

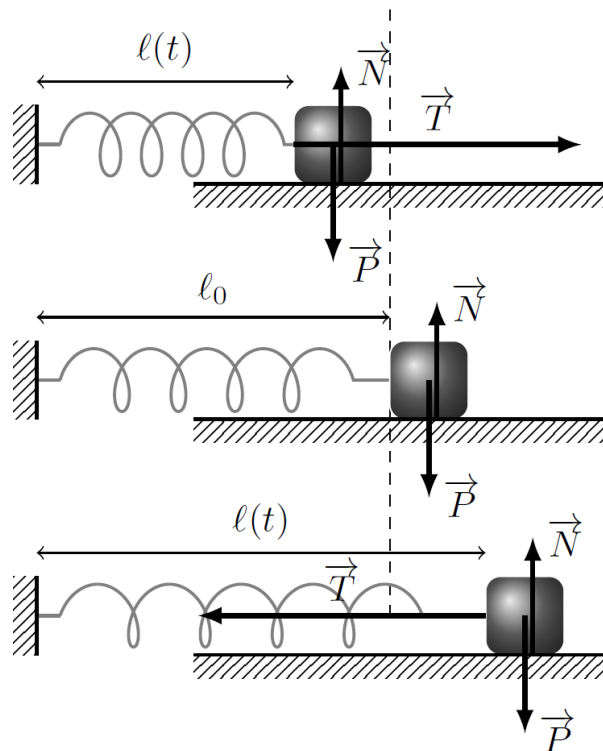
TD S4.1 - Oscillateur harmonique

Table des matières

1 Oscillateur mécanique horizontal non amorti	1
2 Pendule simple	3
3 Circuit LC	3

1 Oscillateur mécanique horizontal non amorti

Considérons un oscillateur harmonique horizontal ¹, constitué d'un mobile de masse $m = 1 \text{ kg}$ attaché à un ressort de constante de raideur $k = 1 \text{ N.m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0 , qui oscille sans frottements le long d'un axe horizontal sur une table à coussin d'air :



L'origine de l'axe horizontal (Ox) est pris à la position d'équilibre du point de fixation du ressort à la masse mobile et on note $\ell(t)$ la longueur instantanée du ressort.

1.1 Exprimer $\ell(t)$ en fonction de $x(t)$ et ℓ_0 puis en déduire l'expression de la force de rappel élastique $\vec{T}$.

1.2 Trouver l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ et la mettre sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

en donnant la signification physique, l'expression puis la valeur numérique de ω_0 .

1.3 Exprimer puis calculer la période propre T_0 de cet oscillateur.

1. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

◇ On écarte le mobile de sa position d'équilibre puis on le lâche sans vitesse initiale à l'abscisse $a = 5 \text{ cm}$.

1.4 Trouver l'expression de $x(t)$ puis tracer sa courbe.

1.5 Quelle est la valeur minimale $x_{\min}$ de $x(t)$ et à quels instants est-elle atteinte ?

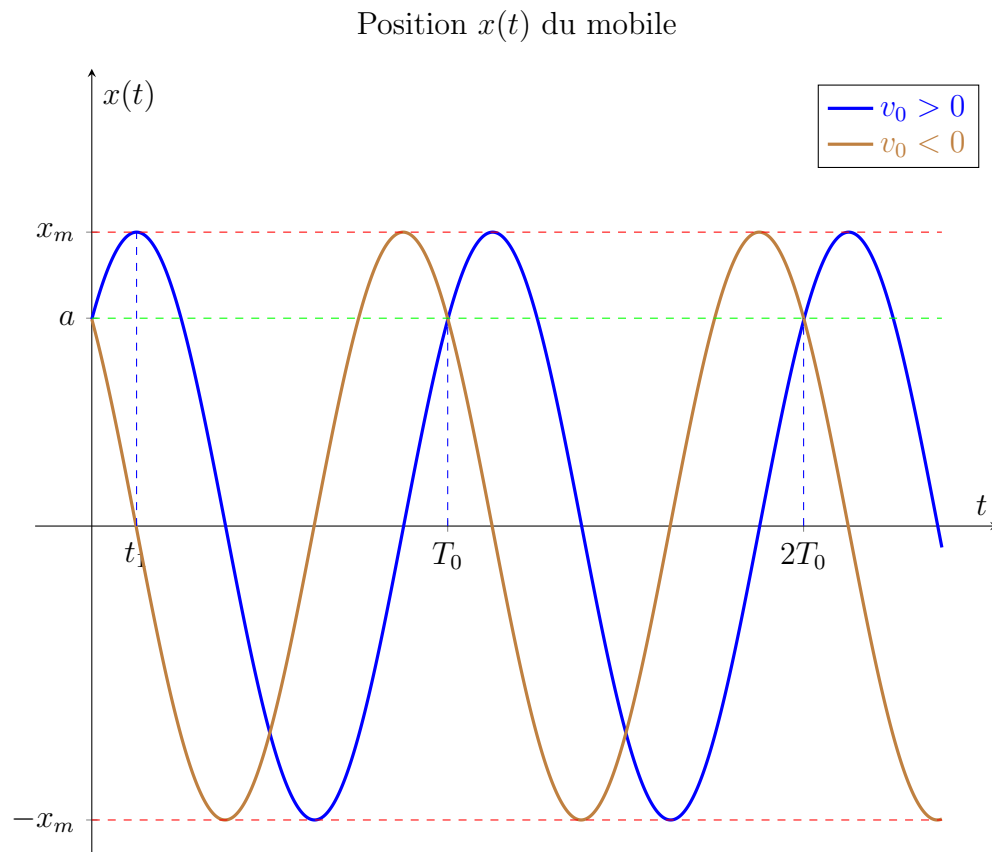
1.6 Exprimer puis calculer l'énergie mécanique E_m de cet oscillateur.

◇ Désormais on écarte le mobile de sa position d'équilibre puis on le lâche avec une vitesse initiale algébrique v_0 à l'abscisse $a = 5 \text{ cm}$. On cherche une solution de la forme : $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

1.7 Montrer que
$$\begin{cases} x_m = \sqrt{a^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \cos \varphi = \frac{a}{x_m} \text{ et } \sin \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_m} \end{cases}$$

1.8 En déduire l'expression analytique de $x(t)$ pour $v_0 = 5 \text{ cm.s}^{-1}$ et pour $v_0 = -5 \text{ cm.s}^{-1}$.

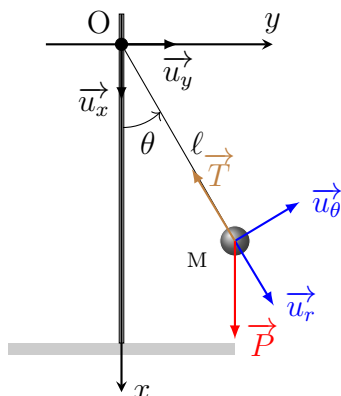
1.9 Tracer les deux cas correspondants à l'aide de votre calculatrice préférée pour obtenir :



1.10 Dans le cas où $v_0 > 0$, déterminer le premier instant t_1 pour lequel $x(t)$ atteint sa valeur maximale.

1.11 Dans le cas où $v_0 < 0$, déterminer le premier instant t'_1 pour lequel $x(t)$ atteint sa valeur maximale.

2 Pendule simple



On considère un pendule simple de longueur $\ell = 80 \text{ cm}$ auquel on a accroché un mobile M de masse $m = 100 \text{ g}$. Le module de la vitesse du mobile est $v(t) = \ell \dot{\theta}(t)$ et son énergie potentielle de pesanteur vaut $E_{pp}(t) = -mgx(t)$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. On lâche M sans vitesse initiale avec un angle $\theta_0 = 10^\circ$. En l'absence de frottements, l'énergie mécanique du mobile se conserve.

2.1 Exprimer l'énergie mécanique E_m du mobile en fonction de $\theta(t)$ et des paramètres du système.

2.2 En déduire que l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ est de la forme :

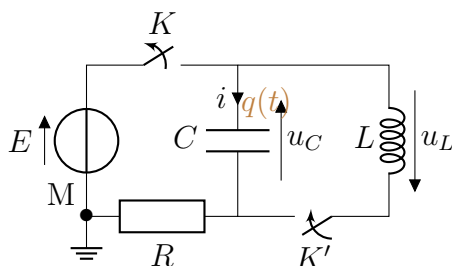
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$$

2.3 Résoudre cette ED dans l'approximation des petits angles ($\sin \theta \approx \theta$).

2.4 Montrer que le portrait de phase ² (courbe paramétrique telle que $x = \theta$ et $y = \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$) est un cercle.

2.5 A quel instant t_1 le pendule est-il à la position $\theta(t_1) = -\theta_0$?

3 Circuit LC



On considère le circuit ci-contre où l'interrupteur K est fermé depuis suffisamment longtemps pour que la charge du condensateur soit terminée. On donne $E = 5 \text{ V}$, $C = 1 \mu\text{F}$ et $L = 1 \text{ mH}$. A $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K et on ferme K' .

3.1 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ est :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

3.2 Quelle est la période T_0 des oscillations ?

3.3 Trouver l'expression analytique de $q(t)$ et tracer sa courbe représentative.

3.4 Comparer les ED de $q(t)$ et de $x(t)$ pour l'oscillateur mécanique de l'exercice 1 pour dresser un tableau des grandeurs analogues.

3.5 Exprimer puis calculer $\mathcal{E}_{tot}(t)$, l'énergie électromagnétique totale emmagasinée par le circuit à un instant t . Ce résultat vous paraît-il plausible d'un point de vue pratique ? Justifier votre réponse.

2. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.php