

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet est constitué de quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (4 points)

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.

Il a été constaté que :

- 91 % du stock de tomates est commercialisable ;
- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

On choisit au hasard une tomate dans le stock.

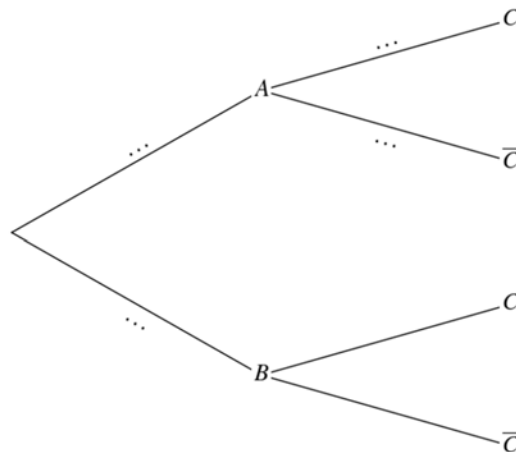
On désigne par :

- A l'événement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'événement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'événement « La tomate est commercialisable ».

Pour un événement quelconque E , on note $P(E)$ la probabilité de E .

Partie A

1. Recopier l'arbre ci-dessous en complétant les pointillés.



2. a. Déterminer la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A.
b. Démontrer que $P_B(C) = 0,85$.
c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Partie B

On rappelle que 9 % des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

- a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.
- b. Déterminer la probabilité qu'exactly deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millième.
- c. Déterminer la probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millième.

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$.

On admet que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09.

- a. Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n .
- b. Démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$.
- c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables. Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (6 points)

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
2. a. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .
Vérifier que, pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la **partie B**.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

- a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.
- b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1+0,5 \times 4^n}}$ pour tout entier naturel n .
- c. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$.

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n) .

```
from math import *

def termes(p) :
    u=...
    S=0
    L=[ ]
    for i in range(p) :
        S=...
        u=...
        L.append(S)
    return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande `L=[]` crée une liste vide ;
- la commande `L.append(S)` ajoute, à la fin de la liste `L`, l'élément supplémentaire `S`.

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq S_n \leq 3n$.
3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} ;$$

- le plan \mathcal{P} passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

1. Vérifier que la droite Δ passe par le point $C(1; 1; 1)$ mais pas par le point A .
2.
 - a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est $2x + y + 2z - 14 = 0$.
 - b. Vérifier que le plan \mathcal{P} passe par le point B mais pas par le point C .
3. On considère le point $D(3; 2; 3)$.
 - a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan \mathcal{P} .
 - b. Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
 - c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
 - d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.
4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .
 - a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29}\right)$.
 - b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.
 - c. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x \ln x$.
 - a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$.
 - b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a. Démontrer que sur l'intervalle $]0; +\infty[$ $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1]$.
4. On considère l'équation $f(x) = 2$.
 - a. Justifier que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.
 - b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$.
5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.
 - a. Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x) dx$.
 - b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :
$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_1^a x \ln x dx .$$
 - c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :
$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} .$$
 - d. Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x) dx$ quand a tend vers 0 .

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet est constitué de quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

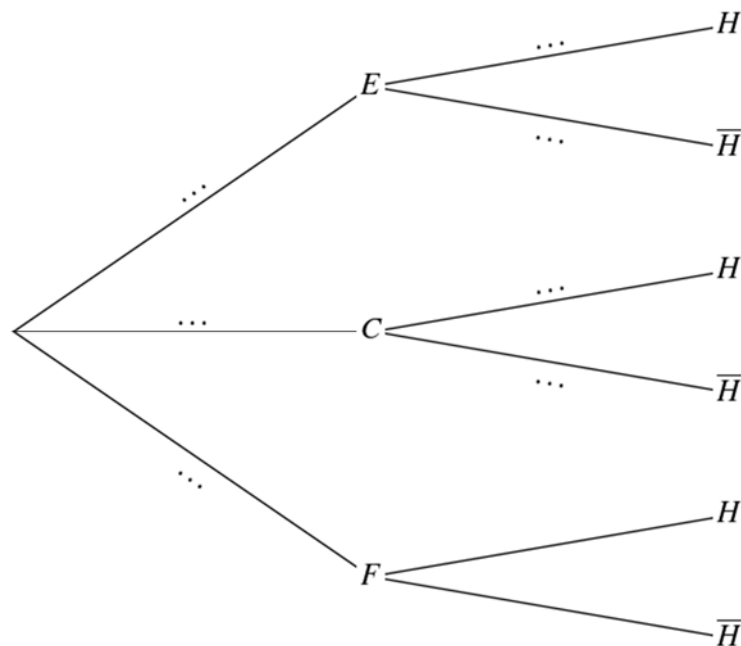
- 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



2. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.

3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». On arrondira le résultat au millième.

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». *On arrondira le résultat au millième.*
3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.
On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise. On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».
 - a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0,5875^n$.
 - b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 %.

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 euros de plus par mois quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y .
2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .
3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.
4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y , arrondie au centième.

5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z .

b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

Justifier cette affirmation.

EXERCICE 2 (4 points)

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1^{er} janvier 2025.

Partie A : étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n) . Pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n .

La suite (u_n) est définie par :

- $u_0 = 4$.
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n , $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1^{er} janvier 2026 donnée par ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = 4 - \frac{4}{x}$.
 - a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
 - d. Justifier que $\ell = 2$.
 - e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?
3. On considère le script Python ci-dessous.
 - a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2; 4[$.
Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
def population(s) :  
    u=4  
    n=0  
    while ... :  
        u= ...  
        n= ...  
    return n
```

- b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu

On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1^{er} janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

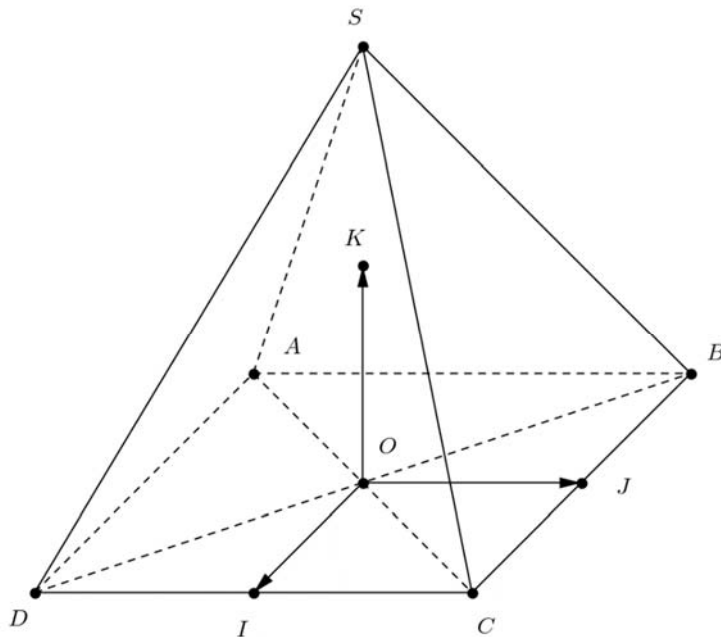
- la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$;
- $p(0) = 4$;
- la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = 2$ où y est une fonction de la variable réelle t .

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $p(t) = 2e^{-t} + 2$.
3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

EXERCICE 3 (5 points)

Dans cet exercice l'unité est le cm.

On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

- $AB = BC = CD = DA = OS = 2$ cm
- I est le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[OS]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

On admet que $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 1; 0)$, et $S(0; 0; 2)$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Donner les coordonnées des points A et D .
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$.
3. En déduire la mesure de l'angle \widehat{BSC} arrondie au dixième de degré près.

Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC) .

1. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que le vecteur \vec{n} est normal au plan (SBC) .
 - b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.

2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC) .

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. Calculer les coordonnées du point H .

c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

a. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

b. En déduire que le volume de la pyramide $OCBS$ est égal à $\frac{2}{3}$ cm³.

2. Déterminer l'aire du triangle SBC .

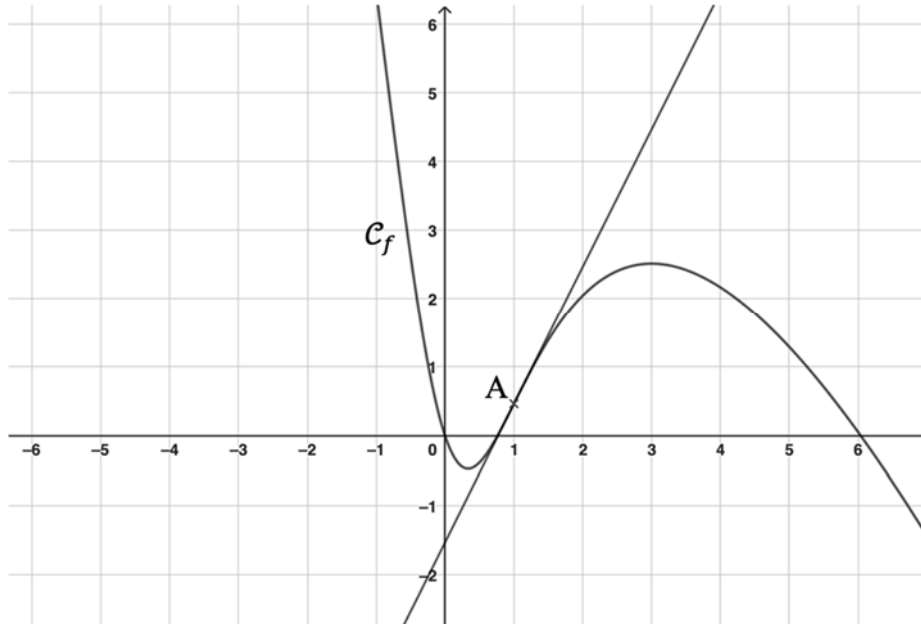
3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$ et on admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f et la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f , les intervalles de \mathbb{R} sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. a. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}.$$

a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.

c. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.