14. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 15.

À l'aide d'un encadrement, montrer que les suites suivantes sont convergentes :

$$(a) \ u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \quad (b) \ v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \quad (c) \ w_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$$

Exercice 16. Déterminer les limites des suites de termes généraux suivants :

$$(a) \ u_n = \frac{2^n}{n!} \quad (b) \ u_n = \frac{n^2}{2^n} \quad (c) \ u_n = \frac{n^3}{n!} \quad (d) \ u_n = n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Exercice 17. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$1) \ u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{(2n+1)u_n}{3(n+1)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$2) \ u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{n-1}{2n+3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 18.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Démontrer alors que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Exercice 19. Rechercher des équivalents simples des suites suivantes :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad v_n = \tan\left(\frac{\pi}{n+3}\right) \quad w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$1) \text{ Montrer que l'équation } \tan x = \frac{1}{x} \text{ admet une unique solution } x_n \in \left] n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$2) \text{ Donner alors un équivalent de } \tan(x_n - n\pi) \text{ puis de } x_n - n\pi.$$

3/ Suites monotones

Exercice 21.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le nombre u_n en juxtaposant les entiers de 1 à n après la virgule :

$$u_1 = 0,1 \quad u_2 = 0,12 \quad u_5 = 0,12345 \quad \text{et} \quad u_{12} = 0,123456789101112$$

par exemple. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 22.

Idem lorsque le nombre u_n est défini en faisant suivre un 1 de n 3 et n 8 après la virgule

Exercice 23. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1) \text{ Montrer que } u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$2) \text{ Prouver alors que la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge.}$$

Exercice 24.

Montrer que la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée. Que peut-on en déduire ?

Exercice 25.

- 1) Montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) En déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 26.

- 1) Montrer que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geq 2$.
- 2) En déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

Exercice 27. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

- 1) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 2) (a) Prouver que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire les expressions de I_{2p} et I_{2p+1} .
- 3) (a) Montrer que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Établir que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(c) En déduire enfin que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 28.

Étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n + 3u_n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication : on pourra étudier les suites de termes généraux $u_n - v_n$ et $u_n + v_n$.

Exercice 29.

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessous forment des couples de suites adjacentes :

$$(a) \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} \qquad (b) \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \text{ et } v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 30. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in]0; +\infty[$.
- 2) Prouver que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante puis que $x_n \sim n$.
- 3) Vérifier que $x_n = n - \ln n + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$. On pourra écrire $x_n = n + o_{n \rightarrow +\infty}(n)$.

XXI – Limites et continuité

Exercice 1.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Montrer que pour tout réel α , on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \alpha x] = +\infty$.

Exercice 2.

Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}$.

Exercice 3.

Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que la fonction f est constante.

Exercice 4. Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 5. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que les fonctions suivantes soient continues :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \in]-\infty; 2] \\ ax + b & \text{si } x \in]2; 8] \\ -x + 3 & \text{si } x \in]8; +\infty[\end{cases} \quad g : x \mapsto \begin{cases} x - 5 & \text{si } x \in]-\infty; 2] \\ -\sqrt{ax + b} & \text{si } x \in]2; 8] \\ -x + b & \text{si } x \in]8; +\infty[\end{cases}$$

Exercice 6. Peut-on prolonger par continuité à $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes ?

$$f : x \mapsto \frac{5x^2 - 12x + 4}{x - 2} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad g : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

Exercice 7.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3}$.

Exercice 8.

Montrer que l'équation $2x = \sin(x^2 + 2x + \sqrt{3})$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction continue.

Montrer qu'il existe au moins un réel $x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 10.

- 1) Montrer que le cosinus admet un unique point fixe dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2) Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 11.

Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 12.

- 1) Soit $f : x \mapsto 2x^3 + 5 - x^4$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$. Étudier l'équation $f(x) = 4$.
- 2) Soit $f : x \mapsto x^2 - \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; 5]$. Étudier l'équation $f(x) = 7$.

Exercice 13.

- 1) Démontrer que l'équation $4x^5 - x^2 + x + 1 = 0$ admet au moins une racine réelle.
- 2) Montrer que toutes ses racines réelles sont comprises entre -1 et 1.

Exercice 14.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et telle que $f(I)$ est fini.
Prouver que la fonction f est constante.

Exercice 15.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Et si l'on suppose $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$? $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$?

Exercice 16.

Soit f une fonction continue et non constante sur l'intervalle $[a; b]$.

On suppose que $f(a) = f(b)$ et l'on note $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$.

Montrer que tout élément de $]m; M[$ admet au moins deux antécédents par f dans $[a; b]$.

Exercice 17.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 telle que $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que cette fonction f est constante.

Exercice 18.

On veut déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) f(y)$$

- 1) Vérifier qu'une telle fonction f est nécessairement positive.
- 2) Montrer que si f s'annule en un point, f est la fonction nulle.
- 3) Cas $f > 0$: montrer que f est de la forme $f : x \mapsto e^{ax}$, avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Indication : on déterminera l'expression de f sur $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{Z}$ puis sur $\mathbb{Q}$. Ensuite, on justifiera que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels en pensant au développement décimal.

- 4) Conclure

XXII – Dérivabilité

Exercice 1. Déterminer les classes des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g : x \mapsto x|x| \quad h : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 2.

Justifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ où P_n est un polynôme de degré n .

Exercice 3. Déterminer les dérivées n -ième des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f : x \mapsto \frac{1}{x} & g : x \mapsto \sin x & h : x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \\ j : x \mapsto x^2 \ln x & k : x \mapsto (x^2 + 1) \sin x & l : x \mapsto e^x \cos x \end{array}$$

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto x^n(1-x)^n$.

- 1) Calculer sa dérivée n -ième de deux manières différentes.
- 2) Identifier les coefficients de x^n pour en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 5. Étudier complètement les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad g : x \mapsto \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \quad h : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

Exercice 6.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

On définit la fonction $P : x \mapsto x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_{n-1} x - a_n$.

- 1) Étudier les variations sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto x^{-n} P(x)$.
- 2) Montrer qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Exercice 7. Formule de Taylor-Lagrange d'ordre 1.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, b]$. En appliquant le théorème de Rolle à

$$\varphi : x \mapsto f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - K \frac{(b-x)^2}{2}$$

pour un réel K bien choisi, montrer qu'il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

Exercice 8. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ avec $f(a) = f(b)$.

1) On suppose que $f(a) = 0$: montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

2) On suppose que $f'(a) = 0$: montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(a) - f(c)}{a - c}$

Dans chaque cas, appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire bien choisie.

Exercice 9. Soit f une fonction deux fois dérivable et s'annulant en trois points x_0, x_1 et x_2 tels que $x_0 < x_1 < x_2$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 10. Majorer les erreurs commises dans les approximations suivantes :

$$\sqrt{10001} \simeq 100 \qquad \frac{1}{0,999^2} \simeq 1 \qquad \cos 1 \simeq \frac{1}{2}$$

Exercice 11.

Soient $d \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}^*, Q$ un polynôme de degré $d - 1$ et $P = aX^d + Q$.

Montrer que $P(n + 1) - P(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} dan^{d-1}$.

Exercice 12. Montrer les inégalités suivantes :

1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$

2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1.$

Exercice 13. Établir les encadrements suivants :

1) $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x.$

2) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x.$

Exercice 14.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

On suppose que $f(0) = 0$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0; 1]$.

Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que $f(x) \geq mx$ pour tout $x \in [0; 1]$.

Exercice 15. Étudier les suites récurrentes définies par :

1) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$ ($I = [2; 4]$)

2) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$ ($I = [0; 1]$)

3) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n^2 + 1} + 1$ ($I = [1; 2]$)

On montrera que la fonction de récurrence admet un unique point fixe ℓ sur l'intervalle I , puis que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on utilisera l'inégalité des accroissements finis pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.

XXIII – Les espaces vectoriels

Exercice 1.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned} & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\} \quad \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| = 1\} \\ & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\} \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = z\} \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \end{aligned}$$

Exercice 2.

Soient $\vec{u} = (-1, 2, -3)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$, $\vec{w} = (2, -3, 1)$ et $\vec{z} = (7, -9, 8)$.

On pose $F = \text{Vect} \{\vec{u}, \vec{v}\}$ et $F' = \text{Vect} \{\vec{w}, \vec{z}\}$. Déterminer $F \cap F'$.

Exercice 3.

Même question avec $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (-1, 2, 5)$, $\vec{w} = (3, 1, -6)$ et $\vec{z} = (4, 13, 7)$.

Exercice 4.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -ev. La famille $\{1, i, 1 + i\}$ est-elle libre ?

Exercice 5.

Dans chaque cas, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est libre ou génératrice de $\mathbb{R}^3$?

- 1) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ et $\vec{w} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$
- 2) $\vec{u} = (8, 4, 2)$, $\vec{v} = (6, 6, 6)$ et $\vec{w} = (4, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$.
- 3) $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ et $\vec{w} = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.
- 4) $\vec{u} = (2, 0, -1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ et $\vec{w} = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.

Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$. On pose $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \dots$ et $\vec{v}_n = \vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_n$. Montrer que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ est une famille libre.

Exercice 7.

Soit $\{x, y, z\}$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $\{x + y, y + z, z + x\}$ est également libre.

Exercice 8.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{K}^n$. tels que $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{w})$.
Montrer que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Exercice 9.

Soient les vecteurs $\vec{v}_1(2, 0, 1, 3)$, $\vec{v}_2(1, 1, 0, -1)$, $\vec{v}_3(0, -2, 1, 5)$ et $\vec{v}_4(1, -3, 2, 9)$ de $\mathbb{R}^4$.
La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ est-elle libre ? est-elle génératrice ?

Exercice 10. On considère les trois vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(2, 3, -1)$ et $\vec{w}(1, -1, -2) \in \mathbb{R}^3$.

- 1) Montrer que si $x = 3$, $y = 7$ et $z = 0$, alors $\vec{u}$ appartient à $\text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$.
- 2) À quelles conditions sur x , y et z la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est-elle libre ?
- 3) Montrer que c'est alors une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11.

Montrer que les familles $\{(1, 1); (1, 0)\}$ et $\{(1, 2); (2, -3)\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12.

Donner des bases des ensembles des solutions des systèmes linéaires homogènes suivants :

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ 2x + 4y + z - 2t = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 13. Déterminer une base de $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ dans les cas suivants :

- 1) $\vec{v}_1(1, 0, 1)$, $\vec{v}_2(-3, 0, 3)$ et $\vec{v}_3(0, 0, 0)$.
- 2) $\vec{v}_1(1, 1, 1)$, $\vec{v}_2(1, 2, 3)$ et $\vec{v}_3(3, 2, 1)$.
- 3) $\vec{v}_1(1, 2, 4)$, $\vec{v}_2(6, 6, 6)$ et $\vec{v}_3(0, 1, 3)$.

Exercice 14. Calculer le rang de la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ pour :

- 1) $\vec{v}_1(0, 1, 0, 1)$, $\vec{v}_2(1, -1, 1, -1)$, $\vec{v}_3(1, -1, -1, 1)$ et $\vec{v}_4(1, 1, 1, 1)$.
- 2) $\vec{v}_1(1, -1, 2, 3)$, $\vec{v}_2(2, 1, 3, -1)$, $\vec{v}_3(1, -4, 3, 10)$ et $\vec{v}_4(0, -6, 2, 14)$.

Exercice 15.

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

- 1) $\mathcal{F} = \{(1, -1, 0); (2, -1, 2)\}$
- 2) $\mathcal{F} = \{(1, -1, 0); (2, -1, 2); (1, 0, a)\}$
- 3) $\mathcal{F} = \{(1, 1, 3); (3, 4, 5); (-2, 5, 7); (8, -1, 9)\}$
- 4) $\mathcal{F} = \{(2, 1, 5); (-1, -1, -3); (0, 6, -2)\}$

Exercice 16.

Compléter si possible la famille $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^4$:

- 1) $\mathcal{F} = \{u, v, w\}$ avec $u = (1, 2, -1, 0)$, $v = (0, 1, -4, 1)$ et $w = (2, 5, -6, 1)$.
- 2) $\mathcal{F} = \{u, v, w\}$ avec $u = (1, 0, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2, 3)$ et $w = (1, 2, 0, 3)$.
- 3) $\mathcal{F} = \{u, v\}$ avec $u = (1, -1, 1, -1)$ et $v = (1, 1, 1, 1)$.

Exercice 17.

Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$

et $G = \text{Vect}\{(1, -2, 1, 1); (1, 2, -3, 1); (5, -3, -2, 5)\}$

- 1) Calculer les dimensions de ces deux sous-ev de $\mathbb{R}^4$.
- 2) Montrer que $G \subset F$ puis que $G = F$.

XXIV – Les applications linéaires

Exercice 1.

Examiner si les applications $f : E \longrightarrow F$ qui suivent sont linéaires.

Déterminer les images et les noyaux de celles qui le sont effectivement.

- 1) $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}^3, f : (x, y) \mapsto (2x - y, 3y, 1 - x)$
- 2) $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}, f : (x, y) \mapsto xy$
- 3) $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}, f : (x, y, z) \mapsto x + y + 2z$
- 4) $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}, f : (x, y) \mapsto x + 2y + 1$

Exercice 2. Même exercice :

- 1) $E = F = \mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$ -ev, et $f : z \mapsto az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ fixé.
- 2) $E = \mathbb{C}$ et $F = \mathbb{R}$ sont des $\mathbb{R}$ -ev et $f : z \mapsto a \operatorname{Re}(z) + b \operatorname{Im}(z)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
- 3) $E = F = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f : u \mapsto u'' - 3u' + 2u$.

Exercice 3.

Déterminer des bases des images et des noyaux des applications linéaires suivantes :

- 1) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + y + 3z, x - z) \end{cases}$
- 2) $g : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \mapsto (x + y + t, y - z + 2t, x + z) \end{cases}$
- 3) $h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y - 3z, x + y + z) \end{cases}$

Exercice 4. Même exercice :

- 1) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-y + z, x - 2y + z, x - z) \end{cases}$
- 2) $g : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y - z, x + z) \end{cases}$
- 3) $h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y, y + z) \end{cases}$

Exercice 5.

- 1) Montrer qu'il existe un unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tq $f(1, 0) = (1, 1, 0)$ et $f(0, 1) = (0, 1, 1)$.
Déterminer son expression, ainsi que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
- 2) Procéder de même avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tel que $f(2, 1) = (0, 1, 2)$ et $f(1, 2) = (2, 1, 0)$.

Exercice 6.

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^2 - 4f + \text{Id}_E = 0$.

Montrer que $f \in \text{GL}(E)$ et exprimer f^{-1} en fonction de f .

Remarque : pour un endomorphisme f , la notation f^2 signifie $f \circ f$.

Exercice 7.

Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- 1) Démontrer que $g \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker } g$.
- 2) Démontrer que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.
- 3) Démontrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
- 4) Démontrer que $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker } g)$

Exercice 8.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

Prouver que : $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

Dans les trois exercices suivants, on a $E = \mathbb{K}^n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Exercice 9.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \iff (f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \text{ rg}(f))$.
- 2) On suppose que $f^3 = 0$. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq n$.

Exercice 10.

On suppose que $f^n = 0$ mais $f^{n-1} \neq 0$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ soit une base de E .

Exercice 11.

On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\{f(x_0), \dots, f^n(x_0)\}$ soit une base de E .

Démontrer que f est un automorphisme de E .

***** Un peu de calcul matriciel ... *****

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- 1) Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .
- 2) Prouver qu'il est stable par combinaison linéaire et par produit.

Exercice 13. Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 14. Soit $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- 1) Montrer que E est stable par combinaison linéaire et par produit.
- 2) Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 15.

Mêmes questions avec $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 16. Déterminer les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

***** Passons enfin aux matrices des applications linéaires *****

Exercice 17.

Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes :

- 1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(1, 0, 0) = (0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0)$ et $f(0, 0, 1) = (0, 2)$.
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(1, 0) = (1, -2, 0)$ et $f(0, 1) = (3, 1, -1)$.

Exercice 18.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (5x + 4y, 3x + 6y)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, où $\vec{i} = (1, 1)$ et $\vec{j} = (4, -3)$.

Exercice 19.

Même question avec $\vec{i} = (4, 3)$, $\vec{j} = (1, 1)$ et $f : (x, y) \mapsto (4x - 4y, 3x - 3y)$.

Exercice 20.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 21.

Même exercice avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f tel que $\text{Ker } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$, $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$. On pourra chercher sa matrice dans la base canonique.

Exercice 23.

En procédant de la même manière, déterminer tous les endomorphismes f tels que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\{e_2 - 2e_3, e_1 + e_4\}$ et $\text{Im}(f) = \{(x, y, z, t) \mid x + 2y - 3z = 0 \text{ et } x + t = 0\}$.

***** On finit avec des changements de base *****

Exercice 24.

Soient $\vec{e}_1 = (2, 1)$ et $\vec{e}_2 = (3, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique.

- 1) Vérifier que $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- 2) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ du vecteur $\vec{u} = (-3, 2)$.

Exercice 25.

L'espace $E = \mathbb{K}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. On définit la nouvelle base $\mathcal{B}' = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ où $\vec{i} = (0, 0, 1)$, $\vec{j} = (1, -1, 0)$ et $\vec{k} = (-2, 1, 0)$. Soit enfin $f \in \mathcal{L}(E)$.

Sachant que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 26.

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de base $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Donner la matrice de f dans la base $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} - \vec{u}\}$.
- 2) Même question dans la base $\{\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\}$.

Exercice 27.

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- ❶ On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de f** s'il existe un vecteur **non nul** $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
- ❷ On dit que $\vec{u} \in E$ est un **vecteur propre de f associé à la valeur propre λ** si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
- ❸ On appelle enfin **sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ** l'ensemble $E_{\lambda}(f) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}$.

- 1) Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si, et seulement si, $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{\vec{0}\}$.
- 2) Si λ est une valeur propre de f , montrer que $E_{\lambda}(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$.
Que peut-on alors dire de cet ensemble ?
- 3) Montrer que λ est une valeur propre de f si, et seulement si, $\text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) < \dim(E)$.

- 4) Application : soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- (a) Déterminer les valeurs propres de f en utilisant la question 3.
- (b) Déterminer les sous-espaces propres associés en utilisant la question 2.
On donnera une base de chaque espace propre.
- (c) Vérifier que la réunion de ces bases fournit une base de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est alors la matrice de f dans cette nouvelle base ?

XXV – Probabilités sur un univers fini

1/ Calculs « simples »

Exercice 1.

Dans une population donnée, 37% des individus n'ont jamais fait de plongée sous-marine, 48% n'ont jamais pris l'avion mais 29% ont déjà fait de la plongée et pris l'avion. Quelle est la probabilité qu'un individu n'ait jamais fait de plongée ni pris l'avion ?

Exercice 2.

Dans une loterie, on vend 100 billets dont exactement trois sont gagnants. Si l'on achète deux billets, quelle est la probabilité d'en avoir au moins un gagnant ?

Exercice 3.

Un pâtissier introduit trois fèves dans 1 kg de pâte feuilletée et confectionne deux galettes.

- 1) Quelle est la probabilité que chaque galette contienne au moins une fève ?
- 2) Combien aurait-il fallu mettre de fèves pour que cette probabilité dépasse 0,99 ?

Exercice 4.

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité de n'obtenir ni un roi, ni un cœur ?

Exercice 5.

On lance 5 fois de suite une pièce *équilibrée*.

- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 fois "pile" ?
- 2) Calculer la probabilité d'obtenir plus de "face" que de "pile".
- 3) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 3 fois de suite le même résultat.

Exercice 6.

Une fourmi part du sommet A d'un cube ABCDEFGH et effectue 3 déplacements le long des arêtes de ce cube. De chaque sommet, elle choisit au hasard l'un des 3 sommets voisins.

- 1) En quels sommets peut-elle se retrouver à l'issue de ses 3 déplacements ?
- 2) Calculer les probabilités correspondantes.

Exercice 7.

On lance 4 fois de suite une pièce *équilibrée*. On définit les événements

A : « 2 fois "Pile" et 2 fois "Face" » et B : « 3 fois l'un et 1 fois l'autre »

Lequel de ces deux événements est le plus probable ?

Exercice 8.

Montrer que lorsque l'on jette 3 dés, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9.

Exercice 9.

On choisit 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelles sont les probabilités :

- 1) d'obtenir un brelan et une paire
- 2) d'obtenir un carré
- 3) d'obtenir seulement une paire

Exercice 10.

Dans un groupe de 30 personnes, quelle est la probabilité pour qu'au moins deux d'entre elles soient nés le même jour de l'année ? (on supprime les années bissextiles)

Exercice 11.

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

- 1) On tire au hasard k boules simultanément. Quelle est la probabilité de tirer la boule 1 ?
- 2) On tire au hasard, successivement et sans remise k boules.
 - (a) Soit $r \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$: quelle est la probabilité de tirer la boule 1 lors du r^{e} tirage ?
Indication : la comparer à la probabilité de tirer la boule i lors de ce même tirage
 - (b) En déduire la probabilité de tirer la boule 1. Remarque ?

Exercice 12.

Trois joueurs A, B et C piochent un numéro, chacun dans son urne.

- L'urne du joueur A contient les numéros 2, 4 et 9
- L'urne du joueur B contient les numéros 1, 6 et 8
- L'urne du joueur C contient les numéros 3, 5 et 7

Celui qui tire le plus grand numéro a gagné.

Montrer que lors de duels, A l'emporte sur B, B l'emporte sur C mais C l'emporte sur A.

Exercice 13.

Les 36 élèves de BCPST2 font la queue dans un (dés)ordre complètement aléatoire pour rentrer en cours de mathématiques.

Soit $r \in \llbracket 0 ; 34 \rrbracket$. Quelle est la probabilité qu'il y ait r personnes entre Clovis et Antoine ?

Exercice 14.

On lance 5 dés cubiques équilibrés. Donner les probabilités :

- 1) d'avoir 5 numéros différents
- 2) d'avoir au moins un multiple de 3
- 3) d'avoir au moins deux faces identiques
- 4) que le produit des chiffres obtenus soit pair

Exercice 15.

Dans une ville, les taxis sont numérotés de 1 à n . Un promeneur oisif observe que les quatre premiers taxis qui passent portent les numéros 93, 205, 77 et 191.

Un chauffeur de taxi qui rôdait dans les parages prétend que $n = 650$.

Quel crédit peut-on donner à cette affirmation ?

Démarche à suivre

On suppose que $n = 650$ et l'on calcule la probabilité de l'événement observé A : « les quatre premiers taxis qui passent ont un numéro inférieur ou égal à 205 ».

Ce calcul discrédite l'affirmation du chauffeur si $P(A)$ est trop proche de 0 ...

2/ Probabilités conditionnelles

Exercice 16.

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules vertes lorsque l'on réalise deux tirages successifs :

(a) avec remise

(b) sans remise

Exercice 17.

On dispose de trois urnes, U_1 qui contient 1 boule rouge et 5 jaunes, U_2 qui contient 3 boules rouges et 1 jaune, U_3 qui contient 1 boule rouge et 2 jaunes. On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule dans cette urne.

- 1) Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?
- 2) La boule tirée est jaune ; quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_3 ?

Exercice 18.

Suite à une manipulation climatique, le temps évolue de la façon suivante :

- soit il fait beau, soit il pleut
- s'il fait beau un jour, il fait beau le lendemain avec une probabilité de $4/5$
- s'il pleut un jour, il pleut le lendemain avec une probabilité de $2/3$

Nous sommes Lundi, il fait beau. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau Mercredi ?

Exercice 19.

Une urne contient 5 boules rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire successivement et sans remise 3 boules. Déterminer les probabilités des événements suivants :

- « la deuxième boule tirée est rouge »
- « la troisième boule tirée est rouge »

Exercice 20.

Un QCM propose m réponses pour chaque question. Un étudiant connaît la bonne réponse à une question donnée avec une probabilité p . S'il l'ignore, il choisit une des réponses au hasard. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 21.

Un système d'alarme fonctionne de la manière suivante :

- s'il y a un danger, la probabilité que l'alarme se déclenche est 0,99 ;
- en l'absence de danger, elle se déclenche avec une probabilité de 0,005.

Enfin, la probabilité qu'un danger se présente est 0,001.

Si l'alarme se déclenche, quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

Exercice 22.

Le test de dépistage d'une maladie possède les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'un individu sain ait un test négatif est 0,99 ;

Sachant que la proportion de malades dans la population est p , déterminer la probabilité qu'un individu, dont le test est positif, soit malade.

Exercice 23.

Un artisan est contacté à domicile par ses clients et dispose pour cela d'un répondeur. Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement le répondeur. Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.

Un client régulier constate qu'il tombe quatre fois sur cinq sur le répondeur, ce qui commence à attiser ses soupçons ... et sa colère !

Ce même client téléphone une fois de plus à l'artisan. On considère alors les événements suivants A : « l'artisan est présent » et R : « le client tombe sur le répondeur ».

- 1) Exprimer $P(R)$ en fonction de $P(A)$. En déduire $P(A)$.
- 2) Le client tombe sur le répondeur : quelle est la probabilité que l'artisan soit présent ?

Exercice 24.

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés pour lesquels la probabilité d'obtenir 6 est 0,5. On choisit un dé au hasard, on le lance et on obtient 6.

Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 25.

Au cours d'un jeu, un candidat a le choix entre 3 portes : derrière l'une d'elles se trouve une voiture de luxe et derrière chacune des deux autres une chèvre. Dès qu'une porte ouverte, il remporte le lot qui se trouve derrière elle.

- Tout d'abord, le candidat choisit une porte.
- À ce moment-là, l'organisateur du jeu – qui sait ce qui se cache derrière les portes – ouvre une des deux autres portes : on y découvre une chèvre.
- Il demande alors au candidat s'il souhaite conserver la porte choisie au départ ou bien changer de porte.

Démontrer qu'en changeant de porte, le candidat a 2 chances sur 3 de gagner.

Exercice 26.

Lors d'une longue séance de tirs au but – on admet que les tirs sont « cadrés » – un gardien arrête le premier tir avec la probabilité 0,3. Ensuite :

- s'il a arrêté un tir, il arrête le suivant avec une probabilité de 0,5
- s'il a pris un but, il arrête le tir suivant avec une probabilité de 0,2

On note p_n la probabilité que le gardien arrête le n^{e} tir.

- 1) Montrer que $p_{n+1} = 0,3 p_n + 0,2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Déterminer l'expression de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

Exercice 27.

Une usine fabrique des pièces, parmi lesquelles 5 % sont défectueuses.

Lors du contrôle qualité, on estime que :

- les bonnes pièces sont acceptées avec une probabilité de 0,96
- les pièces défectueuses sont refusées avec une probabilité de 0,98

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle.

- 1) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
- 2) Calculer la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise.

3/ Indépendance d'événements

Exercice 28.

Vous avez devoir ce samedi matin. Sachant que le surveillant se trompe d'étage une fois sur cinq, perd la clef de la salle une fois sur dix et égare les sujets une fois sur quinze, quelle est la probabilité que le contrôle ait effectivement lieu à l'heure dite ?

Exercice 29.

Soient A et B deux événements indépendants tels que $A \subset B$.

Montrer que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 1$.

Exercice 30.

Deux archers A et B tirent simultanément sur une même cible. Les événements « A atteint la cible » et « B atteint la cible » sont indépendants et de probabilités respectives $4/5$ et $7/8$.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

- 1) A et B atteignent tous deux la cible.
- 2) Seul A atteint la cible.
- 3) La cible est manquée.
- 4) La cible est atteinte.
- 5) Un seul tireur atteint la cible.

Exercice 36.

- 1) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12.

On en tire une au hasard et l'on considère les événements

A : « on tire un numéro pair »

B : « on tire un multiple de 3 »

Ces événements sont-ils indépendants ?

- 2) Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 37. [second problème du Chevalier de Méré]

Deux joueurs A et B engagent chacun 32 pistoles dans le jeu suivant : on lance une pièce de monnaie jusqu'à l'apparition de 3 "Pile" ou 3 "Face" (pas forcément consécutives).

Dans le premier cas, le joueur A l'emporte et rafle les mises ; dans le second, c'est B.

Au premier lancer, "Pile" sort. Mais, pour une raison mystérieuse, on doit arrêter le jeu. Comment répartir les 64 pistoles ?

- 1) On considère la suite fictive de la partie en lançant 4 fois une pièce de monnaie.
- (a) Expliciter les différentes issues et dénombrer celles amenant la victoire de A.
 - (b) En déduire la probabilité que A gagne.
- 2) Répartir alors équitablement les 64 pistoles.

Exercice 38.

Clovis se promène en chantant gaiement entre deux maisons nommées A et B.

- À l'instant initial, il est en A.
- Après chaque couplet, il joue au dé sa destination future.
 - S'il tire 1 ou 6, il change de maison en poussant un cri aigu.
 - Sinon, il y reste (en poussant également un cri aigu).
- On définit les événements
 - A_n : « Clovis est en A après n couplets »
 - B_n : « Clovis est en B après n couplets ».
- On note enfin $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- 2) En déduire les expressions de a_n et b_n .
- 3) Soient i et $j \in \mathbb{N}$ tels que $i < j$. Justifier que $P_{A_i}(A_j) = P(A_{j-i})$.
Les événements A_i et A_j sont-ils indépendants ?

XXVI – Variables aléatoires, lois usuelles

1/ Espérance et Variance

Exercice 1.

Un QCM comporte 10 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses parmi lesquelles 2 sont correctes. Une bonne réponse rapporte 1 point et une mauvaise réponse en enlève 0,75. Est-il avisé de répondre au hasard ?

Exercice 2.

Un joueur lance un dé : si le numéro obtenu est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre obtenu ; sinon, il perd ce même nombre. Joueriez-vous à ce jeu ?

Exercice 3.

On lance deux dés équilibrés et l'on note X le plus grand des deux numéros obtenus. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

Exercice 4.

On dispose de 4 lettres à envoyer et des 4 enveloppes correspondantes (avec l'adresse du destinataire). On répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Soit alors X le nombre de lettres qui atteindront leur destinataire.

- 1) Décrire un univers adapté à cette expérience aléatoire.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer son espérance.

Exercice 5.

Au jeu de la roulette, les 37 numéros $\{0, 1, \dots, 36\}$ sont équiprobables. De plus, 18 de ces numéros sont rouges. On considère les deux jeux suivants :

- Premier Jeu : on mise 1 € sur « Rouge »
On gagne 1 € sur un numéro rouge sort, sinon on perd la mise.
- Second Jeu : on mise un 1 € sur le numéro 17
On gagne 35 € s'il ce numéro sort, sinon on perd la mise.

- 1) Pour chacun de ces jeux, étudier le gain réalisé (loi, espérance et variance).
- 2) Comparer alors les deux jeux (gain moyen, risque, frisson, ...).

Exercice 6.

On lance trois dés. En moyenne, quelle est la somme des points obtenus ?

Exercice 7.

On lance quatre fois de suite une pièce équilibrée. Soit X le nombre de séquences "Pile-Face" obtenues. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.

Exercice 8.

Une urne comporte des jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard, successivement et avec remise, N jetons dans l'urne. On note X le plus grand des numéros tirés.

- 1) Déterminer $P(X \leq k)$ pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$. En déduire $P(X = k)$ pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.
- 2) Prouver que $E(X) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^N$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)/n$.
- 3) Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} E(X)$. Commenter le résultat.

Exercice 9.

On lance deux dés équilibrés, l'un normal, l'autre ayant trois faces marquées 0 et trois faces marquées 6. On note alors X la somme des points obtenus.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 10.

On possède une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile est 0,3. On lance cette pièce jusqu'à ce qu'on obtienne "Pile" pour la première fois. Soit alors X le nombre de lancers effectués.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer son espérance. Interprétation ?

Exercice 11.

Un concierge rentre d'une soirée bien arrosée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle (c'est du propre !).

- 1) Il essaie les clefs les unes après les autres, en éliminant au fur et à mesure les clefs qui n'ont pas convenu, jusqu'à ce qu'il trouve la bonne. Soit alors X le nombre d'essais.
Déterminer la loi de probabilité de X , puis calculer son espérance et l'interpréter.
- 2) Finalement, la soirée était *très bien* arrosée, si bien que le concierge remet la clef essayée dans son trousseau après chaque tentative. Reprendre alors l'étude précédente.

Exercice 12.

On dispose de n objets. Chacun est placé au hasard dans l'une des boîtes $B_1, B_2, \dots, B_n$.

- 1) Déterminer le nombre moyen d'objets contenus dans B_1 .
Poser $Y_i = 1$ si l'objet i est dans B_1 et $Y_i = 0$ sinon, puis considérer $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.
- 2) On pose $X_i = 1$ si la boîte B_i est vide et $X_i = 0$ sinon.
 - (a) Que représente $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$?
 - (b) Déterminer les loi et espérance des variables X_i .
 - (c) En déduire le nombre moyen u_n de boîtes vides à l'issue du rangement.

Exercice 13.

Parmi les $2n$ personnes formant n couples, m décèdent. Combien de couples survivent en moyenne ? Indication : on pourra calculer d'abord $E(1_{C_i})$ avec C_i : « le couple i a survécu ».

Exercice 14.

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). Pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, la boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte puis une boule dans la boîte. Soient X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

- 1) Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
- 2) Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.
- 3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2/ Lois usuelles

Exercice 15.

On lance une pièce 20 fois de suite. On est gagnant à ce jeu lorsque le côté « pile » sort neuf, dix ou onze fois. Ce jeu est-il intéressant ?

Exercice 16.

La salle informatique comporte 20 ordinateurs fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour qu'un ordinateur tombe en panne lors d'un TP est 0,3.

Quelle est la probabilité pour qu'au plus quatre ordinateurs tombent en panne ?

Exercice 17.

A et B jouent au ping-pong, et le premier arrivé à 5 points gagne. Sachant que la probabilité que A remporte un point est 0.72, calculer la probabilité qu'il remporte la partie.

Exercice 18.

Un tireur atteint une cible avec une probabilité de 0,6. Montrer qu'il faut au minimum sept tirs pour que la probabilité d'atteindre au moins deux fois la cible dépasse 99 %.

Exercice 19.

Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. Au départ, il se situe à l'origine ; à chaque pas, il se déplace d'une unité vers la droite avec une probabilité p ou d'une unité vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. On note X_n son abscisse et D_n le nombre de pas vers la droite effectués après n pas.

- 1) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_n .
- 2) Exprimer X_n en fonction de D_n , puis calculer son espérance et sa variance.
- 3) Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ? Interprétation ?

Exercice 20.

A et B sont deux avions dotés respectivement de 4 et 2 moteurs. Les moteurs fonctionnent indépendamment les uns des autres et ils ont une probabilité p de tomber en panne.

- 1) On note X (resp. Y) le nombre de moteurs de l'avion A (resp. B) qui tombent en panne. Quelles sont les lois de probabilité de ces deux variables aléatoires ?
- 2) Chaque avion arrive à destination si au moins la moitié de ses moteurs fonctionnent. Dans lequel vaut-il mieux monter ?

XXVII – Fonctions de deux variables

Exercice 1.

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

- 1) $f : (x, y) \mapsto \ln(x/y)$.
- 2) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - 2y^2 + 1}$.
- 3) $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 - xy}$.

Exercice 2.

Étudier les limites des expressions suivantes en $(0, 0)$:

- (a) $(x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ (b) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (c) $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
(d) $\frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \times \sin(x)$ (e) $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ (f) $\frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Exercice 3.

Étudier la continuité en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

- 1) $f : (x, y) \mapsto x \cos y$
- 2) $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \geq x^2 \text{ ou } y \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
- 3) $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2/2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -x^2/2 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 4.

La fonction f est définie par $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$ pour $x \neq y$.

Est-il possible de la prolonger par continuité à $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5.

Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

- 1) $f : (x, y) \mapsto |x| + |y|$
- 2) $f : (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$
- 3) $f : (x, y) \mapsto \arctan(y/x)$ pour $x > 0$ et $y > 0$
- 4) $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 6.

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert contenant le point (a, b) et $\vec{v}(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto f(a + th, b + tk)$ est dérivable et calculer $\varphi'(t)$.

On dit que l'on a calculé la dérivée de f en (a, b) suivant le vecteur $\vec{v}$.

Exercice 7.

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{sinon} \end{cases}$

Est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 8.

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{sinon} \end{cases}$

Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 9.

Soient $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ des couples de valeurs de deux caractères discrets x et y .

Retrouver l'équation de la droite de régression linéaire de y par rapport à x en recherchant

les points critiques de la fonction $f : (a, b) \mapsto \sum_{k=1}^N (y_k - (ax_k + b))^2$.

Exercice 10.

Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes :

- 1) $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$
- 2) $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$
- 3) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$
- 4) $f : (x, y) \mapsto x^4$
- 5) $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 + 4(x - y) + 3$
- 6) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy$
- 7) $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 1}$