

Mathématiques
Devoir surveillé n°6
Mars 2026

Durée de l'épreuve : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Tous les théorèmes et les propriétés doivent être énoncés avec leurs hypothèses précises.

1. Énoncer la formule d'intégration par parties.
2. Énoncer la formule de Leibniz.
3. Donner la définition d'une fonction croissante (la fonction n'est pas forcément dérivable).
4. Donner la définition avec des quantificateurs de " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ".
5. Soit P un polynôme, donner deux propositions équivalentes à " x_0 est racine d'ordre n de P ".
6. Définir la loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.
7. Soient X une variable aléatoire finie et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une application, énoncer le théorème de transfert.
8. Soit E un espace vectoriel, rappeler les points à démontrer pour que F soit un sous espace vectoriel de E .
9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner deux propositions équivalentes à " A est inversible".
10. Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, donner la condition pour que AB existe.
Dans ce cas, on note $C = AB$ et on pose $C = (c_{i,j})$, préciser la valeur de $c_{i,j}$ et pour quels i et j .

Exercice 2.

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}.$$

- (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- (c) Justifier la dérivabilité de f sur $[1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

- (d) Montrer que f'' est positive sur $[1, +\infty[$. La fonction f est donc convexe sur $[1, +\infty[$.

- (e) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 1 de la fonction f .

- (f) En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1, ainsi que sa position relative par rapport à la courbe de f .

- (g) Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente au point d'abscisse 1.

Dans la suite, on se propose de montrer que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}.$$

2. (a) Dresser le tableau de variation complet (valeurs particulières, limites...) de la fonction g définie par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad g(t) = \frac{e^t}{t^3}.$$

- (b) En déduire l'encadrement :

$$0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e.$$

- (c) Montrer que, pour tout $x \geq 3$, on a l'encadrement :

$$0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x.$$

3. Grâce à deux intégrations par parties successives, montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt.$$

4. (a) Utiliser les questions précédentes pour déterminer un encadrement de $f(x)$ valable pour tout $x \in [3, +\infty[$.

- (b) En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.

Dans tout l'exercice, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

Partie I : étude des intégrales W_n

1. Calculer W_0 , W_1 et W_2 . On rappelle la formule trigonométrique : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(a) = \frac{\cos(2a) + 1}{2}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
3. Justifier que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
4. À l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

5. (a) Montrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $W_n W_{n+1}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

7. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2},$$

8. Déterminer un équivalent de W_n .

Partie II : un calcul de limite d'intégrale

Dans cette partie, on définit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Le but de cette partie est de calculer la limite de F en $+\infty$.

1. (a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
(b) Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.
(c) Prouver que pour tout $x \geq 1$:

$$F(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt.$$

- (d) En déduire que pour tout $x \geq 1$:

$$F(x) \leq 1 + \int_0^1 e^{-t^2} dt.$$

- (e) Conclure que F possède une limite finie notée ℓ en $+\infty$.
2. (a) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 en 0 pour la fonction exponentielle.
(b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^t \geq 1 + t.$$

- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in [0, n]$:

$$\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} \leq e^{-u^2} \leq \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, avec le changement de variable $u = n \tan(t)$, montrer que :

$$\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du = n \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}(t) dt$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, avec le changement de variable $u = n \sin(t)$, exprimer $\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du$ en fonction de W_{2n^2+1} .
(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$nW_{2n^2+1} \leq F(n) \leq nW_{2n^2-2}.$$

4. Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, puis que $\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4.

Pour tout entier n on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt.$$

1. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $[0,1]$.
(b) Étudier le sens de variation de f_n .
2. Montrer qu'il existe un unique réel c_n de $[0,1]$ tel que :

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt$$

et donner la valeur de c_0 .

3. On considère la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ définie à la question précédente ; montrer qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $[0,1]$.
4. (a) On a établi dans l'exercice précédent que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq x.$$

En déduire que pour tout nombre réel fixé r de $]0,1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{nt^2} dt = +\infty$$

- (b) Montrer que pour tout entier naturel n on a

$$\int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq 1.$$

- (c) En déduire la valeur de ℓ .