
I	Produit scalaire et norme associée	3
I.1	Produit scalaire	3
I.2	Norme euclidienne	4
I.3	Produits scalaires de référence	6
	Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$	6
	Produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, où $a < b$ sont des réels	7
	Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	8
	Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$	8
I.4	Identités remarquables	10
II	Orthogonalité	11
II.1	Familles orthogonales, familles orthonormales	11
II.2	Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	13
II.3	Orthogonal d'une partie d'un espace préhilbertien réel	14
III	Bases orthonormales d'un espace euclidien	17
III.1	Existence de bases orthonormales	17
III.2	Calculs dans une base orthonormée	18
IV	Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	21
IV.1	Sous-espaces vectoriels orthogonaux	21
IV.2	Supplémentaire orthogonal	21
IV.3	Expression de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	23
IV.4	Distance à un sous-espace vectoriel	26
V	Formes linéaires sur un espace euclidien	29

Extrait du programme

A - Espaces préhilbertiens réels

L'objectif majeur est le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique. On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire et norme associée	
Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produit scalaire défini par une intégrale sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Norme associée au produit scalaire.	Notations $\langle x, y \rangle$, $(x y)$, $x \cdot y$. Expression $X^\top Y$. Expression $\text{tr}(A^\top B)$. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Les étudiants doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\ u \pm v\ ^2$, identité de polarisation).
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel F , d'une partie X . Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $F^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.
c) Bases orthonormées d'un espace euclidien	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie. Projection orthogonale p_F sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie. Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F . Projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$; distance entre x et $\text{Vect}(u)^\perp$.	Dimension de $F^\perp$ en dimension finie. Les étudiants doivent savoir déterminer $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F . Notation $d(x, F)$. Application géométrique à des calculs de distances.
e) Formes linéaires sur un espace euclidien	
Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.	Vecteur normal à un hyperplan.

Dans tout le chapitre, les scalaires sont des **réels**.

I. Produit scalaire et norme associée

Remarque 7.1

Dans $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire de deux vecteurs $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ est défini par

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

L'utilisation de ce produit scalaire possède plusieurs applications. Par exemple :

1. Calculer le travail d'une force.
2. Projeter des vecteurs.
3. Calculer la distance d'un point à une droite.

I.1. Produit scalaire

Définition 7.1 – Produit scalaire, Espace préhilbertien, Espace euclidien

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle **produit scalaire sur E** toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est :

- **bilinéaire** : c'est-à-dire une application **linéaire à gauche**

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \varphi(\lambda.x_1 + \mu.x_2, y) = \lambda \times \varphi(x_1, y) + \mu \times \varphi(x_2, y)$$

et **linéaire à droite**

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \varphi(x, \lambda.y_1 + \mu.y_2) = \lambda \times \varphi(x, y_1) + \mu \times \varphi(x, y_2).$$

- **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- **positive** : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.
- **définie** : si $\varphi(x, x) = 0$, alors $x = 0_E$.

Dans ce cas, le produit scalaire de deux vecteurs x et y est plutôt noté $\langle x, y \rangle$. On trouve aussi les notations $(x|y)$ ou $x \cdot y$.

On dit que le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien (réel)**.

Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarque 7.2

- On résume la définition en disant qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
- Pour vérifier la bilinéarité, il suffit de vérifier la linéarité à gauche et la symétrie.
- On a : pour tout $x \in E, \langle x, 0_E \rangle = 0$ et $\langle 0_E, x \rangle = 0$.

Remarque 7.3 – Produit scalaire et sous-espace vectoriel

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E .

On peut définir un produit scalaire ϕ sur F en posant, pour tout $(x, y) \in F^2, \phi(x, y) = \langle x, y \rangle$.

+ En pratique, ϕ est encore noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

I.2. Norme euclidienne



Exercice 7.1 – Préparation à la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

En utilisant les propriétés du produit scalaire, montrer que :

$$\langle x + \lambda.y, x + \lambda.y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Résolution

Par linéarité par rapport à la deuxième variable :

$$\langle x + \lambda.y, x + \lambda.y \rangle = \langle x + \lambda.y, x \rangle + \lambda \langle x + \lambda.y, y \rangle.$$

Par linéarité par rapport à la première variable :

$$\langle x + \lambda.y, x \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle \quad \text{et} \quad \langle x + \lambda.y, y \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, y \rangle.$$

Par symétrie, $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.

Ainsi,

$$\langle x + \lambda.y, x + \lambda.y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$



Théorème 7.1 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors

$$\forall (x, y) \in E \times E, |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \times \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

De plus, on a l'égalité $|\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \times \sqrt{\langle y, y \rangle}$ si, et seulement si, $y = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda.y$ (c'est-à-dire, x et y sont colinéaires).

Démonstration

Inégalité :

Soit $(x, y) \in E \times E$.

Cas 1 : $y = 0$. Dans ce cas, $\langle x, y \rangle = 0 = \sqrt{\langle y, y \rangle}$, et l'inégalité est claire (on a même une égalité).

Cas 2 : $y \neq 0$.

Par positivité, bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle x + \lambda.y, x + \lambda.y \rangle \geq 0$ et $\langle x + \lambda.y, x + \lambda.y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle$.

On est en présence d'une expression polynomiale de degré 2 en λ (car $\langle y, y \rangle \neq 0$) qui est de signe constant.

Donc, son discriminant est négatif ou nul : $\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \times \langle y, y \rangle \leq 0$

D'où, $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \times \langle y, y \rangle$.

Donc, par croissance de la fonction racine carrée :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \times \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Cas d'égalité : dans le cas où $y = 0$, on avait égalité.

Dans le cas où $y \neq 0$, on a l'égalité $|\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \times \sqrt{\langle y, y \rangle}$ si, et seulement si, $\Delta = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x + \lambda_0.y, x + \lambda_0.y \rangle = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x + \lambda_0.y = 0$, si et seulement si, il existe $\mu = -\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x = \mu.y$.

Ainsi, $|\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \times \sqrt{\langle y, y \rangle}$ si, et seulement si, $y = 0$ ou il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $x = \mu.y$ si, et seulement si, x et y sont colinéaires. $\square$



Théorème 7.2 – Norme euclidienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1. **(Positivité)** Pour tout $x \in E$, $N(x) \geq 0$.
2. **(Homogénéité)** Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda.x) = |\lambda| \times N(x)$.

3. **(Séparation)** Pour tout $x \in E$, si $N(x) = 0$, alors $x = 0_E$.

4. **(Inégalité triangulaire)** Pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On note $\|x\| = N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et on dit que $\|\cdot\|$ est la **norme euclidienne associée au produit scalaire** $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration

1. Pour tout $x \in E$, on a $\langle x, x \rangle \geq 0$, donc $N(x)$ est bien défini et $N(x) \geq 0$. D'où la positivité de N .
2. Soit $x \in E$ tel que $N(x) = 0$. Alors, $\langle x, x \rangle = 0$. Donc, $x = 0_E$. D'où la séparation de N .
3. Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, par bilinéarité du produit scalaire, on a : $N(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \times \langle x, x \rangle} = |\lambda| \times N(x)$. D'où l'homogénéité de N .
4. Soit $(x, y) \in E^2$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :

$$N(x + y)^2 = \langle x + y, x + y \rangle = N(x)^2 + 2\langle x, y \rangle + N(y)^2.$$

D'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$N(x + y)^2 = \langle x + y, x + y \rangle = N(x)^2 + 2\langle x, y \rangle + N(y)^2 \leq N(x)^2 + 2|\langle x, y \rangle| + N(y)^2 \leq N(x)^2 + 2N(x) \times N(y) + N(y)^2 = (N(x) + N(y))^2.$$

Comme N est à valeurs positives, on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$. D'où l'inégalité triangulaire. $\square$

Théorème 7.3 – Inégalité triangulaire et cas d'égalité

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

- Pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- De plus, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si, $y = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ (c'est-à-dire, x et y sont colinéaires et de même sens).

Démonstration

- Le premier point découle du fait que $\|\cdot\|$ est une norme.
- Dans la démonstration de le théorème 7.2 page 4, on a vu que :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Donc, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $|\langle x, y \rangle| = \langle x, y \rangle$.

D'où, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si, x et y sont colinéaires et $|\langle x, y \rangle| = \langle x, y \rangle$ si, et seulement si, $y = 0$ ou il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $x = \mu y$ et $\langle x, y \rangle \geq 0$ si, et seulement si, $y = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$ et $\lambda \geq 0$ si, et seulement si, $y = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$. $\square$

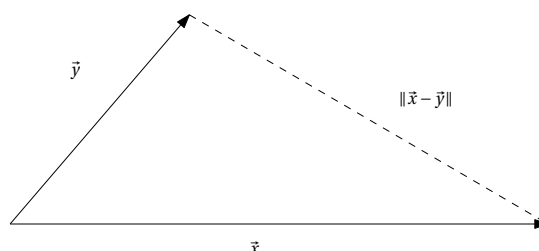
Remarque 7.4 – Visualisation de l'inégalité triangulaire

En remplaçant y par $-y$ dans l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|-y\|.$$

Or, par homogénéité, $\|-y\| = |-1| \|y\| = \|y\|$. Donc,

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$



I.3. Produits scalaires de référence



Exercice 7.2 – Si une somme de réels positifs ou nuls est nulle, alors tous les termes sont nuls

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs ou nuls tels que $a_1 + \dots + a_n = 0$.

Montrer que $a_1, \dots, a_n$ sont nuls.

Résolution

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_i \neq 0$.

Comme $a_1, \dots, a_n$ sont des réels positifs, $0 < a_i < a_1 + \dots + a_n = 0$. Contradiction.

Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$

On définit sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire canonique en posant :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \times y_k = x_1 \times y_1 + \dots + x_n \times y_n.$$

Remarque 7.5 – Écriture matricielle (important)

Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et

$$Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors, $\langle x, y \rangle = X^\top \times Y$.

La norme euclidienne associée est alors définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{X^\top \times X}.$$



Exercice 7.3

Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Résolution

► Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle &= \langle (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + y_k) \times z_k \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k \times z_k + y_k \times z_k) \\ &= \lambda \times \sum_{k=1}^n x_k \times z_k + \sum_{k=1}^n y_k \times z_k \\ &= \lambda \times \langle (x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle + \langle (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle. \end{aligned}$$

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

► Pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \times y_k = \sum_{k=1}^n y_k \times x_k = \langle (y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle$.

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

Donc, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

► Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$ comme somme de réels positifs.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = 0$. On a donc $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$ qui est une somme de réels positifs. Donc, $x_1 = \dots = x_n = 0$.

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

Remarque 7.6

On pourra penser à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire même lorsque l'exercice ne fait pas intervenir le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$: pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \times y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

Produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, où $a < b$ sont des réels

On définit sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ le produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \times g(t) dt.$$

La norme euclidienne associée est alors définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}.$$



Exercice 7.4

Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Résolution

► Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f, g, h) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\langle \lambda f + g, h \rangle = \int_a^b (\lambda f + g)(t) \times h(t) dt = \int_a^b \lambda f(t) \times h(t) + g(t) \times h(t) dt = \lambda \times \int_a^b f(t) \times h(t) dt + \int_a^b g(t) \times h(t) dt = \lambda \times \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle.$$

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

► Pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a : $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \times g(t) dt = \int_a^b g(t) \times f(t) dt = \langle g, f \rangle$.

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

Donc, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

► Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale (f^2 est positive et $a < b$).

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ tel que $\langle f, f \rangle = 0$. On a donc $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. D'où, f^2 est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle, donc, par théorème, f est la fonction nulle.

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Remarque 7.7

On pourra penser à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire même lorsque l'exercice ne fait

pas intervenir de produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: pour tous $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\left| \int_a^b f(t) \times g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt} \quad \text{et} \quad \sqrt{\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top \times B) \stackrel{*}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \times b_{i,j}.$$

La norme euclidienne associée est alors définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(A^\top \times A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2}.$$



Exercice 7.5

Montrer l'égalité $\star$.

Résolution

Par définition de la trace et du produit matriciel,

$$\text{tr}(A^\top \times B) = \sum_{j=1}^n [A^\top \times B]_{j,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n [A^\top]_{j,i} b_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

Pour la dernière égalité, on reconnaît une somme rectangulaire.



Exercice 7.6

Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résolution

► Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$. Par linéarité de la transposition et de la trace, on a :

$$\langle \lambda A + B, C \rangle = \text{tr}((\lambda A + B)^\top \times C) = \text{tr}(\lambda A^\top \times C + B^\top \times C) = \lambda \times \text{tr}(A^\top \times C) + \text{tr}(B^\top \times C) = \lambda \times \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle.$$

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

► Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Une matrice et sa transposée ont la même trace, donc,

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top \times B) = \text{tr}(B^\top \times A) = \langle B, A \rangle.$$

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

Donc, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

► Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geq 0$ comme somme de réels positifs.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\langle A, A \rangle = 0$. On a donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 0$ qui est une somme de réels positifs.

Donc, pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$, $a_{i,j} = 0$. Donc $A = 0$.

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$

On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X], \forall Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k \times b_k.$$

La norme euclidienne associée est alors définie par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X], \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}.$$



Exercice 7.7

Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Résolution

► Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$.

On note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^n c_k X^k$.

On a : $\lambda.P + Q = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + b_k) X^k$. Donc,

$$\langle \lambda.P + Q, R \rangle = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + b_k) c_k = \lambda \sum_{k=0}^n a_k c_k + \sum_{k=0}^n b_k c_k = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle.$$

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

► Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\langle Q, P \rangle = \sum_{k=0}^n b_k a_k = \sum_{k=0}^n a_k b_k = \langle P, Q \rangle.$$

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

Donc, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

► Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n a_k^2 \geq 0$ comme somme de réels positifs.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. On a donc $\sum_{k=0}^n a_k^2 = 0$ qui est une somme de réels positifs.

Donc, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = 0$. Donc $P = 0$.

D'où, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.4. Identities remarquables

🔧 Théorème 7.4

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

- ▶ **Identité remarquable** : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
- ▶ **Identité remarquable** : $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
- ▶ **Identité de polarisation** : $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \times (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{2} \times (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$.
- ▶ **Identité du parallélogramme** : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Démonstration

Soit $(x, y) \in E^2$.

▶ Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2.$$

Puis, par symétrie du produit scalaire : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

▶ On applique le point précédent avec y remplacé par $-y$. Par bilinéarité du produit scalaire et homogénéité de la norme, on a :

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, -y \rangle + \|-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

▶ Il suffit d'utiliser les deux points précédents. On a :

$$\frac{1}{4} \times (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4} \times (\|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle - \|y\|^2) = \langle x, y \rangle.$$

De même,

$$\frac{1}{2} \times (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2} \times (\|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x, y \rangle.$$

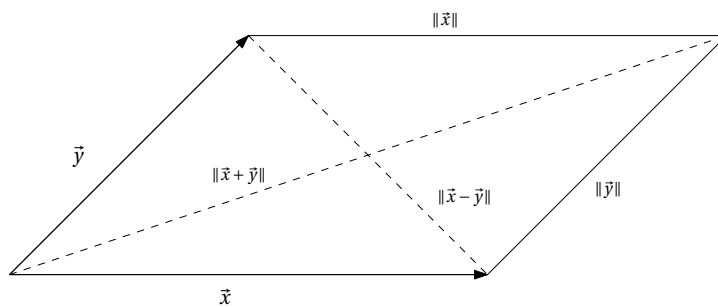
▶ Il suffit d'utiliser les deux premiers points. On a :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

□

👁 Remarque 7.8 – Visualisation de l'identité du parallélogramme

On peut énoncer l'identité du parallélogramme de la manière suivante : la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.



Identité du parallélogramme

**Exercice 7.8**

Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\| = \sqrt{x_1^2 + 2x_1 \times x_2 + 3x_2^2}.$$

est une norme euclidienne.

Résolution

On remarque que,

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2}.$$

On pose alors,

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 + x_2) \times (y_1 + y_2) + 2x_2 \times y_2.$$

Il reste à vérifier que φ est un produit scalaire en revenant à la définition.

II. Orthogonalité

II.1. Familles orthogonales, familles orthonormales



Définition 7.2 – Vecteurs orthogonaux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux** lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.

Remarque 7.9

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E et c'est le seul vecteur vérifiant cette propriété.

En effet, si $x_0 \in E$ vérifie, pour tout $x \in E$, $\langle x, x_0 \rangle = 0$, alors en particulierisant à $x = x_0$, il vient $\langle x_0, x_0 \rangle = 0$.

Donc (caractère défini du produit scalaire), $x_0 = 0_E$.



Définition 7.3 – Famille orthogonale

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille **orthogonale** si les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont orthogonaux deux à deux :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad [i \neq j \implies \langle u_i, u_j \rangle = 0].$$

Exemple 7.1

► La base canonique de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, est orthogonale.

► On note $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $c_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cos(k \times x).$$

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}$, avec $p \neq q$, on a :

$$\langle c_p, c_q \rangle = \int_0^{2\pi} c_p(x) \times c_q(x) dx = \int_0^{2\pi} \cos(p \times x) \times \cos(q \times x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \times (\cos((p+q) \times x) + \cos((p-q) \times x)) dx$$

D'où, comme $p+q \neq 0$ et $p-q \neq 0$, on a :

$$\langle c_p, c_q \rangle = \frac{1}{2} \times \left[\frac{\sin((p+q) \times x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q) \times x)}{p-q} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(c_0, \dots, c_n)$ est orthogonale.



Théorème 7.5

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs de E tous non nuls.

Alors, $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre.

Démonstration

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_p \cdot u_p = 0_E$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $\langle \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_p \cdot u_p, u_i \rangle = 0$.

D'où, par bilinéarité du produit scalaire : $\lambda_1 \times \langle u_1, u_i \rangle + \dots + \lambda_p \times \langle u_p, u_i \rangle = 0$.

Or, les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont deux à deux orthogonaux, donc, $\lambda_i \times \langle u_i, u_i \rangle = 0$.
 Or $u_i \neq 0_E$, donc (caractère défini du produit scalaire) $\langle u_i, u_i \rangle \neq 0$. Donc, $\lambda_i = 0$.
 Donc, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
 Ainsi, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. □

💡 Exemple 7.2 – Suite de l'exemple 7.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(c_0, \dots, c_n)$ est libre. On retrouve que E est de dimension infinie.

⚙️ Théorème 7.6 – Théorème de Pythagore

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs de E .

Alors,

$$\|u_1 + \dots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_p\|^2.$$

Démonstration

On procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

On note H_p : « Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthogonale de E , alors $\|u_1 + \dots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_p\|^2$. »

Initialisation. $p = 1$. Soit (u_1) une famille orthogonale de E . On a : $\|u_1\|^2 = \|u_1\|^2$. Donc, H_1 est vraie.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_p vraie et on montre H_{p+1} .

Soit $(u_1, \dots, u_{p+1})$ une famille orthogonale de E .

On note $v = u_1 + \dots + u_p$.

Par linéarité du produit scalaire, on a : $\langle v, u_{p+1} \rangle = \langle u_1, u_{p+1} \rangle + \dots + \langle u_p, u_{p+1} \rangle = 0$ (car les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont orthogonaux à u_{p+1}).

Donc, les vecteurs v et u_{p+1} sont orthogonaux.

D'où, $\|v + u_{p+1}\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, u_{p+1} \rangle + \|u_{p+1}\|^2 = \|v\|^2 + \|u_{p+1}\|^2$.

La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale. Donc, par hypothèse de récurrence, on a $\|v\|^2 = \|u_1 + \dots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_p\|^2$.

Ainsi, $\|u_1 + \dots + u_p + u_{p+1}\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_p\|^2 + \|u_{p+1}\|^2$. Ce qui achève la récurrence. □

📖 Définition 7.4 – Vecteur unitaire

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire.

On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **unitaire** (ou **normé**) lorsque : $\|x\| = 1$.

📖 Définition 7.5 – Famille orthonormée

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille **orthonormée** (ou **orthonormale**) si les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux :

$$\forall (i, j) \in [1, p]^2, \quad \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

💡 Exemple 7.3

► La base canonique de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, est orthonormée.

► On reprend les notations de l'exemple 7.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|c_k\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos(n \times t)^2 dt} = \sqrt{\pi} \neq 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(c_0, \dots, c_n)$, n'est pas orthonormée.

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot c_n$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(d_0, \dots, d_n)$, est orthonormée.

Théorème 7.7

Toute famille orthonormée est libre.

Démonstration

Une famille orthonormée est une famille orthogonale composée de vecteurs unitaires, donc non nuls. Ainsi, par le théorème 7.5 page 11, une famille orthonormée est libre. $\square$

II.2. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 7.1 – Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire.

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E , alors, il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une famille orthonormée de E telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).$$

Démonstration

On procède par récurrence sur p .

Initialisation. $p = 1$.

Soit (e_1) une famille libre.

On a $e_1 \neq 0$ et on peut alors poser $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$.

La famille (ε_1) est orthonormée car $\|\varepsilon_1\| = \frac{1}{\|e_1\|} \times \|e_1\| = 1$, et par construction, $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(\varepsilon_1)$.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vraie au rang p et on montre qu'elle est vraie au rang $p + 1$.

Soit $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ une famille libre de E . La sous-famille $(e_1, \dots, e_p)$ est encore une famille libre de E et par hypothèse de récurrence, il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une famille orthonormée de E telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).$$

On cherche ε_{p+1} sous la forme :

$$\varepsilon_{p+1} = \lambda_1 \cdot \varepsilon_1 + \dots + \lambda_p \cdot \varepsilon_p + \lambda_{p+1} \cdot e_{p+1}$$

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est orthonormée, donc on a : pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_k \rangle = \lambda_k + \lambda_{p+1} \times \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle.$$

Donc, pour que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$ soit orthogonale, il faut et il suffit que : pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_k = -\lambda_{p+1} \times \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle$.

Ainsi, en posant,

$$\varepsilon_{p+1} = \lambda_{p+1} \cdot (e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 - \dots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \cdot \varepsilon_p)$$

la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$ est orthogonale.

De plus, la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ est libre. Donc, $e_{p+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Or, par hypothèse de récurrence, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Donc, $\|e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 - \dots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \cdot \varepsilon_p\| \neq 0$.

Ainsi, en posant $\lambda_{p+1} = \frac{1}{\|e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 - \dots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \cdot \varepsilon_p\|}$, la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$ est orthonormée.

De plus, par hypothèse de récurrence, on a pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$.

Il reste à vérifier que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$.

Par construction :

$$\varepsilon_{p+1} = \underbrace{\lambda_{p+1}}_{\neq 0} \cdot (e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 - \dots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \cdot \varepsilon_p) = \lambda_{p+1} \cdot e_{p+1} - \underbrace{\lambda_{p+1} \cdot (\langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 + \dots + \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \cdot \varepsilon_p)}_{\in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)}$$

Ainsi, on a bien $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$. $\square$

Remarque 7.10 – Algorithme de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $(e_1, \dots, e_p) \in E$ une famille libre de E qui n'est pas nécessairement une famille orthonormée.

On peut lui appliquer le procédé de Gram-Schmidt :

1. On pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$.
2. On pose $e'_2 = e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1$. On calcule $\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle$.
On pose ensuite $\varepsilon_2 = \frac{1}{\|e'_2\|} \cdot e'_2$.
3. On pose $e'_3 = e_3 - \langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 - \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \cdot \varepsilon_2$. On calcule $\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle$ et $\langle e_3, \varepsilon_2 \rangle$.
On pose ensuite $\varepsilon_3 = \frac{1}{\|e'_3\|} \cdot e'_3$.
4. ...
5. Supposons avoir construit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$.
On pose $e'_p = e_p - \langle e_p, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 - \dots - \langle e_p, \varepsilon_{p-1} \rangle \cdot \varepsilon_{p-1}$. On calcule $\langle e_p, \varepsilon_1 \rangle, \dots, \langle e_p, \varepsilon_{p-1} \rangle$.
On pose ensuite $\varepsilon_p = \frac{1}{\|e'_p\|} \cdot e'_p$.

Remarquons que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est orthonormée, donc libre, et par construction $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Si plus, $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E , alors $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = E$. Donc, la famille orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E .



Exercice 7.9

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E . On munit E du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) \times Q(t) dt.$$

Orthonormaliser la famille $\mathcal{B}$.

Résolution

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt et on trouve :

$$\left(1, 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) \right).$$

II.3. Orthogonal d'une partie d'un espace préhilbertien réel



Définition 7.6 – Orthogonal d'une partie

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et A une partie de E .

L'orthogonal de A est l'ensemble noté $A^\perp$ composé des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$



Proposition 7.2

On a : $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Démonstration

► On sait que, pour tout $x \in E$, $\langle x, 0_E \rangle = 0$ (c'est une conséquence de la linéarité à droite du produit scalaire).

Donc, tous les vecteurs de E sont orthogonaux à 0_E .

Donc, $\{0_E\}^\perp = E$.

► Soit $x \in E^\perp$.

Par définition, pour tout $a \in E$, $\langle x, a \rangle = 0$.

En particulier, pour $a = x$, on a $\langle x, x \rangle = 0$.

Or, le produit scalaire est défini positif, donc $x = 0_E$.

D'où, $E^\perp \subset \{0_E\}$.

De plus, pour tout $a \in E$, $\langle a, 0_E \rangle = 0$, donc $0_E \in E^\perp$.

D'où, $\{0_E\} \subset E^\perp$.

Ainsi, $E^\perp = \{0_E\}$. □

**Exercice 7.10**

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$ tels que :

$$\forall z \in E, \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle.$$

Montrer que $x = y$.

Résolution

Par bilinéarité du produit scalaire, on a : pour tout $z \in E$, $\langle x - y, z \rangle = 0$.

Donc, $x - y \in E^\perp$.

Or, $E^\perp = \{0_E\}$.

Donc, $x - y = 0$. Autrement dit, $x = y$.

Autre rédaction.

Par bilinéarité du produit scalaire, on a : pour tout $z \in E$, $\langle x - y, z \rangle = 0$.

En prenant $z = x - y$, il vient $\|x - y\|^2 = 0$.

Par séparation de la norme, $x - y = 0_E$. Donc, $x = y$.

**Théorème 7.8**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On a :

1. Soit A une partie de E . Alors, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit A une partie de E . Alors A et $A^\perp$ sont orthogonaux.
En particulier, si A est un sous-espace vectoriel de E , A et $A^\perp$ sont en somme directe (autrement dit, $A \cap A^\perp = \{0_E\}$).
3. Si $A \subset B$ sont des parties de E , alors $B^\perp \subset A^\perp$.
4. Si A est une partie de E , alors $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Démonstration

1. Par définition de l'orthogonal d'une partie, on a $A^\perp \subset E$.

De plus, pour tout $a \in A$, $\langle a, 0_E \rangle = 0$, donc $0_E \in A^\perp$.

Soient $(x, y) \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par bilinéarité du produit scalaire, on a : pour tout $a \in A$, $\langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = 0$.

Donc, $\lambda x + y \in A^\perp$.

Ainsi, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

2. Soient $a \in A$ et $x \in A^\perp$. Par définition de l'orthogonal de A , on a $\langle a, x \rangle = 0$. Donc A et $A^\perp$ sont orthogonaux.

Or, deux sous-espaces vectoriels orthogonaux sont en somme directe. Donc, $A \cap A^\perp = \{0_E\}$ et A et $A^\perp$ sont en somme directe.

3. Soit $x \in B^\perp$.

Par définition, pour tout $b \in B$, $\langle x, b \rangle = 0$.

Or, par hypothèse $A \subset B$, donc pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ puis $\langle x, a \rangle = 0$.

Donc, $x \in A^\perp$.
Ainsi, $B^\perp \subset A^\perp$.

4. Soit A un sous-espace vectoriel de E .

Soit $x \in A$. Pour tout $a \in A^\perp$, $\langle x, a \rangle = 0$, donc $x \in (A^\perp)^\perp$.

Ainsi, $A \subset (A^\perp)^\perp$. □

 **Attention – En dimension infinie, l'égalité peut-être fausse $A = (A^\perp)^\perp$.**

Voir le TD pour un contre-exemple.

Théorème 7.9

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et A un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E .

On note $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de A . Alors, pour tout $x \in E$, on a l'équivalence :

$$x \in A^\perp \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle x, e_k \rangle = 0.$$

Démonstration

($\Rightarrow$) Soit $x \in A^\perp$.

Les vecteurs $e_1, \dots, e_p$ appartiennent à A (la famille $(e_1, \dots, e_p)$ génère A).

Donc, par définition d'orthogonal d'une partie, $\langle x, e_1 \rangle = 0, \dots, \langle x, e_k \rangle = 0$.

($\Leftarrow$) On suppose que $\langle x, e_1 \rangle = 0, \dots, \langle x, e_k \rangle = 0$.

Soit $a \in A$.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ génère A .

Donc, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p$.

Par bilinéarité du produit scalaire, on a : $\langle x, a \rangle = \lambda_1 \cdot \langle x, e_1 \rangle + \dots + \lambda_p \cdot \langle x, e_p \rangle = 0$.

Ceci est vrai pour tout $a \in A$, donc $x \in A^\perp$. □

Méthode 7.1

Pour montrer que $x \in A^\perp$, il suffit de vérifier que x est orthogonal aux vecteurs d'une famille génératrice de A .

III. Bases orthonormales d'un espace euclidien

III.1. Existence de bases orthonormales



Définition 7.7 – Base orthonormée

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une **base orthonormée** (ou **orthonormale**) de E lorsque c'est une base de E et une famille orthonormée.

Exemple 7.4

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique est une base orthonormée.
- La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel est une base orthonormée.



Proposition 7.3

Tout espace euclidien possède des bases orthonormées.

Démonstration

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Par définition E est de dimension finie. Notons n sa dimension.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . En particulier la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une famille orthonormée de E telle que $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est orthonormée, donc libre, et elle engendre E . C'est une base orthonormée de E . $\square$



Théorème 7.10 – Théorème de la base orthonormée incomplète

Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée de cet espace.

Démonstration

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Par définition E est de dimension finie. Notons n sa dimension.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille orthonormée de E .

Par théorème, cette famille est libre (donc $p \leq n$) et peut être complétée en une base $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ de E .

On orthonormalise cette base par le procédé de Gram-Schmidt. La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est déjà orthonormée, donc ses vecteurs ne sont pas modifiés.

On obtient alors $(u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$ une famille orthonormée de E .

Par théorème, cette famille est libre et, de plus, est composée de $n = \dim(E)$ vecteurs de E .

Par théorème, $(u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$ est une base de E . De plus, cette base complète bien la famille $(u_1, \dots, u_p)$ et est orthonormée. $\square$

Remarque 7.12 – Matrice de changement de bases

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E qu'on orthonormalise par le procédé de Gram-Schmidt. On note $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base obtenue et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On rappelle que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Par construction, on a : pour tout $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$. Donc, en particulier, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\varepsilon_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

On en déduit que la matrice de passage P est triangulaire supérieure.

III.2. Calculs dans une base orthonormée

Théorème 7.11 – Important !

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

► Soit $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n \in E$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $x_i = \langle x, e_i \rangle$

D'où,

$$x = \langle x, e_1 \rangle.e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle.e_n.$$

♪ ♪ ♪ Les coordonnées d'un vecteur x dans une base orthonormée sont les produits scalaires de x avec les vecteurs de la base.

► Soient $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n \in E$ et $y = y_1.e_1 + \dots + y_n.e_n \in E$. On a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \times y_k = x_1 \times y_1 + \dots + x_n \times y_n.$$

En notant $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$, on a :

$$\langle x, y \rangle = X^{\top} \times Y.$$

► Soit $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n \in E$. On a :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

En notant $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, on a :

$$\|x\| = \sqrt{X^{\top} \times X}.$$

Démonstration

► Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\langle x, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k.e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n x_k \times \langle e_k, e_i \rangle.$$

Or, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée. Donc, $\langle e_k, e_i \rangle = 0$ si $i \neq k$ et $\langle e_k, e_i \rangle = 1$ si $i = k$.
Donc, $\langle x, e_i \rangle = x_i$.

► Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k.e_k, \sum_{j=1}^n y_j.e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k \times y_j \times \langle e_k, e_j \rangle.$$

Or, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée. Donc, $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ si $j \neq k$ et $\langle e_k, e_j \rangle = 1$ si $j = k$.

Donc, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \times y_k$.

► Par le second point, on a :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

□



Exercice 7.11 – Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k) \times Q(a_k)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{X - a_i}{a_j - a_i}$.

2. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}_n[X], \varphi)$
3. Déterminer les coordonnées de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Résolution

1. ► Soient $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(P, \lambda.Q + R) = \sum_{k=0}^n P(a_k) \times (\lambda.Q + R)(a_k) = \sum_{k=0}^n (\lambda.P(a_k) \times Q(a_k) + P(a_k) \times R(a_k)) = \lambda \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k) + \sum_{k=0}^n P(a_k)R(a_k) = \lambda\varphi(P, Q) + \varphi(P, R).$$

D'où, φ est linéaire à droite.

► Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$. On a : $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k) \times Q(a_k) = \sum_{k=0}^n Q(a_k) \times P(a_k) = \varphi(Q, P)$.

D'où, φ est symétrique.

Donc, φ est bilinéaire.

► Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a : $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \geq 0$ car somme de réels positifs.

On suppose que $\varphi(P, P) = 0$. D'où, $\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = 0$. Donc, comme chaque terme de la somme est positif, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_k) = 0$.

Le polynôme P est de degré au plus n et possède $n + 1$ racines, c'est donc le polynôme nul.

D'où, φ est défini positif.

φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. ► Montrons que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormée.

Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. On a : $\varphi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k) \times L_j(a_k)$.

Or, par définition de L_i et L_j , pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $L_i(a_k) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$ et $L_j(a_k) = \delta_{j,k}$.

D'où, $\varphi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k) \times L_j(a_k) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k} \times \delta_{j,k} = \delta_{i,j} \times \delta_{j,j} = \delta_{i,j}$.

Donc, $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}_n[X], \varphi)$.

► De plus, une famille orthonormée est libre. Donc, $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille libre de $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs. Donc,

$(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}_n[X], \varphi)$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On sait que dans une base orthonormée les coordonnées de P sont les produits scalaires de P par les vecteurs de la base. D'où, $P = \varphi(L_0, P).L_0 + \dots + \varphi(L_n, P).L_n$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(L_i, P) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k) \times P(a_k) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k} \times P(a_k) = P(a_i)$.

Donc,

Les coordonnées de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base sont $(P(a_0), \dots, P(a_n))$.



Exercice 7.12

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\text{Tr}(f) = \sum_{k=1}^n \langle f(e_k), e_k \rangle.$$

Résolution

On sait que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}$.
 Or, par le théorème 7.11 page 18, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$f(e_j) = \langle f(e_j), e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle f(e_j), e_n \rangle \cdot e_n.$$

Donc,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \langle f(e_1), e_1 \rangle & \dots & \langle f(e_n), e_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1), e_n \rangle & \dots & \langle f(e_n), e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\text{Tr}(f) = \sum_{k=1}^n \langle f(e_k), e_k \rangle.$$

IV. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

IV.1. Sous-espaces vectoriels orthogonaux



Définition 7.8 – Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et A et B deux sous-espaces vectoriels de E .
On dit que A et B sont orthogonaux lorsque :

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad \langle a, b \rangle = 0.$$

On note alors $A \perp B$.



Théorème 7.12

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $A_1, \dots, A_p$ des sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux.

La somme $A_1 + \dots + A_p$ est directe.

Démonstration

Soient $a_1 \in A_1, \dots, a_p \in A_p$ tels que $a_1 + \dots + a_p = 0_E$.

Soit $i \in [1, p]$. On a : $\langle a_i, a_1 + \dots + a_p \rangle = \langle a_i, 0_E \rangle = 0$.

D'où, par linéarité du produit scalaire, on a : $0 = \langle a_1 + \dots + a_p, a_i \rangle = \langle a_1, a_i \rangle + \dots + \langle a_p, a_i \rangle$.

Or, les sous-espaces vectoriels $A_1, \dots, A_p$ sont deux à deux orthogonaux. Pour tout $k \neq i$, on a : $\langle a_k, a_i \rangle = 0$.

Donc, $0 = \langle a_1, a_i \rangle + \dots + \langle a_p, a_i \rangle = \langle a_i, a_i \rangle$.

Donc, comme un produit scalaire est défini positif, on a : $a_i = 0_E$. Ceci est vrai pour tout $i \in [1, p]$.

Ainsi, la somme $A_1 + \dots + A_p$ est directe. □

IV.2. Supplémentaire orthogonal



Proposition 7.4

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E .

On considère un sous-espace vectoriel G de E . Si

- G est un supplémentaire de F dans E ,
- F et G sont orthogonaux,

alors $G = F^\perp$.

Démonstration

Soit G un supplémentaire de F dans E . On suppose que F et G sont orthogonaux.

Montrons que $G = F^\perp$.

► Soit $x \in G$.

On sait que F et G sont orthogonaux, donc, pour tout $a \in F$, $\langle a, x \rangle = 0$.

Donc, $x \in F^\perp$.

D'où $G \subset F^\perp$.

► Soit $x \in F^\perp$.

On sait que $E = F \oplus G$.

Alors, $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$.

D'où, $\langle x, a \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, a \rangle$.

Or, $x \in F^\perp$ et $a \in F$, donc $\langle x, a \rangle = 0$.

De plus, $b \in G$, $a \in F$ et F et G sont orthogonaux. Donc, $\langle b, a \rangle = 0$.

D'où, $\langle a, a \rangle = 0$. Or, le produit scalaire est défini positif, donc $a = 0_E$.
 Donc, $x = b \in G$.
 D'où, $F^\perp \subset G$.
 Ainsi, $F^\perp = G$. □



Définition 7.9 – Supplémentaire orthogonal

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E .
 Lorsque F et $F^\perp$ sont supplémentaires, $F^\perp$ est appelé **le supplémentaire orthogonal** de F .

Théorème 7.13

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E . Alors :

- $E = F \oplus F^\perp$;
- $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration

► Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .

Soit $x \in E$.

On procède par analyse-synthèse.

Analyse. On suppose qu'il existe $a \in F$ et $b \in F^\perp$ tel que $x = a + b$.

On décompose a dans la base choisie de F . On a : $a = a_1.e_1 + \dots + a_p.e_p$, où $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$.

Comme $b \in F^\perp$ et la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle x, e_i \rangle = \langle a, e_i \rangle + \langle b, e_i \rangle = a_i$.

D'où, $a = \langle x, e_1 \rangle.e_1 + \dots + \langle x, e_p \rangle.e_p$ et $b = x - (\langle x, e_1 \rangle.e_1 + \dots + \langle x, e_p \rangle.e_p)$.

Synthèse. On pose $a = \langle x, e_1 \rangle.e_1 + \dots + \langle x, e_p \rangle.e_p$ et $b = x - (\langle x, e_1 \rangle.e_1 + \dots + \langle x, e_p \rangle.e_p)$.

On a bien $a + b = x$ et $a \in F$ (car $(e_1, \dots, e_p)$ engendre F).

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\langle b, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - (\langle x, e_1 \rangle \times \langle e_1, e_i \rangle + \dots + \langle x, e_p \rangle \times \langle e_p, e_i \rangle).$$

Or, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée, donc, $\langle b, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0$.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ engendre F , donc $b \in F^\perp$.

Ce qui termine l'analyse-synthèse.

►

- Soit $x \in F$.

Pour tout $a \in F^\perp$, on a $\langle a, x \rangle = 0$. Donc, $x \in (F^\perp)^\perp$.

D'où, $F \subset (F^\perp)^\perp$.

- Soit $x \in (F^\perp)^\perp$.

On sait que F est de dimension finie. Donc, $E = F \oplus F^\perp$.

On décompose x dans $E = F \oplus F^\perp$. On a : $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in F^\perp$. D'où, $\langle b, x \rangle = \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle$.

Or, $x \in (F^\perp)^\perp$, $b \in F^\perp$ et $a \in F$, donc, $\langle b, x \rangle = \langle b, a \rangle = 0$.

D'où, $\langle b, b \rangle = 0$.

Or, le produit scalaire est défini positif, donc $b = 0_E$, puis $x = a \in F$.

D'où, $(F^\perp)^\perp \subset F$.

Ainsi, $F = (F^\perp)^\perp$. □

Corollaire 7.1

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a :

- $E = F \oplus F^\perp$ et, en particulier, $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$;
- $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration

On sait que F est un sous-espace vectoriel de E et E est de dimension finie, donc il suffit d'appliquer la proposition précédente. $\square$

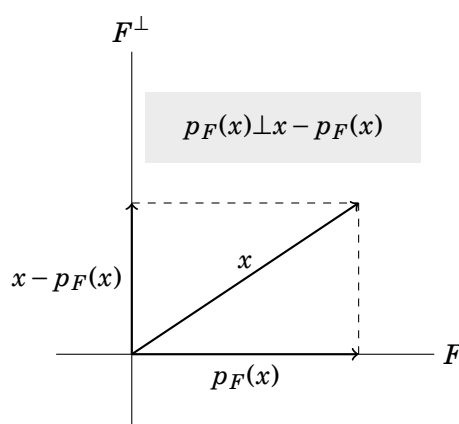
IV.3. Expression de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition 7.10 – Projection orthogonale, projeté orthogonale d'un vecteur

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On appelle **projection orthogonale sur F** la projection, notée p_F , sur F parallèlement à $F^\perp$. De plus, pour tout $x \in E$, le vecteur $p_F(x)$ est appelé le **projeté orthogonal de x sur F** .

Remarque 7.13

La définition précédente est licite car F est de dimension finie et on sait que dans ce cas $E = F \oplus F^\perp$.



Remarque 7.14

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et p un projecteur de E .

On sait que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et que p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

D'où, p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$ (le sens direct est une conséquence de la définition de projecteur orthogonal et le sens réciproque est une conséquence de la proposition 7.4 page 21).

Théorème 7.14

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On note $(e_1, \dots, e_p)$ une **base orthonormée de F** .

Alors, pour tout $x \in E$, $p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle \cdot e_k = \langle x, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle x, e_p \rangle \cdot e_p$.

Démonstration

C'est une conséquence de la démonstration du théorème 7.13 page 22. Le a trouvé est $p_F(x)$. $\square$

Remarque 7.15 – Retour sur l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $(e_1, \dots, e_p) \in E$ une famille libre de E qui n'est pas nécessairement une famille orthonormée.

Pour orthonormaliser cette famille, on définit récursivement les vecteurs :

1. $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$ qui est unitaire.
2. $e'_2 = e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1$ où le vecteur $\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1$ est le projeté orthogonal de e_2 sur $\text{Vect}(\varepsilon_1) = \text{Vect}(e_1)$.
Le vecteur obtenu e'_2 est alors orthogonal à e_1 .
On pose ensuite $\varepsilon_2 = \frac{1}{\|e'_2\|} \cdot e'_2$ qui est unitaire.
3. On pose $e'_3 = e_3 - (\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 + \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \cdot \varepsilon_2)$ où le vecteur $\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 + \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \cdot \varepsilon_2$ est le projeté orthogonal de e_3 sur $\text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{Vect}(e_1, e_2)$.
Le vecteur obtenu e'_3 est alors orthogonal à e_1 et e_2 .
On pose ensuite $\varepsilon_3 = \frac{1}{\|e'_3\|} \cdot e'_3$ qui est unitaire.
4. et ainsi de suite...

Remarque 7.16 – Comment déterminer le projeté orthogonal à partir d'une famille génératrice? (Important)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On note $(e_1, \dots, e_r)$ une famille génératrice quelconque de F (on ne suppose pas que c'est une base orthonormée de F).

Soit $x \in E$. Par définition, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur y vérifiant :

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp.$$

Or, la famille $(e_1, \dots, e_r)$ engendre F , donc on a : $y = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_r \cdot e_r$; et, par le théorème 7.9 page 16, on a

$$x - y \in F^\perp \iff \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \langle x - y, e_k \rangle = 0.$$

Les r équations

$$\begin{cases} \langle x - y, e_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x - y, e_r \rangle = 0 \end{cases}$$

permettent d'obtenir un système linéaire de r équations à résoudre et dont à r inconnues sont les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. L'avantage de cette méthode est qu'elle évite d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (en effet, celui-ci risque de faire apparaître des racines carrées et de nous amener à manipuler des expressions plus lourdes).

Exercice 7.13

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur $u = (1, -1, 2)$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - y + z = 0$.

Résolution

1. On note p la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur $u = (1, -1, 2)$.

Il existe λ_1, λ_2 et λ_3 réels tels que $p(e_1) = \lambda_1 \cdot u$, $p(e_2) = \lambda_2 \cdot u$ et $p(e_3) = \lambda_3 \cdot u$.

De plus, $e_1 - p(e_1) \in D^\perp$, $e_2 - p(e_2) \in D^\perp$ et $e_3 - p(e_3) \in D^\perp$.

D'où, $0 = \langle e_1 - p(e_1), u \rangle = \langle (1 - \lambda_1, \lambda_1, -2\lambda_1), (1, -1, 2) \rangle = 1 - 6\lambda_1$. Donc, $\lambda_1 = \frac{1}{6}$.

De même, $0 = \langle e_2 - p(e_2), u \rangle = \langle (-\lambda_2, 1 + \lambda_2, -2\lambda_2), (1, -1, 2) \rangle = -1 - 6\lambda_2$. Donc, $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$.

Puis, $0 = \langle e_3 - p(e_3), u \rangle = \langle (-\lambda_3, \lambda_3, 1 - 2\lambda_3), (1, -1, 2) \rangle = 2 - 6\lambda_3$. Donc, $\lambda_3 = \frac{1}{3}$.

Ainsi, $p(e_1) = \frac{1}{6} \cdot (1, -1, 2) = \frac{1}{6} \cdot (e_1 - e_2 + 2e_3)$, $p(e_2) = -\frac{1}{6} \cdot (1, -1, 2) = -\frac{1}{6} \cdot (-e_1 + e_2 - 2e_3)$ et $p(e_3) = \frac{1}{3} \cdot (1, -1, 2) = \frac{2}{6} \cdot (2, -2, 4)$.

Ainsi, la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On note H le plan d'équation $x - y + z = 0$ et p la projection orthogonale sur H .

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si, et seulement si, $(x, y, z) = x \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (0, 1, 1)$. Donc, $H = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

Une base de H est donc $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$. On l'orthonormalise par la méthode de Gram-Schmidt.

On pose $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1, 0)$.

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $e_2 = \lambda \cdot e_1 + (0, 1, 1)$ soit orthogonal à e_1 . On a $\lambda = -\langle e_1, (0, 1, 1) \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc, $e_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1, 0) + (0, 1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

On pose $e_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-1, 1, 2)$.

La famille (e_1, e_2) est une base orthonormée de H .

Donc, pour tout $x \in E$, $p(x) = \langle e_1, x \rangle \cdot e_1 + \langle e_2, x \rangle \cdot e_2$.

D'où,

$$\begin{cases} p(1, 0, 0) = \frac{1}{2} \cdot (1, 1, 0) - \frac{1}{6} \cdot (-1, 1, 2) = \frac{1}{6} \cdot (4, 2, -2) = \frac{1}{3} \cdot (2, 1, -1) \\ p(0, 1, 0) = \frac{1}{2} \cdot (1, 1, 0) + \frac{1}{6} \cdot (-1, 1, 2) = \frac{1}{6} \cdot (2, 4, 2) = \frac{1}{3} \cdot (1, 2, 1) \\ p(0, 0, 1) = 0 \cdot (1, 1, 0) + \frac{2}{6} \cdot (-1, 1, 2) = \frac{1}{3} \cdot (-2, 2, 4) = \frac{1}{3} \cdot (-1, 1, 2). \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 7.17 – Symétrie orthogonale

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

On appelle **symétrie orthogonale par rapport à F** la symétrie, notée s_F , par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

On a la relation $s_F = 2p_F - \text{Id}_E$.

Remarque 7.18

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et s une symétrie de E .

On sait que $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ et que s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

D'où, s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) \perp \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ (le sens direct est une conséquence de la définition de projecteur orthogonale et le sens réciproque est une conséquence de la proposition 7.4 page 21).

Remarque 7.19 – Réflexion

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien (donc de dimension finie).

Une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Remarque 7.20 – Projecteurs associés

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien (donc de dimension finie) et F un sous-espace vectoriel de E . On peut alors définir les projections orthogonales p_F et $p_{F^\perp}$ et on a la relation : $p_F + p_{F^\perp} = \text{Id}_E$.

IV.4. Distance à un sous-espace vectoriel

Théorème 7.15 – Caractérisation métrique du projeté orthogonal

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E et $x \in E$. On a : pour tout $y \in F$, $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$, et il y a égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.

Démonstration

Comme F est de dimension finie, on sait que $E = F \oplus F^\perp$. De plus, pour tout $x \in E$, $x = p_F(x) + x - p_F(x)$ avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. D'où, pour tout $y \in F$, $x - y = p_F(x) - y + x - p_F(x)$. Or, $p_F(x) - y \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. Par le théorème de Pythagore, on a $\|x - y\|^2 = \|p_F(x) - y\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$, avec égalité si, et seulement si, $\|p_F(x) - y\|^2 = 0$. Ce qui est équivalent à $y = p_F(x)$. $\square$

Théorème 7.16

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Le projeté orthogonal $p_F(x)$ réalise la plus courte distance au sous-espace vectoriel F :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|.$$

De plus, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise cette distance.

Le réel $d(x, F)$ est appelé **distance de x à F** .

Démonstration

Conséquence immédiate de la proposition précédente. $\square$

Corollaire 7.2 – Inégalité de Bessel

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On a : pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

Démonstration

Soit $x \in E$. On a $x = p_F(x) + x - p_F(x)$. De plus, $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. Par théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$. Par positivité de la norme et croissance de la fonction racine carrée, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$. $\square$

Exemple 7.5

- On va montrer que la fonction f définie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 - 3x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$ possède un minimum qu'elle atteint en un unique point.
- On remarque que : pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x_1, x_2) = \|(2x_1 + x_2 - 1, x_1 - 3x_2, x_2 - 1)\|^2 = \|(2x_1 + x_2, x_1 - 3x_2, x_2) - (1, 0, 1)\|^2.$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$ noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

D'où, $\inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = d((1, 0, 1), F)^2$ où $F = \{(2x_1 + x_2, x_1 - 3x_2, x_2) | (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((2, 1, 0), (1, -3, 1))$.

On travaille dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie, donc on sait que la distance de $(1, 0, 1)$ à F est réalisée par un unique vecteur y de $\mathbb{R}^3$ et ce vecteur est la projection orthogonale de $(1, 0, 1)$ sur F . Il reste alors à déterminer y

► **Méthode 1 : on détermine y en résolvant un système linéaire**

On sait que la famille (u_1, u_2) engendre F , donc y est l'unique vecteur de F vérifiant $\langle x - y | u_1 \rangle = 0$ et $\langle x - y | u_2 \rangle = 0$ où $x = (1, 0, 1)$.

On note $y = x_1^0 \cdot u_1 + x_2^0 \cdot u_2 = (2x_1^0 + x_2^0, x_1^0 - 3x_2^0, x_2^0)$. On a :

$$\begin{cases} \langle x - y | u_1 \rangle = 0 \\ \langle x - y | u_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle y | u_1 \rangle = \langle x | u_1 \rangle \\ \langle y | u_2 \rangle = \langle x | u_2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} 5x_1^0 - x_2^0 = 2 \\ -x_1^0 + 11x_2^0 = 2 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve $x_1^0 = \frac{4}{9}$ et $x_2^0 = \frac{2}{9}$. Donc,

$$y = x_1^0 \cdot u_1 + x_2^0 \cdot u_2 = \left(\frac{10}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{2}{9} \right).$$

On a donc :

$$\inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) = \left\| \left(\frac{10}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{2}{9} \right) - (1, 0, 1) \right\|^2 = \left\| \left(\frac{1}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{-7}{9} \right) \right\|^2 = \frac{2}{3}.$$

► **Méthode 2 : on détermine y en utilisant une base orthonormée de F .**

Une base de F est $\mathcal{B} = ((2, 1, 0), (1, -3, 1))$ (c'est clairement une famille génératrice et cette famille est composée de deux vecteurs non colinéaires). On note $u_1 = (2, 1, 0)$ et $u_2 = (1, -3, 1)$.

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

- On pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2, 1, 0)$.

- On cherche $u'_2 = \lambda \cdot \varepsilon_1 + u_2$ tel que u'_2 et ε_1 sont orthogonaux.

D'où, $0 = \langle u'_2 | \varepsilon_1 \rangle = \lambda + \langle u_2 | \varepsilon_1 \rangle$. On trouve $\lambda = -\langle u_2 | \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}$. D'où, $u'_2 = \frac{1}{5} \cdot (7, -14, 5)$.

On pose $\varepsilon_2 = \frac{1}{\|u'_2\|} \cdot u'_2 = \frac{1}{\sqrt{270}} \cdot (7, -14, 5)$.

On a donc :

$$\inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = \|x\|^2 - \langle x | \varepsilon_1 \rangle^2 - \langle x | \varepsilon_2 \rangle^2 = \frac{2}{3}.$$

De plus, après calculs, on retrouve que : $y = \langle \varepsilon_1 | y \rangle \cdot \varepsilon_1 + \langle \varepsilon_2 | y \rangle \cdot \varepsilon_2 = \left(\frac{10}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{2}{9} \right)$.

On cherche maintenant $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_1^0, x_2^0) = \frac{2}{3}$. On sait que $y = x_1^0 \cdot u_1 + x_2^0 \cdot u_2 = x_1^0 \cdot (2, 1, 0) + x_2^0 \cdot (1, -3, 1)$.

En utilisant l'expression de y trouvée, il vient : $x_2^0 = \frac{2}{9}$ puis $x_1^0 = \frac{4}{9}$.

Ainsi,

$$\inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = \frac{2}{3} = f\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right).$$



Exercice 7.14

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$. On munit E du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) \times Q(t) dt.$$

1. Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur F de deux manières différentes :

(a) Méthode 1 : en utilisant une base orthonormée de F ;

(b) Méthode 2 : en résolvant un système linéaire.

2. En déduire $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - a \times t^2 - b \times t - c)^2 dt$.

Résolution

1. (a) ► Une base de F est $(1, X, X^2)$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On a : $\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} = 1$. On pose $Q_1(X) = 1$.

On pose $P_2(X) = X - \langle X, Q_1 \rangle \cdot Q_1 = \dots = P_2(X) = X - \frac{1}{2}$.

On a : $\|P_2(X)\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{12}}$.

On pose $Q_2(X) = \frac{1}{\|P_2(X)\|} \cdot P_2(X) = \sqrt{12} \cdot \left(X - \frac{1}{2}\right)$.

On pose $P_3(X) = X^2 - \langle X^2, Q_1 \rangle \cdot Q_1 - \langle X^2, Q_2 \rangle \cdot Q_2 = \dots = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

On a : $\|P_3(X)\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$.

On pose $Q_3(X) = \frac{1}{\|P_3(X)\|} \cdot P_3(X) = 6\sqrt{5} \cdot \left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$.

Ainsi, $(Q_1(X), Q_2(X), Q_3(X))$ est une base orthonormée de F .

► Comme F est de dimension finie et $(Q_1(X), Q_2(X), Q_3(X))$ est une base orthonormée de F , on sait que le projeté orthogonale de X^3 sur F est :

$$T(X) = \langle X^3, Q_1(X) \rangle \cdot Q_1(X) + \langle X^3, Q_2(X) \rangle \cdot Q_2(X) + \langle X^3, Q_3(X) \rangle \cdot Q_3(X).$$

Après calculs, on a :

$$T(X) = \frac{1}{20} (30X^2 - 12X + 1).$$

(b) Comme F est de dimension finie, on sait que son projeté orthogonal sur F existe. On le note $S(X)$.

On sait que $S(X) \in F$, donc, $S(X) = \lambda \cdot X^2 + \mu \cdot X + \gamma$.

De plus, on sait que $X^3 - S(X) \in F^\perp$. Comme $(1, X, X^2)$ est une base de F , on a :

$$X^3 - S(X) \in F^\perp \iff \begin{cases} \langle X^3 - S(X), 1 \rangle = 0 \\ \langle X^3 - S(X), X \rangle = 0 \\ \langle X^3 - S(X), X^2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle S(X), 1 \rangle = \langle X^3, 1 \rangle \\ \langle S(X), X \rangle = \langle X^3, X \rangle \\ \langle S(X), X^2 \rangle = \langle X^3, X^2 \rangle \end{cases}$$

Après calculs des produits scalaires,

$$X^3 - S(X) \in F^\perp \iff \begin{cases} \frac{1}{3} \times \lambda + \frac{1}{2} \times \gamma + \mu = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \times \lambda + \frac{1}{3} \times \gamma + \frac{1}{2} \times \mu = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \lambda + \frac{1}{4} \times \gamma + \frac{1}{3} \times \mu = \frac{1}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} \\ \mu = -\frac{3}{5} \\ \gamma = \frac{1}{20} \end{cases}$$

Donc,

$$S(X) = \frac{1}{20} (30X^2 - 12X + 1).$$

Remarque : ouf ! On a bien retrouvé l'expression de la question précédente.

2. On a :

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - a \times t^2 - b \times t - c)^2 dt = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \|X^3 - (aX^2 + bX + c)\|^2 = d(X^3, F)^2.$$

De plus, on sait que :

$$d(X^3, F)^2 = \|X^3 - T(X)\|^2 = \frac{1}{2800}$$

V. Formes linéaires sur un espace euclidien

Remarque 7.21

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Pour tout $a \in E$, l'application $x \mapsto \langle a, x \rangle$ est une forme linéaire.

Théorème 7.17

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et φ une forme linéaire sur E .

Alors, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que : pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$.

Démonstration

Par bilinéarité du produit scalaire, pour tout $a \in E$, l'application $x \mapsto \langle a, x \rangle$ est une forme linéaire sur E .

On considère $\psi : E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$$a \mapsto \psi_a : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \langle a, x \rangle \end{cases}$$

► Montrons que ψ est linéaire. Soit $(a, b) \in E \times E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in E, \quad \psi_{\lambda a + b}(x) = \langle \lambda a + b, x \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle = \lambda \psi_a(x) + \psi_b(x).$$

Donc, $\psi(\lambda a + b) = \lambda \psi(a) + \psi(b)$.

Donc, ψ est linéaire.

► Montrons que ψ est injective.

Soit $a \in E$ tel que $\psi(a) = 0$.

On a, pour tout $x \in E$, $\langle a, x \rangle = 0$.

Donc, $a \in E^\perp = \{0_E\}$.

D'où, $a = 0_E$.

Donc, ψ est injective.

► On sait que E est de dimension finie (car espace euclidien) et que E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ sont de même dimension finie. Donc, par théorème, l'application linéaire ψ est un isomorphisme.

Ainsi, par bijectivité, pour toute forme linéaire φ sur E , il existe un unique $a \in E$ tel que $\varphi = \psi_a$.

Autrement si, pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \psi_a(x) = \langle a, x \rangle$. □

Remarque 7.22

En vertu du théorème précédent et de la remarque précédente, on a montré que : les formes linéaires d'un espace euclidien sont exactement les applications de la forme $x \mapsto \langle a, x \rangle$ où $a \in E$.

Exemple 7.6

► Considérons la forme linéaire : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto 3x - y + 2z$

On a, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = \langle (3, -1, 2), (x, y, z) \rangle$.

► En munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ du produit scalaire usuel, on peut affirmer que les formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont exactement les applications de la forme $M \mapsto \text{tr}(A \times M)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 7.11 – Vecteur normal à un hyperplan

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un hyperplan de E . Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. On sait qu'il existe $a \in E$ (non nul et unique) tel que $\varphi : x \mapsto \langle a, x \rangle$. On a donc : pour tout $x \in E$

$$x \in H \iff \langle a, x \rangle = 0.$$

Le vecteur a appartient à $H^\perp$ et est appelé **vecteur normal de H** .

Remarque 7.23 – Équation d'un hyperplan dans une base orthonormée

Avec les notations de la définition précédente, on note $a = a_1.e_1 + \dots + a_n.e_n$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E , on a : pour tout $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n \in E$, $\langle a, x \rangle = a_1 \times x_1 + \dots + a_n \times x_n$. Ainsi, une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$a_1 \times x_1 + \dots + a_n \times x_n = 0.$$

Remarque 7.24

Avec les notations de la définition précédente, on sait que $H^\perp$ est de dimension 1. Deux vecteurs normaux de H appartiennent à $H^\perp$ et sont donc colinéaires.

Théorème 7.18 – Distance à un hyperplan, à une droite

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

► Soit H un hyperplan vectoriel de E et a un vecteur normal de H . La distance de x à H est :

$$d(x, H) = \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|a\|}.$$

► Soit D une droite vectorielle de E et a un vecteur non nul de D . La distance de x à D est :

$$d(x, D) = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{\langle a, x \rangle^2}{\|a\|^2}}.$$

Démonstration

► Par le théorème 7.16 page 26, on sait que $d(x, H) = \|x - p_H(x)\|$ (H est de dimension finie car sous-espace vectoriel de E euclidien).

De plus, on sait que $x - p_H(x) \in H^\perp$ et $H^\perp = \text{Vect}(a)$.

Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ (unique) tel que $x - p_H(x) = \lambda.a$.

De plus, on a $\langle a, p_H(x) \rangle = 0$. Donc, $\langle a, x \rangle = \lambda.\|a\|^2$. D'où, $\lambda = \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2}$ (on peut diviser par la norme de a car a est non nul).

$$\text{Donc, } d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = \left\| \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} . a \right\| = \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|a\|}.$$

► Par le théorème 7.16 page 26, on sait que $d(x, D) = \|x - p_D(x)\|$ (D est de dimension finie).

Or, on sait que E est de dimension finie et D est une droite vectorielle de E , donc $D^\perp$ est un hyperplan de E .

De plus, pour tout $x \in E$, $x = p_D(x) + p_{D^\perp}(x)$.

Donc, par le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|p_D(x)\|^2 + \|p_{D^\perp}(x)\|^2 = \|x - p_D(x)\|^2 + \|x - p_D(x)\|^2 = d(x, D^\perp)^2 + d(x, D)^2$.

Or, a est un vecteur normal de $D^\perp$ (car vecteur directeur de D). Donc, $d(x, D^\perp) = \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|a\|}$.

$$\text{Donc, } d(x, D) = \|x - p_D(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{\langle a, x \rangle^2}{\|a\|^2}}.$$

□