

Ouvre barrière Sinusmatic - Corrigé

1- Etude cinématique

1- Etude théorique

1.1- Relations entre les paramètres α , φ , θ et y

On a quatre paramètres pour ce mécanisme. Or son degré de mobilité est de un donc on a un seul paramètre indépendant. Il existe donc trois relations scalaires entre ces paramètres.

Ces trois relations scalaires sont obtenues par projection sur les axes du repère $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$ de la relation vectorielle de fermeture géométrique du cycle 1-2-3-4-1 : $\vec{OC} + \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AO} = \vec{0}$

$$\text{Soit : } -d_2 \cdot \vec{Y}_1 + 2.a \cdot \vec{Z}_1 + d_2 \cdot \vec{Y}_1 + 2.a \cdot \vec{Z}_1 + y \cdot \vec{Y}_3 - a \cdot \vec{Y}_4 - a \cdot \vec{Z}_4 = \vec{0}$$

$$\text{Etant donné le paramétrage adopté : } \vec{Y}_3 = \cos \theta \cdot \vec{Y}_2 + \sin \theta \cdot \vec{Z}_2$$

$$\vec{Y}_2 = \vec{Y}_1 \quad \text{et :} \quad \vec{Z}_2 = \cos \alpha \cdot \vec{Z}_1 + \sin \alpha \cdot \vec{X}_1$$

$$\vec{Z}_4 = \vec{Z}_1 \quad \text{et :} \quad \vec{Y}_4 = \cos \varphi \cdot \vec{Y}_1 - \sin \varphi \cdot \vec{X}_1$$

On en déduit de l'équation vectorielle de fermeture géométrique que :

$$2.a \cdot \vec{Z}_1 + y \cdot \cos \theta \cdot \vec{Y}_1 + y \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha \cdot \vec{Z}_1 + y \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha \cdot \vec{X}_1 - a \cdot \cos \varphi \cdot \vec{Y}_1 + a \cdot \sin \varphi \cdot \vec{X}_1 - a \cdot \vec{Z}_1 = \vec{0}$$

La projection sur les axes $\vec{X}_1, \vec{Y}_1$ et $\vec{Z}_1$ de cette équation vectorielle donne les trois équations :

$$y \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha + a \cdot \sin \varphi = 0 \quad \quad \quad y \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha = -a \cdot \sin \varphi \quad (a)$$

$$y \cdot \cos \theta - a \cdot \cos \varphi = 0 \quad \quad \quad \text{Soit :} \quad y \cdot \cos \theta = a \cdot \cos \varphi \quad (b)$$

$$2.a + y \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha - a = 0 \quad \quad \quad y \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha = -a \quad (c)$$

$$\Rightarrow \text{Par l'addition des 3 équations élevées au carré : } (a)^2 + (b)^2 + (c)^2 \text{ on a :} \quad y = a \cdot \sqrt{2} \quad (d)$$

$$\Rightarrow \text{Par division de la première équation par la dernière : } (a) / (c) \text{ on a :} \quad \tan \alpha = \sin \varphi \quad (e)$$

$$\Rightarrow \text{Par substitution de } y \text{ par } a \cdot \sqrt{2} \text{ dans l'équation (b) on obtient :} \quad \cos \theta = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}} \quad (f)$$

1.2- Relations entre les dérivées des paramètres α , φ , θ et y

$$\text{Par dérivation de la relation (e) par rapport au temps on obtient :} \quad \dot{\alpha} \cdot (1 + \tan^2 \alpha) = \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi$$

$$\text{D'où : } \dot{\alpha} = \dot{\varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \text{Or : } \tan \alpha = \sin \varphi \quad \text{On en déduit :} \quad \dot{\alpha} = \dot{\varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \quad (g)$$

$$\text{Par dérivation de la relation (f) par rapport au temps on obtient :} \quad -\dot{\theta} \cdot \sin \theta = -\dot{\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}}$$

$$\text{D'où : } \dot{\theta} = \dot{\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2} \cdot \sin \theta} \quad \text{Soit :} \quad \dot{\theta} = \dot{\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2} \cdot (1 - \cos^2 \theta)} \quad \text{Or :} \quad \cos \theta = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc : } -2 \cdot \cos^2 \theta = -\cos^2 \varphi = -1 + \sin^2 \varphi \quad \text{D'où on en déduit :} \quad \dot{\theta} = \dot{\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}} \quad (h)$$

Par dérivation de la relation (g) par rapport au temps (φ étant constant) on obtient :

$$\ddot{\alpha} = \dot{\varphi} \cdot \frac{-\dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot (1 + \sin^2 \varphi) - 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} = -\dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\sin \varphi \cdot (1 + \sin^2 \varphi + 2 \cdot \cos^2 \varphi)}{(1 + \sin^2 \varphi)}$$

Soit finalement (car $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$) :

$$\ddot{\alpha} = -\dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\sin \varphi \cdot (2 + \cos^2 \varphi)}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} \quad (i)$$

Par dérivation de la relation (h) par rapport au temps (φ étant constant) on obtient :

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi} \cdot \frac{\dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \varphi} - \frac{2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{2 \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \varphi}} \cdot \sin \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} = \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot (1 + \sin^2 \varphi) - \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Donc : $\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\cos \varphi \cdot (1 + \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{(1 + \sin^2 \varphi)^{3/2}}$

Soit finalement : $\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\cos \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (j)$

Applications numériques (Non demandé)

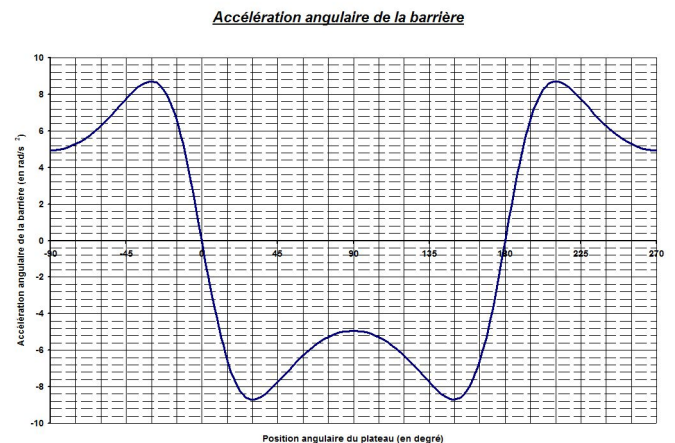
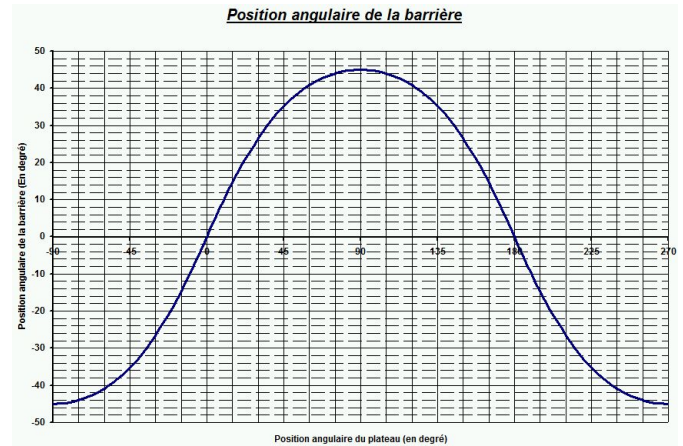
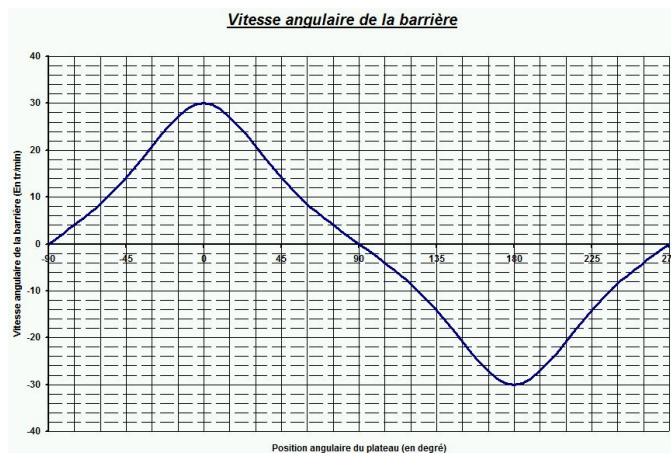
Pour la position, la vitesse et l'accélération de la barrière 2 (α , $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$) on obtient

$$\alpha = \text{Arctan}(\sin \varphi) \quad \dot{\alpha} = \dot{\varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \sin^2 \varphi}$$

$$\ddot{\alpha} = -\dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\sin \varphi \cdot (2 + \cos^2 \varphi)}{(1 + \sin^2 \varphi)^2}$$

Avec $\dot{\varphi} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 30}{60} = \pi \text{ rad/s}$ permettent à l'aide

d'un tableur d'obtenir les courbes suivantes :



1.3- Vecteurs vitesse des centres d'inertie

D'après la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{G2 \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{G_2 B} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$

Or le point B de 2 est fixe par rapport au bâti 1. Donc : $\overrightarrow{V_{B \in 2/1}} = \vec{0}$

On a donc : $\overrightarrow{V_{G2 \in 2/1}} = \left(\frac{\ell}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \overrightarrow{X_2} - y_{G2} \cdot \overrightarrow{Y_2} - \frac{\ell}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \overrightarrow{Z_2} \right) \wedge \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{Y_2}$

Soit finalement : $\overrightarrow{V_{G2 \in 2/1}} = \frac{\ell}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{X_2} + \frac{\ell}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{Z_2}$

D'après la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{G3 \in 3/1}} = \overrightarrow{V_{B \in 3/1}} + \overrightarrow{G_3 B} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/1}}$

Puis par composition des vitesses : $\overrightarrow{V_{G3 \in 3/1}} = \overrightarrow{V_{B \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{G_3 B} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}})$

Or le point B de 2 est fixe par rapport au bâti 1. Donc : $\overrightarrow{V_{B \in 2/1}} = \vec{0}$

Et B est le centre de la liaison pivot entre 3 et 2. Donc : $\overrightarrow{V_{B \in 3/2}} = \vec{0}$

On a donc : $\overrightarrow{V_{G3 \in 3/1}} = -\mathbf{y}_{G3} \cdot \overrightarrow{Y_3} \wedge (\dot{\theta} \cdot \overrightarrow{X_3} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{Y_2})$

Soit finalement : $\overrightarrow{V_{G3 \in 3/1}} = \mathbf{y}_{G3} \cdot (\dot{\theta} \cdot \overrightarrow{Z_3} + \dot{\alpha} \cdot \sin \theta \cdot \overrightarrow{X_3})$

D'après la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{G4 \in 4/1}} = \overrightarrow{V_{O \in 4/1}} + \overrightarrow{G_4 O} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/1}}$

Or le point O de 4 est fixe par rapport au bâti 1. Donc : $\overrightarrow{V_{O \in 4/1}} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{V_{G4 \in 4/1}} = -(\mathbf{y}_{G4} \cdot \overrightarrow{Y_4} + \mathbf{z}_{G4} \cdot \overrightarrow{Z_4}) \wedge \dot{\phi} \cdot \overrightarrow{Z_4}$

D'où : $\overrightarrow{V_{G4 \in 4/1}} = -\mathbf{y}_{G4} \cdot \dot{\phi} \cdot \overrightarrow{X_4}$

Du résultat précédent on a donc : $\overrightarrow{V_{G4 \in 4/1}} \cdot \overrightarrow{Z_1} = -\mathbf{y}_{G4} \cdot \dot{\phi} \cdot \overrightarrow{X_4} \cdot \overrightarrow{Z_1}$ Or : $\overrightarrow{Z_1} = \overrightarrow{Z_4}$

On en déduit : $\overrightarrow{V_{G4 \in 4/1}} \cdot \overrightarrow{Z_1} = 0$

Du résultat précédent on a aussi : $\overrightarrow{V_{G3 \in 3/1}} \cdot \overrightarrow{Z_1} = \mathbf{y}_{G3} \cdot (\dot{\theta} \cdot \overrightarrow{Z_3} \cdot \overrightarrow{Z_1} + \dot{\alpha} \cdot \sin \theta \cdot \overrightarrow{X_3} \cdot \overrightarrow{Z_1})$

Or : $\overrightarrow{Z_3} = \cos \theta \cdot \overrightarrow{Z_2} - \sin \theta \cdot \overrightarrow{Y_2}$ $\overrightarrow{Y_2} = \overrightarrow{Y_1}$ $\overrightarrow{Z_2} = \cos \alpha \cdot \overrightarrow{Z_1} + \sin \alpha \cdot \overrightarrow{Y_1}$

Et : $\overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{X_2}$ $\overrightarrow{X_2} = \cos \alpha \cdot \overrightarrow{X_1} - \sin \alpha \cdot \overrightarrow{Z_1}$

On en déduit : $\overrightarrow{V_{G3 \in 3/1}} \cdot \overrightarrow{Z_1} = \mathbf{y}_{G3} \cdot (\dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha - \dot{\alpha} \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha)$

Par dérivation temporelle de l'équation (d) : $\mathbf{y} = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = 0$ Et donc par dérivation temporelle de l'équation (c) : $\mathbf{y} \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha = -a \Rightarrow \dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha - \dot{\alpha} \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha = 0$

On en déduit : $\overrightarrow{V_{G3 \in 3/1}} \cdot \overrightarrow{Z_1} = 0$

2- Analyse du mécanisme

2.1- Hyperstatisme du mécanisme

Le mécanisme a un degré de mobilité de : $\mathbf{M} = 1$, Un nombre cyclomatique $\gamma = 1$ et trois liaisons pivot et une pivot glissant donc un nombre d'inconnues cinématiques : $\mathbf{I}_C = 3 \times 1 + 2 = 5$.

D'où le degré d'hyperstatisme du mécanisme : $\mathbf{H} = 6 \times 1 + 1 - 5 = 2$

2.2- Analyse de l'hyperstatisme

Par la fermeture cinématique du cycle 1-2-3-4-1 on a :

$$C \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{12}^{Y_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_2 + B \begin{Bmatrix} \omega_{23}^{X_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_2 + A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_3 + O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{41}^{Z_1} & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_1 = \{0\}$$

Par transport au point B on obtient :

$$B \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{12}^{Y_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_2 + B \begin{Bmatrix} \omega_{23}^{X_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_2 + B \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_3 + B \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{41}^{Z_1} & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_1 = \{0\}$$

Puis projection dans la base $\mathcal{B}_2$:

$$B \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{12}^{Y_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_2 + B \begin{Bmatrix} \omega_{23}^{X_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_2 + B \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3} \cdot \cos \theta & V_{34}^{Y_3} \cdot \cos \theta \\ \omega_{34}^{Y_3} \cdot \sin \theta & V_{34}^{Y_3} \cdot \sin \theta \end{Bmatrix} \mathcal{B}_2 + B \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{41}^{Z_1} & 0 \end{Bmatrix} \mathcal{B}_1 = \{0\}$$

On a une équation triviale de la projection du moment sur $\overrightarrow{X_2}$ et une combinaison linéaire entre les deux équations de projection du moment sur $\overrightarrow{Y_2}$: $\mathbf{V}_{34}^{Y_3} \cdot \cos \theta = 0$ et sur $\overrightarrow{Z_2}$: $\mathbf{V}_{34}^{Y_3} \cdot \sin \theta = 0$

En ajoutant à la liaison de centre A deux rotations d'axe $\overrightarrow{X_3}$ et $\overrightarrow{Z_3}$ on obtient le torseur :

$$A \begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ \omega_{34}^{Z_3} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_3} = B \begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & y \cdot \omega_{34}^{Z_3} \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ \omega_{34}^{Z_3} & -y \cdot \omega_{34}^{X_3} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_3} = B \begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & y \cdot \omega_{34}^{Z_3} \\ \omega_{34}^{Y_3} \cdot \cos \theta - \omega_{34}^{Z_3} \cdot \sin \theta & V_{34}^{Y_3} \cdot \cos \theta - V_{34}^{Z_3} \cdot \sin \theta \\ \omega_{34}^{Y_3} \cdot \sin \theta + \omega_{34}^{Z_3} \cdot \cos \theta & V_{34}^{Y_3} \cdot \sin \theta + V_{34}^{Z_3} \cdot \cos \theta \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

On a alors la fermeture cinématique :

$$B \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{12}^{Y_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + B \begin{Bmatrix} \omega_{23}^{X_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + B \begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & y \cdot \omega_{34}^{Z_3} \\ \omega_{34}^{Y_3} \cdot \cos \theta - \omega_{34}^{Z_3} \cdot \sin \theta & V_{34}^{Y_3} \cdot \cos \theta - V_{34}^{Z_3} \cdot \sin \theta \\ \omega_{34}^{Y_3} \cdot \sin \theta + \omega_{34}^{Z_3} \cdot \cos \theta & V_{34}^{Y_3} \cdot \sin \theta + V_{34}^{Z_3} \cdot \cos \theta \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2} + B \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{41}^{Z_1} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \{0\}$$

Les trois équations de la projection du moment deviennent alors :

$$\left| \begin{array}{l} y \cdot \omega_{34}^{Z_3} = 0 \\ V_{34}^{Y_3} \cdot \cos \theta - V_{34}^{Z_3} \cdot \sin \theta = 0 \text{ qui} \\ V_{34}^{Y_3} \cdot \sin \theta + V_{34}^{Z_3} \cdot \cos \theta = 0 \end{array} \right.$$

sont trois équations indépendantes. Donc le système est isostatique car les équations de la résultante le sont également.

Ainsi en modifiant la liaison pivot glissant d'axe (A, $\overrightarrow{Y_3}$) par une liaison linéaire annulaire d'axe

(A, $\overrightarrow{Y_3}$) de torseur cinématique : $A \begin{Bmatrix} \omega_{34}^{X_3} & 0 \\ \omega_{34}^{Y_3} & V_{34}^{Y_3} \\ \omega_{34}^{Z_3} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_3}$ **le système devient isostatique.**

2.3- Hypothèses sur le torseur sthénique en A

Ajouter deux inconnues cinématiques pour la résultante en projection sur les axes $\overrightarrow{X_3}$ et $\overrightarrow{Z_3}$ de la liaison de centre A revient à annuler deux inconnues sthéniques pour le moment en projection sur les mêmes axes $\overrightarrow{X_3}$ et $\overrightarrow{Z_3}$.

Donc pour faire une étude dynamique complète, (détermination de toutes les inconnues des actions de liaison) on peut garder la liaison pivot glissant d'axe (A, $\overrightarrow{Y_3}$) et faire l'hypothèse que les projections des moments en A sur les axes (A, $\overrightarrow{X_3}$) et (A, $\overrightarrow{Z_3}$) de la liaison de entre 3 et 4 sont nuls.

3- Géométrie des masses

3.1- Opérateur d'inertie du solide S_3

Le solide S_3 ayant deux plans de symétrie passant par B :

$$\overline{\mathbf{J}_B(S_3)} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$

3.2- Opérateur d'inertie du solide S_4

(O, $\overrightarrow{Y_4}$, $\overrightarrow{Z_4}$) étant un plan de symétrie de S_4 passant par O :

$$\overline{\mathbf{J}_O(S_4)} = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & -D_4 \\ 0 & -D_4 & C_4 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_4}$$

4- Etude cinétique

4.1- Calcul de l'énergie cinétique du système $S = S_2 + S_3 + S_4$

Le point B du solide S_2 étant fixe dans le solide S_1 l'énergie cinétique du solide S_2 dans son mouvement par rapport au solide S_1 est :

$$E_C(S_2/R_1) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \cdot \overline{J_B(S_2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

$$\text{Soit : } E_C(S_2/R_1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} \cdot \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} \cdot \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \dot{\alpha} \\ B_2 \cdot \dot{\alpha} \\ -D_2 \cdot \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{R_2} = \frac{1}{2} \cdot B_2 \cdot \dot{\alpha}^2$$

Le point B du solide S_3 étant fixe dans le solide S_1 l'énergie cinétique du solide S_3 dans son mouvement par rapport au solide S_1 est :

$$E_C(S_3/R_1) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/1}} \cdot \overline{J_B(S_3)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/1}}$$

$$\text{Soit : } E_C(S_3/R_1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \theta \\ -\dot{\alpha} \cdot \sin \theta \end{pmatrix}_{R_3} \cdot \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \theta \\ -\dot{\alpha} \cdot \sin \theta \end{pmatrix}_{R_3}$$

$$\text{Où : } E_C(S_3/R_1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \theta \\ -\dot{\alpha} \cdot \sin \theta \end{pmatrix}_{R_3} \cdot \begin{pmatrix} A_3 \cdot \dot{\theta} \\ B_3 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \theta \\ -C_3 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \theta \end{pmatrix}_{R_3} = A_3 \cdot \dot{\theta}^2 + (B_3 \cdot \cos^2 \theta + C_3 \cdot \sin^2 \theta) \cdot \dot{\alpha}^2$$

Le point O du solide S_4 étant fixe dans le solide S_1 l'énergie cinétique du solide S_4 dans son mouvement par rapport au solide S_1 est :

$$E_C(S_4/R_1) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{4/1}} \cdot \overline{J_O(S_4)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{4/1}}$$

$$\text{Soit : } E_C(S_4/R_1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}_{R_4} \cdot \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & -D_4 \\ 0 & -D_4 & C_4 \end{pmatrix}_{R_4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}_{R_4} = \frac{1}{2} \cdot C_4 \cdot \dot{\phi}^2$$

Le système S étant la somme des trois solides S_2 , S_3 et S_4 son énergie cinétique dans son mouvement par rapport à R_1 est :

$$E_C(S/R_1) = E_C(S_2/R_1) + E_C(S_3/R_1) + E_C(S_4/R_1)$$

On obtient alors :

$$E_C(S/R_1) = \frac{1}{2} \cdot (B_2 + B_3 \cdot \cos^2 \theta + C_3 \cdot \sin^2 \theta) \cdot \dot{\alpha}^2 + A_3 \cdot \dot{\theta}^2 + C_4 \cdot \dot{\phi}^2$$

3.2- Application du théorème de l'énergie cinétique au système $S = S_2 + S_3 + S_4$

Les actions mécaniques extérieures appliquées sur le système $S = S_2 + S_3 + S_4$ sont :

- ☞ Action du bâti 1 sur la barrière 2 due à la liaison pivot d'axe $(C, \overrightarrow{Y_1})$
- ☞ Action du bâti 1 sur le plateau 4 due à la liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{Z_1})$
- ☞ Poids de la barrière 2 : Force $\overrightarrow{P_2} = -m_2 \cdot g \cdot \overrightarrow{Z_1}$ appliquée en G_2
- ☞ Poids du doigt 3 : Force $\overrightarrow{P_3} = -m_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{Z_1}$ appliquée en G_3
- ☞ Poids du plateau 4 : Force $\overrightarrow{P_4} = -m_4 \cdot g \cdot \overrightarrow{Z_1}$ appliquée en G_4
- ☞ Couple moteur appliqué sur 4 de vecteur $\overrightarrow{C_m} = C_m \cdot \overrightarrow{Z_1}$

Les puissances des actions dues aux liaisons pivot d'axe $(C, \overrightarrow{Y_1})$ et $(O, \overrightarrow{Z_1})$, dans leur mouvement par rapport au repère R_1 , sont nulles car ce sont des actions de liaisons parfaites avec le bâti S_1 .

Puissance de la force $\overrightarrow{P_2}$

On a :

$$P(\overrightarrow{P_2}/R_1) = \overrightarrow{P_2} \cdot \overrightarrow{V_{G_2 \in 2/1}} = -m_2 \cdot g \cdot \overrightarrow{Z_1} \cdot \left(\frac{\ell}{2\sqrt{2}} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{X_2} + \frac{\ell}{2\sqrt{2}} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{Z_2} \right)$$

Soit :

$$P(\overrightarrow{P_2}/R_1) = -m_2 \cdot g \cdot \dot{\alpha} \cdot \frac{\ell}{2\sqrt{2}} \cdot \overrightarrow{Z_1} \cdot (\overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{Z_2}) \quad \text{Or : } \overrightarrow{Z_1} = -\sin \alpha \cdot \overrightarrow{X_2} + \cos \alpha \cdot \overrightarrow{Z_2}$$

Donc :
$$P(\vec{P}_2/R_1) = -m_2 \cdot g \cdot \dot{\alpha} \cdot \frac{\ell}{2\sqrt{2}} \cdot (-\sin \alpha \cdot \vec{X}_2 + \cos \alpha \cdot \vec{Z}_2) \cdot (\vec{X}_2 + \vec{Z}_2)$$

D'où :
$$P(\vec{P}_2/R_1) = m_2 \cdot g \cdot \dot{\alpha} \cdot \frac{\ell}{2\sqrt{2}} \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

Puissance de la force $\vec{P}_3$

On a :
$$P(\vec{P}_3/R_1) = \vec{P}_3 \cdot \vec{V}_{G3 \in 3/1} = -m_3 \cdot g \cdot \vec{Z}_1 \cdot \vec{V}_{G3 \in 3/1}$$
 Or:
$$\vec{Z}_1 \cdot \vec{V}_{G3 \in 3/1} = 0$$

Donc :
$$P(\vec{P}_3/R_1) = 0$$

Puissance de la force $\vec{P}_4$

On a :
$$P(\vec{P}_4/R_1) = \vec{P}_4 \cdot \vec{V}_{G4 \in 4/1} = -m_4 \cdot g \cdot \vec{Z}_1 \cdot \vec{V}_{G4 \in 4/1}$$
 Or:
$$\vec{Z}_1 \cdot \vec{V}_{G4 \in 4/1} = 0$$

Donc :
$$P(\vec{P}_4/R_1) = 0$$

Puissance du couple $\vec{C}_m$

On a :
$$P(\vec{C}_m/R_1) = \vec{C}_m \cdot \vec{\Omega}_{4/1} = C_m \cdot \vec{Z}_1 \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{Z}_1 = C_m \cdot \dot{\phi}$$

Puissances des actions intérieures

Le système S étant la somme de plusieurs solides en liaisons parfaites les uns avec les autres, la somme des action intérieure est nulle

Théorème de l'énergie cinétique :
$$\frac{d E_C(S/R_1)}{dt} = \sum P(\text{Ext}/R_1) + \sum P(\text{Int}/R_1)$$

D'après les résultats précédents on obtient donc :

$$(B_2 + B_3 \cdot \cos^2 \theta + C_3 \cdot \sin^2 \theta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} + \dot{\theta} \cdot (C_3 - B_3) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \alpha^2 + A_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} = m_2 \cdot g \cdot 3 \dot{\alpha} \cdot \frac{\ell}{2\sqrt{2}} \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha) + C_m \cdot \dot{\phi}$$

On en déduit donc le couple moteur :

$$C_m = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\phi}} \left[(B_2 + B_3 \cdot \cos^2 \theta + C_3 \cdot \sin^2 \theta) \cdot \ddot{\alpha} - m_2 \cdot g \cdot \frac{\ell}{2\sqrt{2}} \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha) \right] + \frac{\dot{\theta}}{\dot{\phi}} \left[(C_3 - B_3) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \alpha^2 + A_3 \cdot \ddot{\theta} \right]$$

5- Conclusion

La puissance fournie par le moteur est :
$$P_m = P(\vec{C}_m/R_1) = C_m \cdot \dot{\phi}$$

La vitesse de rotation du plateau 4 est constante :
$$\dot{\phi} = \frac{2\pi \times 30}{60} = \pi \text{ rad.s}^{-1}$$

La puissance maximale est donc obtenue au couple maximal :
$$C_m^{\text{Max}} = 12 \text{ N.m}$$

D'où la puissance maximale du moteur :
$$P_m^{\text{Max}} = 12 \times \pi = 38 \text{ W}$$