

Objectifs du chapitre

- Maîtriser les repères **cartésien**, **cylindrique** et **sphérique** et les changements de coordonnées.
- Représenter et manipuler **droites** et **plans** dans l'espace par leurs équations.
- Calculer des distances : point-plan, point-droite, droite-droite gauche.
- Définir et étudier des **courbes paramétriques** (tangente, longueur d'arc).
- Définir et décrire des **surfaces paramétriques** (vecteur normal, exemples classiques).
- Exprimer les **transformations géométriques** à l'aide de matrices homogènes 4×4 .
- Comprendre la composition de transformations et son application aux **chaînes cinématiques**.
- Utiliser les **courbes de Bézier** et **splines** dans un contexte de CAO/DAO.

Situation professionnelle — Conception industrielle et robotique

Un bureau d'études en mécanique utilise un logiciel de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) pour modéliser un bras robotique à 3 axes destiné à l'usinage de pièces complexes. Le technicien doit :

- Définir la **trajectoire de l'outil** en espace 3D par une courbe paramétrique.
- Calculer l'**intersection entre l'outil et la pièce** (droite-plan).
- Exprimer la **position de l'effecteur** (outil en bout de bras) par composition de rotations et translations le long de la chaîne cinématique.
- Modéliser des surfaces (carter, carter cylindrique, surface gauche) pour les simuler et les usiner.

Ces problèmes mobilisent la **modélisation géométrique** : représentation analytique de l'espace, des courbes et des surfaces, et calcul matriciel des transformations.

1. Repères et systèmes de coordonnées

1.1 Repère cartésien

Définition — Repère cartésien

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathbb{R}^3 , tout point M est repéré par ses **coordonnées cartésiennes** (x, y, z) telles que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

La **distance euclidienne** entre deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

1.2 Coordonnées cylindriques

Définition — Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'un point M sont définies par :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec } r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad z \in \mathbb{R}$$

Conversion inverse : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{atan2}(y, x)$, $z = z$.

Ce repère est adapté aux pièces à **symétrie de révolution** (arbres, cylindres, carters).

1.3 Coordonnées sphériques

Définition — Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) d'un point M sont :

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \text{avec } \rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad \varphi \in [0, \pi]$$

Conversion inverse : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi = \arccos(z/\rho)$, $\theta = \text{atan2}(y, x)$.

Adapté aux rotations d'un bras robotique ou à la modélisation de sphères.

Exemple 1 — Conversion de coordonnées

Le point $M(3, 3, 4)$ (cartésien). Calculer ses coordonnées cylindriques et sphériques.

Cylindriques :

$$r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,243 \quad \theta = \arctan(3/3) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad z = 4$$

Sphériques :

$$\rho = \sqrt{9 + 9 + 16} = \sqrt{34} \approx 5,831 \quad \varphi = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{34}}\right) \approx \arccos(0,686) \approx 46,7^\circ \quad \theta = 45^\circ$$

MINI-EXERCICE :

Un point d'un carter cylindrique a pour coordonnées cylindriques $r = 4, \theta = 60^\circ, z = 7$. Calculer ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

2. Droites et plans dans l'espace

2.1 Équation paramétrique d'une droite

Définition — Droite paramétrique

Une droite Δ passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de **vecteur directeur** $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$ a pour représentation paramétrique :

$$M \in \Delta \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{soit } \begin{cases} x = x_A + t d_x \\ y = y_A + t d_y \\ z = z_A + t d_z \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Exemple 2 — Droite dans l'espace

La trajectoire d'un outil d'usinage passe par $A(1, 2, 0)$ dans la direction $\vec{d} = (2, -1, 3)$. Son équation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$$

Pour $t = 1$: $M = (3, 1, 3)$. Pour $t = -0,5$: $M = (0, 2,5, -1,5)$.

2.2 Équation d'un plan

Définition — Plan dans l'espace

Un plan Π est entièrement défini par :

- Son **vecteur normal** $\vec{n} = (a, b, c)$ (perpendiculaire au plan)
- Un **point** A appartenant au plan

L'équation du plan s'écrit sous deux formes équivalentes :

$$\text{Forme normale : } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad \text{soit} \quad a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\text{Forme générale : } ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Exemple 3 — Équation d'un plan de contact

Une surface d'appui passe par $A(1, 0, 2)$ et son vecteur normal est $\vec{n} = (1, 2, -1)$. Donner l'équation du plan.

$$1(x - 1) + 2(y - 0) + (-1)(z - 2) = 0 \implies x - 1 + 2y - z + 2 = 0 \implies x + 2y - z + 1 = 0$$

Vérification : $A(1, 0, 2) : 1 + 0 - 2 + 1 = 0 \checkmark$

2.3 Distances

Distance d'un point à un plan

La distance du point $P(x_P, y_P, z_P)$ au plan $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distance d'un point à une droite

Distance du point P à la droite Δ passant par A de vecteur directeur \vec{d} :

$$d(P, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

où \times désigne le **produit vectoriel**.

Produit vectoriel

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

Propriétés : $\vec{u} \times \vec{v}$ est perpendiculaire à \vec{u} et à \vec{v} ; $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$.

Exemple 4 — Distance outil-surface

Le plan de la pièce est $\Pi : 2x + y - 2z + 3 = 0$. La tête de l'outil est en $P(4, 1, 5)$. Calculer la distance de P à Π .

$$d(P, \Pi) = \frac{|2 \times 4 + 1 \times 1 + (-2) \times 5 + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|8 + 1 - 10 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{|2|}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,667 \text{ unités}$$

MINI-EXERCICE :

Le plan d'appui d'une pièce a pour équation $\Pi : 3x - 4y + z - 5 = 0$. La pointe d'un palpeur est au point $P(2, 1, 6)$. Calculer la distance de P au plan Π .

2.4 Positions relatives de droites et plans

Positions relatives

Configuration	Condition
Droite \parallel plan	$\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ et $A \notin \Pi$
Droite \subset plan	$\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ et $A \in \Pi$
Droite sécante au plan	$\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$
Plans parallèles	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ (proportionnels) et $\Pi_1 \neq \Pi_2$
Plans sécants (droite d'intersection)	\vec{n}_1 et \vec{n}_2 non colinéaires
Droites gauches (non coplanaires)	$\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) \neq 0$

3. Courbes paramétriques dans l'espace

Définition — Courbe paramétrique 3D

Une **courbe paramétrique** est l'ensemble des points $M(t)$ définis par trois fonctions :

$$\mathcal{C} : M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b]$$

Le paramètre t représente souvent le temps (cinématique) ou un paramètre de forme (géométrie).

Vecteur vitesse et vecteur tangent

Le **vecteur vitesse** (ou vecteur tangent) en $M(t)$ est la dérivée de $M(t)$:

$$\vec{v}(t) = M'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

$\|\vec{v}(t)\|$ est la **vitesse instantanée** ; $\vec{v}(t)/\|\vec{v}(t)\|$ est le **vecteur tangent unitaire** orientant la courbe.

Longueur d'arc

La longueur de la courbe entre $t = a$ et $t = b$ est :

$$\ell = \int_a^b \|M'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Vecteur accélération

$$\vec{\gamma}(t) = M''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}$$

En cinématique robotique, l'accélération intervient dans le calcul des couples moteurs nécessaires.

3.1 Courbes classiques

Exemple 5 — Cercle dans l'espace

Cercle de rayon R dans le plan xOy , centré à l'origine :

$$M(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Vecteur vitesse : $\vec{v}(t) = (-R \sin t, R \cos t, 0)$; norme constante $\|\vec{v}\| = R$.

Longueur : $\ell = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$ — on retrouve la formule classique.

Exemple 6 — Hélice cylindrique (filetage, ressort, hélice de fraise)

L'hélice de rayon R et de pas h (montée par tour) est la courbe parcourue par un point se déplaçant à vitesse angulaire constante sur un cylindre :

$$M(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n]$$

$$\vec{v}(t) = \left(-R \sin t, R \cos t, \frac{h}{2\pi} \right); \quad \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} \text{ (constante)}$$

Longueur d'un tour ($t : 0 \rightarrow 2\pi$) :

$$\ell_{\text{tour}} = 2\pi \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2}$$

Application : Une fraise hélicoïdale de rayon $R = 5$ mm et de pas $h = 8$ mm. Longueur de l'arête de coupe par tour :

$$\ell = 2\pi \sqrt{25 + \left(\frac{8}{2\pi} \right)^2} = 2\pi \sqrt{25 + 1,621} \approx 2\pi \times 5,162 \approx 32,43 \text{ mm}$$

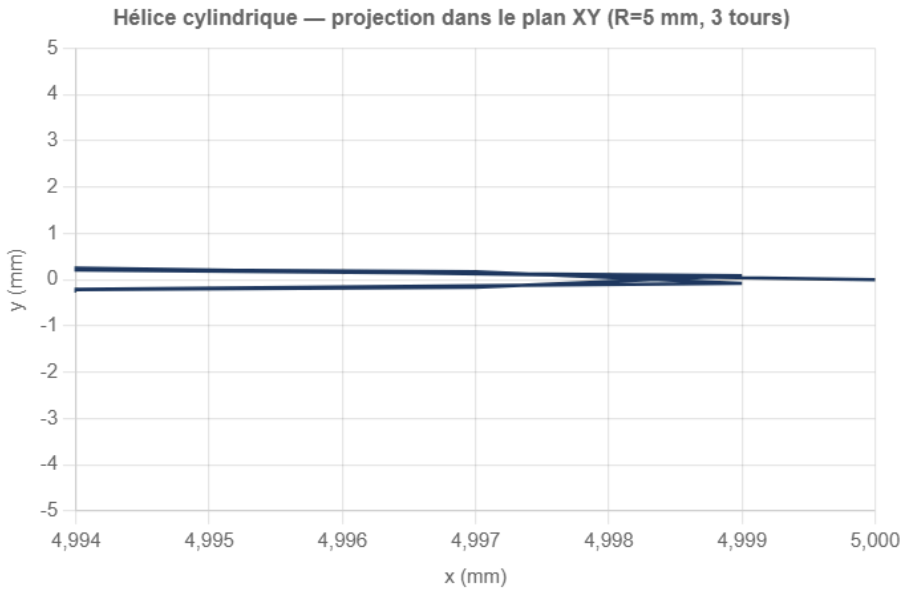


Fig. 1 — Projection XY d'une hélice cylindrique ($R = 5 \text{ mm}$, $h = 8 \text{ mm}$, 3 tours)

3.2 Courbes de Bézier

Définition — Courbe de Bézier d'ordre n

Une **courbe de Bézier** d'ordre n est définie par $n + 1$ points de contrôle P_0, P_1, \dots, P_n et s'écrit :

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i, \quad t \in [0, 1]$$

Les fonctions $b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ sont les **polynômes de Bernstein**.

Cas particulier — Courbe de Bézier cubique (ordre 3)

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0, 1]$$

Propriétés :

- $B(0) = P_0$ et $B(1) = P_3$: la courbe passe par les points extrêmes.
- $B'(0) = 3(P_1 - P_0)$: tangente en début proportionnelle à $\overrightarrow{P_0 P_1}$.
- $B'(1) = 3(P_3 - P_2)$: tangente en fin proportionnelle à $\overrightarrow{P_2 P_3}$.
- La courbe est contenue dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle.

Exemple 7 — Bézier cubique en CAO

Profil de pièce défini par $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 2)$, $P_3 = (4, 0)$ (coordonnées en cm). Calculer le point de la courbe pour $t = 0,5$.

$$\begin{aligned} B(0,5) &= (0,5)^3 P_0 + 3(0,5)(0,5)^2 P_1 + 3(0,5)^2(0,5) P_2 + (0,5)^3 P_3 \\ &= \frac{1}{8}(0,0) + \frac{3}{8}(1,2) + \frac{3}{8}(3,2) + \frac{1}{8}(4,0) = (0,0) + (0,375, 0,75) + (1,125, 0,75) + (0,5, 0) = (2,000, 1,500) \text{ cm} \end{aligned}$$

Le point médian de la courbe est $B(0,5) = (2; 1,5)$ cm.

MINI-EXERCICE :

Une courbe de Bézier cubique a pour points de contrôle $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (2, 6)$, $P_2 = (6, 6)$, $P_3 = (8, 0)$ (mm). Donner les points de départ $B(0)$ et d'arrivée $B(1)$, puis calculer le point $B(0,5)$.

4. Surfaces paramétriques

Définition — Surface paramétrique

Une **surface paramétrique** est l'ensemble des points $M(u, v)$ définis par deux paramètres u et v :

$$\mathcal{S} : M(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Vecteurs tangents et vecteur normal

Les vecteurs tangents partiels en $M(u, v)$:

$$\vec{T}_u = \frac{\partial M}{\partial u} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial u \\ \partial y / \partial u \\ \partial z / \partial u \end{pmatrix} \quad \vec{T}_v = \frac{\partial M}{\partial v} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial v \\ \partial z / \partial v \end{pmatrix}$$

Le **vecteur normal** à la surface en $M(u, v)$:

$$\vec{n}(u, v) = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$$

La surface est dite régulière en M si $\vec{n}(u, v) \neq \vec{0}$, c'est-à-dire si \vec{T}_u et \vec{T}_v ne sont pas colinéaires.

4.1 Sphère

Exemple 8 — Sphère de rayon R

$$M(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \sin \varphi \cos \theta \\ R \sin \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$$

Vecteurs tangents :

$$\vec{T}_\theta = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \sin \theta \\ R \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \theta \\ R \cos \varphi \sin \theta \\ -R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Vecteur normal :

$$\vec{n} = \vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi = -R^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Le vecteur normal est colinéaire à \overrightarrow{OM} : il pointe vers l'extérieur de la sphère, ce qui est cohérent.

4.2 Cylindre

Exemple 9 — Cylindre de rayon R , axe Oz

$$M(\theta, z) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ z \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, L]$$

$$\vec{T}_\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) \quad \vec{T}_z = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n} = \vec{T}_\theta \times \vec{T}_z = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$$

Normal radial, perpendiculaire à l'axe : cohérent avec la géométrie cylindrique.

4.3 Tore

Exemple 10 — Tore (grand rayon R , petit rayon r)

$$M(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + r \cos \varphi) \cos \theta \\ (R + r \cos \varphi) \sin \theta \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Le tore est la surface engendrée par la rotation d'un cercle de rayon r autour d'un axe situé à la distance R de son centre. Il est utilisé en robotique (joints toriques, tuyauteries, conduits de fluide).

4.4 Surface de révolution

Surface de révolution autour de l'axe Oz

Si le profil est donné par $r = f(z)$ (rayon en fonction de la hauteur), la surface de révolution est :

$$M(\theta, z) = \begin{pmatrix} f(z) \cos \theta \\ f(z) \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

Exemples : cône ($f(z) = az$), parabololoïde ($f(z) = \sqrt{az}$), hyperboloïde.

5. Transformations géométriques et matrices homogènes

Définition — Coordonnées homogènes

En robotique et en infographie, on représente un point $M(x, y, z)$ par ses **coordonnées homogènes** $\tilde{M} = (x, y, z, 1)^T \in \mathbb{R}^4$. Cette convention permet d'exprimer toutes les transformations affines (translation, rotation, symétrie) par une seule multiplication matricielle 4×4 .

5.1 Translation

Matrice de translation

Translation de vecteur $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$:

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \tilde{M} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Rotations

Matrices de rotation élémentaires

Rotation d'angle θ autour de l'axe Oz :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ autour de l'axe Ox :

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ autour de l'axe Oy :

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3 Symétrie par rapport à un plan

Symétrie par rapport au plan xOy ($z = 0$)

$$S_{xOy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4 Composition de transformations

Composition matricielle

Pour appliquer successivement T_1 puis T_2 à un point, on calcule la matrice composée :

$$T_{\text{composée}} = T_2 \cdot T_1$$

Attention : la multiplication matricielle n'est pas commutative. "Rotation puis translation" \neq "translation puis rotation".

Exemple 11 — Transformation composée

On effectue d'abord une rotation de 90° autour de Oz , puis une translation de $(2, 0, 0)$. Quel est l'image du point $M(1, 0, 0)$?

Étape 1 : rotation $R_z(90^\circ)$:

$$R_z(90^\circ) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : translation $T(2, 0, 0)$:

$$T(2, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'image de $M(1, 0, 0)$ est $M'(2, 1, 0)$.

MINI-EXERCICE :

On applique au point $M(2, 0, 1)$ une rotation de 90° autour de l'axe Oz . En utilisant la matrice $R_z(90^\circ)$ (avec $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$), déterminer l'image M' .

6. Application robotique — Chaîne cinématique

Définition — Chaîne cinématique

Un robot articulé est modélisé comme une **chaîne cinématique** : une suite de segments (liaisons) reliés par des articulations (joints). Chaque joint apporte une transformation géométrique (rotation ou translation) exprimée dans le repère du segment précédent.



Cinématique directe — Matrice de transformation globale

Pour un robot à n articulations, la position de l'effecteur dans le repère de base est :

$${}^0T_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot \dots \cdot {}^{n-1}T_n$$

où ${}^{i-1}T_i$ est la matrice homogène 4×4 exprimant la transformation du repère i dans le repère $i - 1$ (en fonction de l'angle articulaire θ_i pour un joint rotoïde).

Exemple 12 — Robot plan à 2 axes

Robot plan avec deux bras de longueurs $l_1 = 300$ mm et $l_2 = 200$ mm. Les angles articulaires sont $\theta_1 = 30^\circ$ et $\theta_2 = 45^\circ$.

Transformation 1 (rotation θ_1 + translation le long de l'axe 1) :

$${}^0T_1 = R_z(\theta_1) \cdot T(l_1, 0, 0) = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $c_1 = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ et $s_1 = \sin 30^\circ = 0,5$.

Position du coude (bout du premier bras) :

$$P_1 = (l_1 c_1, l_1 s_1) = (300 \times 0,866, 300 \times 0,5) = (259,8, 150,0) \text{ mm}$$

Position de l'effecteur (après transformation 2, angle $\theta_1 + \theta_2 = 75^\circ$) :

$$\begin{aligned} P_E &= P_1 + l_2 \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = (259,8, 150,0) + 200 \begin{pmatrix} \cos 75^\circ \\ \sin 75^\circ \end{pmatrix} \\ &= (259,8 + 200 \times 0,259, 150,0 + 200 \times 0,966) = (259,8 + 51,8, 150,0 + 193,2) = (311,6, 343,2) \text{ mm} \end{aligned}$$

L'effecteur est en position (311,6 ; 343,2) mm dans le repère de base.

7. Splines cubiques et CAO/DAO

Définition — Spline cubique

Une **spline cubique** est une courbe lisse définie par morceaux, où chaque morceau est un polynôme cubique. Les raccords entre morceaux assurent la continuité de la courbe *et* de ses deux premières dérivées (C^2 de classe).

Sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, le morceau est :

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

Avantages des splines en CAO

- **Contrôle local** : déplacer un point de contrôle n'affecte que la zone voisine.
- **Lissage** : la continuité C^2 garantit une courbure continue — important pour les surfaces d'aspect (carrosserie, meubles design).
- **Efficacité numérique** : les splines sont résolues par des systèmes tridiagonaux à résolution rapide.
- **Formats standards** : IGES, STEP, NURBS (splines rationnelles non-uniformes) sont les formats universels de CAO.

Exemple 13 — Profil d'un rail d'agencement

Un ébéniste-agenceur doit usiner un rail de guidage dont le profil passe par les points : $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (10, 8)$, $P_2 = (20, 5)$, $P_3 = (30, 0)$ (mm). Il utilise une spline cubique naturelle (dérivée seconde nulle aux extrémités) pour générer la trajectoire d'outil en défonceuse CNC.

Le logiciel CAO construit la spline en résolvant le système tridiagonal des conditions de raccord C^2 . La trajectoire obtenue est parfaitement lisse, sans angle vif, ce qui évite les à-coups sur la machine.

Méthode — Calcul de l'intersection droite-plan

Étant donné la droite $\Delta : M(t) = A + t\vec{d}$ et le plan $\Pi : ax + by + cz + d = 0$, calculer le point d'intersection.

- 1 Substituer les paramétrisations de Δ dans l'équation du plan :

$$a(x_A + td_x) + b(y_A + td_y) + c(z_A + td_z) + d = 0.$$

- 2 Regrouper les termes en t : $t(ad_x + bd_y + cd_z) = -(ax_A + by_A + cz_A + d)$.

- 3 Si $ad_x + bd_y + cd_z = \vec{n} \cdot \vec{d} = 0$: la droite est parallèle au plan (pas d'intersection ou droite contenue dans le plan).

- 4 Sinon : $t^* = \frac{-(ax_A + by_A + cz_A + d)}{ad_x + bd_y + cd_z} = \frac{-(\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} + d)}{\vec{n} \cdot \vec{d}}$.

- 5 Calculer le point d'intersection : $I = A + t^*\vec{d}$.

Exemple 14 — Perçage d'une plaque inclinée

Un foret descend le long de la droite $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 5 - 2t \end{cases}$ (vecteur directeur $\vec{d} = (1, 0, -2)$). La surface de la plaque est le plan $\Pi : x + z = 4$ (soit $x + 0y + z - 4 = 0$). Trouver le point de percée.

Substitution dans Π :

$$(2 + t) + (5 - 2t) - 4 = 0 \implies 7 + t - 2t - 4 = 0 \implies 3 - t = 0 \implies t^* = 3$$

Point d'intersection :

$$I = (2 + 3, 1, 5 - 6) = (5, 1, -1)$$

Le foret percera la plaque au point $I(5, 1, -1)$.

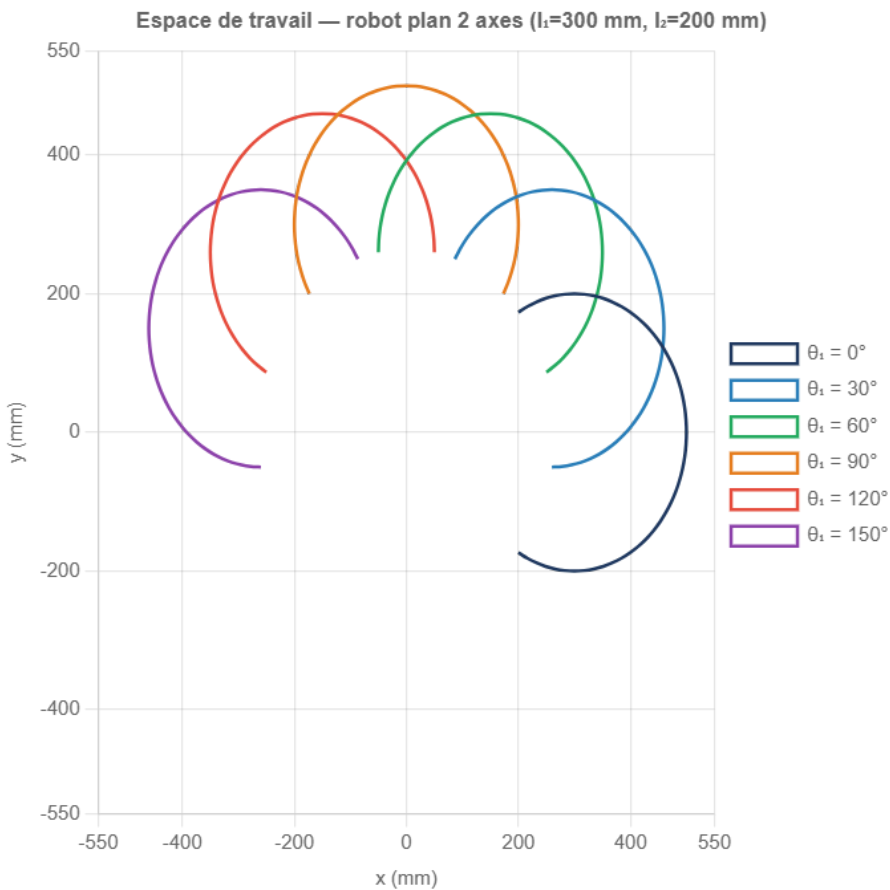


Fig. 2 — Espace de travail d'un robot plan à 2 axes ($l_1 = 300$ mm, $l_2 = 200$ mm) selon θ_1

À retenir — Formules essentielles

Droite paramétrique

$$M = A + t\vec{d}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Plan

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$$

Distance point-plan

$$d = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distance point-droite

$$d = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

Longueur d'arc

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

Normale surface

$$\vec{n} = \frac{\partial M}{\partial u} \times \frac{\partial M}{\partial v}$$

Bézier cubique

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 \\ + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

Intersection droite-plan

$$t^* = \frac{-(\vec{n} \cdot \vec{OA} + d)}{\vec{n} \cdot \vec{d}}$$

Coordonnées cylindriques : (r, θ, z) avec $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

Coordonnées sphériques : (ρ, θ, φ) avec $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \varphi$

Matrices homogènes 4x4 : translation $T(t_x, t_y, t_z)$, rotations R_x, R_y, R_z — composition = $T_2 \cdot T_1$.

Modélisation géométrique

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

On prendra $\cos 60^\circ = 0,5$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$.

Exercice 1 — Conversion de coordonnées (4 pts)

Un point d'un carter cylindrique a pour coordonnées cylindriques $r = 6$, $\theta = 60^\circ$, $z = 5$.

- Rappeler les formules de passage cylindriques \rightarrow cartésiennes. (1 pt)
- Calculer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point. (3 pts)

Exercice 2 — Équation d'un plan (4 pts)

Une surface d'appui passe par le point $A(2, 1, 3)$ et admet pour vecteur normal $\vec{n} = (1, -2, 2)$.

- Écrire l'équation du plan sous la forme $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$. (1,5 pt)
- En déduire l'équation générale $ax + by + cz + d = 0$. (1,5 pt)
- Vérifier que le point A appartient bien au plan. (1 pt)

Exercice 3 — Distance d'un point à un plan (4 pts)

Le plan d'une pièce a pour équation $\Pi : 2x + y - 2z + 6 = 0$. La pointe d'un palpeur est au point $P(3, 4, 1)$.

- Rappeler la formule de la distance d'un point à un plan. (1 pt)
- Calculer la distance de P au plan Π . (3 pts)

Exercice 4 — Courbe de Bézier cubique (4 pts)

Une courbe de Bézier cubique a pour points de contrôle $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (2, 4)$, $P_2 = (6, 4)$, $P_3 = (8, 0)$ (en mm).

- Donner sans calcul les points de départ $B(0)$ et d'arrivée $B(1)$. (1 pt)
- Calculer le point $B(0,5)$ (coefficients $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$). (3 pts)

Exercice 5 — Intersection droite-plan et rotation (4 pts)

Partie A. Un foret descend le long de la droite $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 6 - 2t \end{cases}$. La surface de la plaque est le plan $\Pi : x + z = 5$.

- Déterminer la valeur de t^* au point de percée. (1,5 pt)
- En déduire le point d'intersection I . (1 pt)

Partie B. On applique au point $M(3, 0, 2)$ une rotation de 90° autour de l'axe Oz .

- En utilisant la matrice $R_z(90^\circ)$, déterminer l'image M' . (1,5 pt)
-